

The background of the entire page is a photograph of a university building with a modern, geometric design in shades of brown and tan. In the foreground, there are many cherry blossom branches with light pink flowers. At the bottom center, there is a black clock post with a white clock face showing approximately 1:50. Above the clock is a green sign with the word "Science" and a small logo. The title text is overlaid on a white rectangular box in the upper middle part of the image.

続・飛び入学 の物理

続・飛び入学
の物理

はじめに

1998年4月に第1期生を迎えた千葉大学の飛び入学制度は、既に20年を経過して、2018年4月には21期生を迎えた。6月には創立20周年記念シンポジウムを開催して、148名の参加者の下、現状分析と将来展望を行った。そこで強調されたのは、「若者の個性的能力を早期に『発掘』し、個性に応じた教育により『開花』させ、創造性溢れる研究者・技術者を育成する」という基本理念の再確認と、これまでに72名の卒業生が巣立ち幅広い分野で活躍している実績を、もっと社会に発信していく努力の重要性であった。この「続・飛び入学の物理」は、単なる受験参考書では無く、上述の理念と実績を幅広く知ってもらうための手段と位置付けている。前回、2015年3月に「飛び入学の物理」を発刊してから4年を経過し、その間に出題された物理の問題とその解答例を取りまとめて冊子としたものである。

千葉大学の飛び入学独自の入学試験（現方式I）は、創立当初より巷の試験とは一線を画すユニークな形態を保持してきた。すなわち、会場に用意されている教科書、参考書、辞書の類いを参照しても良く、6時間もの長い時間を掛けて理論的に解答を積み重ねる根気と思考力を問う問題を出題してきている。それは、単なる暗記や計算力だけで解けるようなものではなく、かといって難問奇問というわけではなくて、問題文中の手がかりを一つ一つ理論的に構築していけば（もちろん、数学的思考も同時に問われるが）、正解に至ることが出来るような良問を、関係教員がその都度長い時間を掛けて議論を重ね、作り上げてきた。物理に興味がある読者の皆様においては、是非その過程を味わって頂きたい。

なお、2014年から2009年入試までの問題は上述の「飛び入学の物理」に、2008年以前の問題に関しては、「千葉大学飛び入学試験問題」（日本評論社）として出版されているため、本書からは除外している。また、千葉大学先進科学センターのWebサイト（<https://www.cfs.chiba-u.jp/>）には、物理学系以外のものも含め、これまでのすべての試験問題とその解説が掲載されている。そちらも参照頂きたい。

これらに掲載されている問題の作成や検証には、多くの千葉大学教員が関わっている。さらに学外の方々にも、高校2年生に出題する内容としての妥当性などについて、様々な観点からご意見を頂戴し、出題内容に反映させて頂いている。ここに記して深く感謝の意を表するものである。最後に、先進科学プログラムが滞りなく運営されるように日頃尽力頂いている千葉大学先進科学センターの教員・職員の皆さんに深謝して、はじめの言葉とする。

2019年3月25日

千葉大学先進科学センター長

高橋 徹

目次

はじめに	I
平成31年度選考課題	5
平成31年度選考課題解答例	15
平成30年度選考課題	39
平成30年度選考課題解答例	51
平成29年度選考課題	67
平成29年度選考課題解答例	77
平成28年度選考課題	97
平成28年度選考課題解答例	107
平成27年度選考課題	123
平成27年度選考課題解答例	133

平成 31 年度

千葉大学先進科学プログラム入学者選考課題

課題論述

課題 I, II

(9:00–15:00)

注意事項

1. 問題すべてに解答してください。
2. 携帯電話,スマートフォンの電源を必ず切ってください。

[I]

図1のように水平面と半径 R の半円筒が点 B でなめらかに接続した。その上での質量 m の小球の運動について考える。以下の問いに答えなさい。ただし、重力加速度の大きさを g とし、摩擦や空気抵抗は考えなくてよく、運動する小球は十分に小さいとしてその大きさは考えなくてよい。また、座標や速度を問う問題では、水平方向には右向きを、鉛直方向には上向きを正としなさい。

まず、図1の左図のように、小球が水平面を速さ v_0 で右向きに進んでいる場合を考える。

問1 小球が点 B を通り、半円筒に沿って最上点 A に到達した。このときの小球の速さ v_1 を v_0, g, R を用いて表しなさい。

問2 問1のように小球が点 A に到達するためには v_0 がある値よりも大きくなければいけない。その値を g, R を用いて表しなさい。

問3 図1の右図のように、小球が半円筒の中心軸を通る水平軸より角度 θ だけ上に到達した時、速さが v_2 であった。このときの水平方向の速度 v_h と鉛直方向の速度 v_v をそれぞれ v_2, θ を用いて求めなさい。

問4 図1の右図のように、小球は点 A にたどり着かずに途中で半円筒を離れ、放物運動を始めた。離れたときの小球の速さ v_2 を v_0, g, R を用いて表しなさい。

問5 問4の放物運動の着地点 C が点 B よりも左側にあるためには、角度 θ がある値 θ_0 よりも大きくなければいけない。 θ_0 を求めなさい。また、 $\theta = \theta_0$ となる初速度 v_0 を g, R を用いて表しなさい。

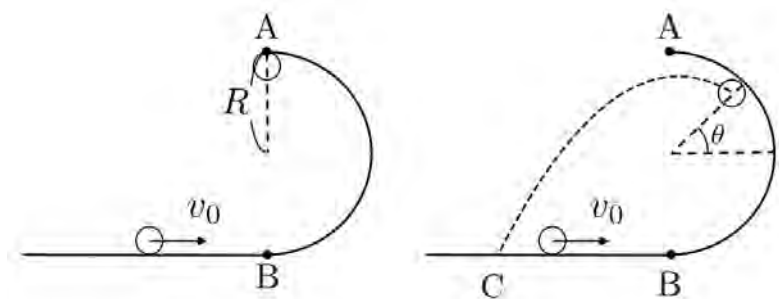


図1

次に、図2のように加速度 a で左向きに等加速度運動する台車の上に、水平面と半円筒を固定し、点 B から左に距離 ℓ の位置に小球を台車と同じ速度を持つように置いた。問6と7では、台車とともに動く観測者の視点から考える。

問6 点 A に到達するためには、 ℓ/R はある値よりも大きくなければいけない。その値を a, g を用いて答えなさい。

問7 加速度 $a = 3g$, 距離 $\ell = R$ のとき、小球は半円筒のある場所で半円筒を離れ、半円筒に再度衝突した。運動の水平位置左側の極値と着地する座標をそれぞれ R を用いて求めなさい。このとき、座標の原点は半円筒の中心としなさい。また、半円筒に衝突するまでの小球の軌跡を解答用紙のグラフに図示しなさい。

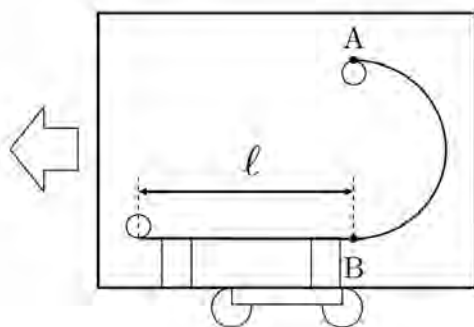


図2

最後に、図3のように、小球、水平面と半円筒を台車からおろし、小球と点Bを自然長 $\sqrt{2}R$ のゴムでつないだ。ゴムの自然長よりも ℓ だけ長くした状態で点Bと小球を水平面上に固定し、そつと離れた。図3には、その後の運動を時系列順にa, b, c, dと並べてある。ゴムが自然長よりも長さ x だけ長くなっている状態では、縮む方向に大きさ kx の力が加わるが、図3b, cのように自然長よりもゴムが縮んでいる状態では、弾性力は働かない。

問8 小球が半円筒に接した状態で水平面から高さ $h(> R)$ に到達したときのゴムの長さを R, h を用いて表しなさい。

問9 小球が半円筒に接した状態で高さ $h(> R)$ に到達したときの小球の速さ v_3 を m, ℓ, R, h, k を用いて表しなさい。

問10 小球が半円等に接した状態で水平面から高さ $h(> R)$ に到達するためには ℓ はある値よりも大きくなければいけない。その値を g, R, h, k を用いて表しなさい。

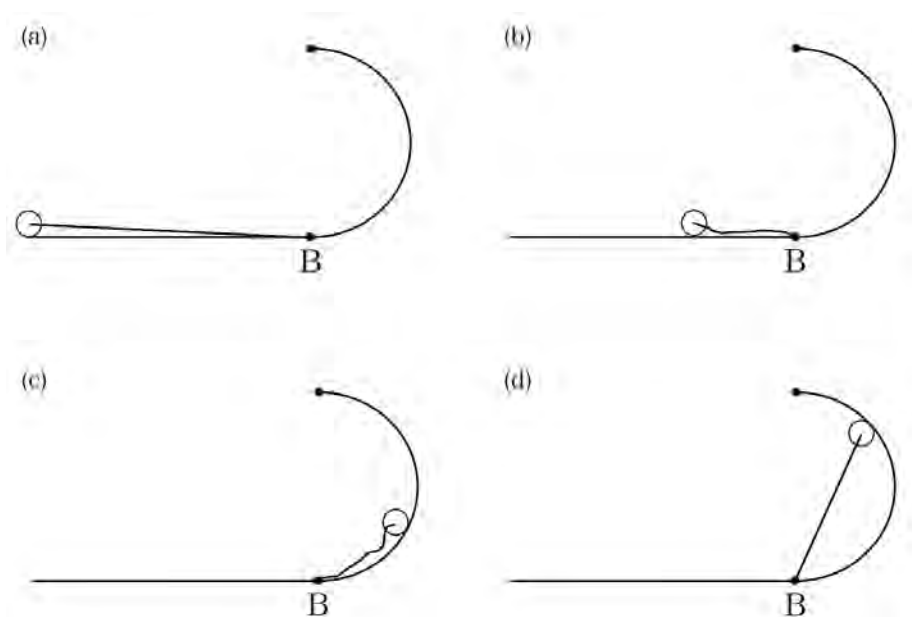


図3

[II]

電場や磁場を用いると物質を加熱することができる。たとえば、電子レンジは電磁波の一種であるマイクロ波を用いて水を加熱でき、IH 調理器は電磁誘導を用いて金属製の鍋を温めることができる。以下では電場を用いて気体を加熱する方法について考えてみよう。

図 1 のように自然長 ℓ_0 、ばね定数 k で質量が無視できる不導体のばねの一端に質量 m 、電荷 q ($q > 0$ とする) の小球 Q を取りつけ、ばねの他端 O を動かない不導体壁に固定する。重力は無視し、ばねは折れ曲がらないものとする。点 O から小球 Q の方向を y 軸正方向に選び、点 O を原点とする。時刻 $t = 0$ において、小球 Q は静止しており、ばねの長さは自然長であったとする。 y 軸正向きの一様な電場 $E(t)$ を加えたところ、小球は運動をはじめた。電荷を持った小球 Q が運動することによる電磁波の放射は無視できるものとする。

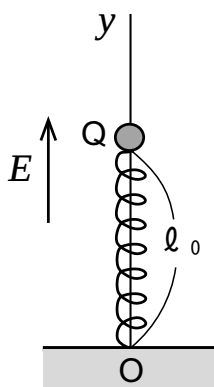


図 1

まず、ばねと小球が真空中にある場合を考える。

問 1 小球の座標を y ，速度を v_y ，加速度を a_y とする。小球の運動方程式を書きなさい。

問 2 電場の強さが $t < 0$ では 0 ， $t \geq 0$ では一定値 E_0 ($E_0 > 0$ とする) の場合、時刻 $t \geq 0$ において小球は単振動する。以下の問いに答えなさい。

- (1) $t \geq 0$ において、ばねの弾性力と電場から働く力が釣りあう高さ y_E を求めなさい。
- (2) 単振動の角振動数 ω と周期 T_Q を求めなさい。
- (3) 単振動の振幅 A_0 を求め、時刻 t ($t > 0$) における小球の y 座標と速度 v_y を ℓ_0 ， q ， E_0 ， k ， ω ， t を用いてあらわしなさい。

- (4) 小球の運動エネルギー K_Q を時刻 t の関数としてあらわし、 $0 \leq t \leq 2T_Q$ における時間変化のおおよその様子を横軸を t 、縦軸を K_Q としたグラフにあらわし、配布されたグラフ用紙に記入しなさい。式中には単振動の角振動数 ω と振幅 A_0 を用いてよい。運動エネルギーが最大となる時刻と運動エネルギーの最大値をグラフ中に記入すること。

- (5) 小球の運動エネルギーの時間平均

$$\overline{K_Q} = \frac{1}{T_Q} \int_0^{T_Q} K_Q(t) dt$$

を求めなさい。

問3 次に、時刻 $t = t_1$ ($0 < t_1 \leq T_Q$) に電場の向きが逆転して $0 \leq t < t_1$ では $E(t) = E_0$ 、 $t \geq t_1$ では $E(t) = -E_0$ に保たれる場合を考える。

- (1) 時刻 $t \geq t_1$ における小球の単振動の振幅の大きさを A_1 、初期位相を θ_1 とする。時刻 $t = t_1$ での y 座標と速度 v_y が問2 (3) で求めたものと一致するという条件から A_1 を ω 、 t_1 、 A_0 を用いてあらわしなさい。
- (2) (1) で求めた振幅の大きさ A_1 を最大にするには t_1 をどのように選べば良いか。この t_1 の値を求め、 T_Q を用いてあらわしなさい。
- (3) t_1 を (2) のように選んだ場合について時刻 $t \geq t_1$ における小球の y 座標を ℓ_0 、 A_0 、 ω 、 t を用いて式であらわしなさい。次に、 $0 \leq t \leq 2T_Q$ における小球の y 座標を横軸を t 、縦軸を $y - \ell_0$ としたグラフにあらわし、配布されたグラフ用紙に記入しなさい。 y 座標が極大、極小になる時刻とその時の $y - \ell_0$ の値をグラフ中に記入すること。

問4 図2のように大きさ E_0 の電場の向きが $t > 0$ において時間間隔 T_E ごとに逆転するとする。 $2T_E = T_Q$ の場合について以下の問いに答えなさい。なお、 n を0または正の整数として $t = t_n = nT_E$ における小球の y 座標を y_n 、 $t_n \leq t \leq t_{n+1}$ における単振動の振幅の大きさを A_n とする。

- (1) y_1 、 y_2 、 y_3 、 A_1 、 A_2 を求めなさい。
- (2) A_{2n} と A_{2n+2} の関係を求めなさい。
- (3) A_{2n} を n 、 A_0 を用いてあらわしなさい。
- (4) y_{2n} を ℓ_0 、 n 、 A_0 を用いてあらわしなさい。
- (5) $0 \leq t \leq 2T_Q$ における小球の y 座標の変化を横軸を t 、縦軸を $y - \ell_0$ としたグラフにあらわし、配布されたグラフ用紙に記入しなさい。 y が極大、極小になる時刻とその時の $y - \ell_0$ の値をグラフ中に記入すること。

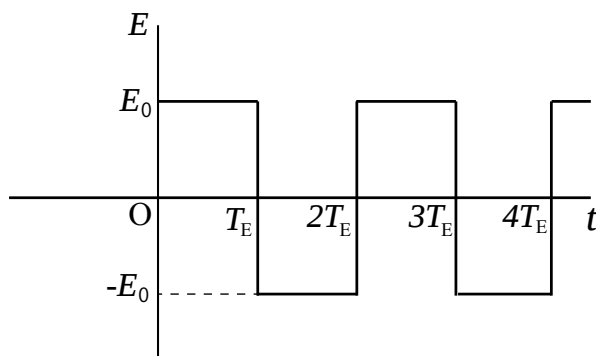


図 2

以下では電荷を帯びていない単原子分子の理想気体中に図 1 の小球がある場合を考える。

問 5 小球は気体分子との衝突によってエネルギーを得たり失ったりする。扱いを簡単にするため、気体分子 1 個の質量も m とし、気体分子は小球との衝突によって y 軸に沿う方向のみの力積を受けるものとする。気体分子と気体分子、気体分子とばねとの衝突は考えない。また、重力の効果は無視する。加えた y 方向の一樣な電場は $t < 0$ では $E(t) = 0$ 、 $t \geq 0$ では y 軸正向きで一定 $E(t) = E_0$ とする。気体分子と小球の衝突が弾性衝突の場合について、以下の問いに答えなさい。時刻 $t > 0$ における小球と気体分子の最初の衝突までの時間は小球の振動周期に比べて十分に長いとする。

- (1) 気体分子と衝突する直前の小球 Q の速度を v_y 、気体分子の速度の y 成分を u_y とするとき、衝突直後の小球の速度 v'_y と気体分子の速度の y 成分 u'_y を求めなさい。
- (2) 絶対温度 T の単原子分子理想気体の分子 1 個あたりの y 方向の運動エネルギーの平均値は、ボルツマン定数を k_B として $\frac{1}{2}k_B T$ であらわすことができる。多数の粒子についての u_y^2 の平均値 $\langle u_y^2 \rangle$ を m 、 k_B 、 T を用いてあらわしなさい。
- (3) 小球が気体分子とはじめて衝突する直前の気体分子の運動エネルギーを K 、衝突直後の気体分子の運動エネルギーを K' とする。気体分子と小球 Q の最初の衝突によって気体分子が得る運動エネルギーの平均値 $\langle \Delta K \rangle = \langle K' \rangle - \langle K \rangle$ を衝突直前の小球 Q の運動エネルギーの平均値 $\langle K_Q \rangle$ と k_B 、 T を用いてあらわしなさい。
- (4) $\langle K_Q \rangle$ を問 2 (5) で求めた真空中での K_Q の時間平均で近似する。このとき $\langle \Delta K \rangle$ を k 、 q 、 E_0 、 k_B 、 T を用いてあらわしなさい。ばね定数が $k = 1.0 \times 10^{-4}$ N/m,

$T = 300 \text{ K}$, $q = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$ のとき, $\langle \Delta K \rangle > 0$ となるための E_0 の下限値を有効数字 2 桁で求めなさい。ボルツマン定数は $k_B = 1.38 \times 10^{-23} \text{ J/K}$ とする。

問 6 次に, $t \geq 0$ で加えた電場 $E(t)$ を図 2 のように変化させる場合を考える。

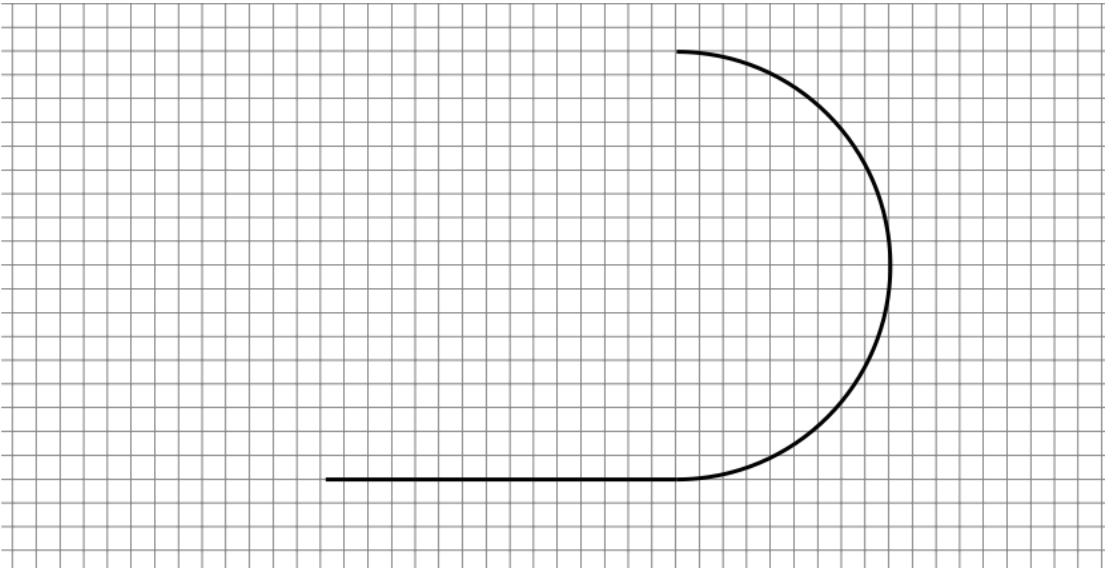
- (1) $2T_E = T_Q$ の場合について時刻 $t = 300T_E$ で $\langle \Delta K \rangle > 0$ となるための E_0 の下限値を有効数字 2 桁で求めなさい。
- (2) 単位体積あたりの気体分子の個数を N , 小球の断面積を σ とするとき, y 軸負方向に向かう気体分子が単位時間に小球と衝突する回数 f は y 軸負方向に向かう気体分子の u_y の平均 $\langle u \rangle$ を用いて $f = \frac{N}{2} \sigma \langle u \rangle$ で近似することができる。 $\langle u \rangle = \sqrt{\langle u_y^2 \rangle}$ と近似して $N = 2.0 \times 10^{25} \text{ m}^{-3}$, $\sigma = 1.0 \times 10^{-20} \text{ m}^2$, $m = 1.6 \times 10^{-26} \text{ kg}$, $T = 300 \text{ K}$ の場合の f を有効数字 2 桁で求めなさい。
- (3) 小球 Q との衝突によって運動エネルギーが増加した気体分子は他の気体分子との衝突によってこの運動エネルギーを受け渡し, 気体全体が加熱される。気体を封入した容器の底面に図 1 のような振動子を多数配置することにより, 加熱率を高めることができる。気体の加熱効率を高めるためには電場 $E(t)$ をどのように変化させれば良いか, 考察しなさい。

電磁波は電場と磁場の変化が伝わる波であり, 電場の向きと大きさが時間とともに変化する。したがって, 電磁波を用いて荷電粒子を振動させ, 気体を加熱することができる。水分子の場合, 上記のメカニズムによる加熱効率が最も高くなるのは赤外線を照射した場合であり, 電子レンジで用いられているマイクロ波ではあまり加熱できない。そこで, 正負の電荷の偏りを持つ分子の回転が利用されている。

先進科学プログラム解答用紙

受験番号 C S F _____

氏 名 _____

課 題		No _____ / _____
 ※補足 この「先進科学プログラム解答用紙」は課題Ⅰ用の解答用紙で、実際の入試で使用したものです。問題を解く際の参考にしてください。		

H31
—
課題

平成 31 年度

千葉大学先進科学プログラム入学者選考課題

H31
解答例

課題論述

課題 I

解答例

出題意図

問 1-5: 力学の基本的な問題, 特に等加速度運動・遠心力を正しく扱えるかを問うた。特に問 5 では, やや煩雑な計算を正しく完了させることができるかを見た。

問 6-7: 慣性力を正しく扱うことができるかを問うた。問 7 では, 求められた方程式の形を図示する力を問うた。

問 8-10: 力の合成を理解し, 正しく計算をできるか試す問題である。図形の問題を正しく解くことが必要な力である。

H3I

解答例

解答例 [I]

問 1 力学的エネルギーの保存から

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + 2mgR \quad (1)$$

よって $v_1 = \sqrt{v_0^2 - 4gR}$ となる。

問 2 点 A に来た時に遠心力が重力よりも大きければ良いので

$$m\frac{v_1^2}{R} \geq mg \quad (2)$$

よって, 求める答えは $v_0 \geq \sqrt{5gR}$ となる。

問 3 角度を考えるとそれぞれ

$$v_h = -v_2 \sin \theta \quad (3)$$

$$v_v = v_2 \cos \theta \quad (4)$$

となる。

問 4 半円筒の半分までたどり着かないと半円筒から離れることはないことに注意する。

力学的エネルギー保存より

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_2^2 + mgR(1 + \sin \theta) \quad (5)$$

$$v_2^2 = v_0^2 - 2gR(1 + \sin \theta) \quad (6)$$

半円筒から離れる直前には, 重力の半円筒中心向き成分と遠心力が釣り合っている
ので

$$m\frac{v_2^2}{R} = mg \sin \theta \quad (7)$$

よって

$$\sin \theta = \frac{v_2^2}{gR} \quad (8)$$

である。これを式 (6) に代入し,

$$v_2^2 = v_0^2 - 2gR \left(1 + \frac{v_2^2}{gR} \right) \quad (9)$$

整理すると

$$v_2 = \sqrt{\frac{v_0^2 - 2gR}{3}} \quad (10)$$

が得られる。

問 5 半円筒を離れる瞬間の水平方向の速さは問 3 で求めたように $v_h = -v_2 \sin \theta$, 鉛直方向の速さは $v_v = v_2 \cos \theta$ となる。半円筒の半分よりも上に到達しないと, 物体が半円筒から離れることはないので $v_h < 0$ であることに注意する。半円筒を離れた点を原点として, 右向き, 上向きをそれぞれ x, y 軸の正にとると

$$x = v_h t \quad (11)$$

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_v t \quad (12)$$

となる。式 (11) より $t = x/v_h$ なのでこれを式 (12) に代入すると

$$y = -\frac{1}{2}\frac{g}{v_h^2}x^2 + \frac{v_v}{v_h}x \quad (13)$$

という放物線の方程式が得られる。これが $y = -R(1 + \sin \theta)$ に来た時の x の位置を求める。少し整理すると

$$gx^2 - 2v_h v_v x - 2v_h^2 R(1 + \sin \theta) = 0 \quad (14)$$

を解けば良い。解の公式のうち適切なもの ($x < 0$) を選ぶと

$$x = \frac{v_h v_v - \sqrt{v_v^2 v_h^2 + 2gR v_h^2 (1 + \sin \theta)}}{g} \quad (15)$$

$$= \frac{v_h}{g} \left(v_v + \sqrt{v_v^2 + 2gR(1 + \sin \theta)} \right) \quad (16)$$

$v_h < 0$ であるためかつこの中の第二項は、符号が変わるところに注意する。この x が,

$-R \cos \theta$ よりも小さければいいので求める条件は

$$\frac{v_h}{g} \left(v_v + \sqrt{v_v^2 + 2gR(1 + \sin \theta)} \right) < -R \cos \theta \quad (17)$$

ここで $v_h = -v_2 \sin \theta$, $v_v = v_2 \cos \theta$, $gR = v_2^2 / \sin \theta$ を用いて少し整理すると

$$-\sin \theta \left(\cos \theta + \sqrt{\cos^2 \theta + \frac{2(1 + \sin \theta)}{\sin \theta}} \right) < -\frac{\cos \theta}{\sin \theta} \quad (18)$$

となる。さらに整理すると

$$\cos \theta \left(\frac{1}{\sin^2 \theta} - 1 \right) < \sqrt{\cos^2 \theta + \frac{2(1 + \sin \theta)}{\sin \theta}} \quad (19)$$

$(0 < \theta < \pi/2)$ では、両辺は正であるので二乗した後に整理すると

$$\cos^6 \theta < \cos^2 \theta \sin^4 \theta + 2(1 + \sin \theta) \sin^3 \theta \quad (20)$$

$$2(1 + \sin \theta) \sin^3 \theta - \cos^2 \theta (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) > 0 \quad (21)$$

全て $\sin \theta$ に変換して不等式を解く。

$$2(1 + \sin \theta) \sin^3 \theta - (1 - \sin^2 \theta)(1 - 2\sin^2 \theta) > 0 \quad (22)$$

$$(\sin \theta + 1)^2 (2\sin \theta - 1) > 0 \quad (23)$$

となり, $\sin \theta > 1/2$, つまり $\theta > \pi/6$ が求める条件となり, $\theta_0 = \pi/6$ となる。これを少し変形して問4で求めた関係より $\theta = \theta_0$ となるためには

$$\frac{v_0^2 - 2gR}{3gR} = \frac{1}{2} \quad (24)$$

となり求める条件は

$$v_0 = \sqrt{\frac{7}{2}gR} \quad (25)$$

となる。

本解答では、最初に t を消去し, x と y の関係式の議論をおこなったが、レールに再度着地する時間を (12) より求めて、その値を式 (11) に代入し、評価するという解法も可能である。

問 6 点 A に到達した時の小球の速さを v_4 とすると、力学的エネルギーと仕事の関係より

$$\frac{1}{2}mv_4^2 + 2mgR = mal \quad (26)$$

点 A と B の x 座標が等しいので、半円筒を通過している間の慣性力は合計としては仕事をしないことに注意。これを用いると点 A での遠心力は

$$\frac{mv_4^2}{R} = \frac{2m}{R}(al - 2gR) \quad (27)$$

これが重力 mg よりも大きければ良いのでもとめる条件は

$$\frac{\ell}{R} > \frac{5g}{2a} \quad (28)$$

となる。

問 7 問 6 より、物体は点 A を通過することがわかる。問 6 の前半と同じように力学的エネルギーと仕事の関係よりそのときの速度は水平方向に $-\sqrt{2gR}$ となる。 $a = 3g$, $\ell = R$ を代入して、水平方向 (x) と鉛直方向 (y) の座標の時間変化を求めると

$$x = -\sqrt{2gR}t + \frac{3}{2}gt^2 \quad (29)$$

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + R \quad (30)$$

上の二つの式から t を消すと

$$x = -2\sqrt{R(R-y)} + 3(R-y) \quad (31)$$

極値を求めるために y で微分すると

$$\frac{dx}{dy} = \sqrt{\frac{R}{R-y}} - 3 \quad (32)$$

よって $y = (8/9)R$ で、極小値 $x = -R/3$ をとる。問題文にあるようにこの運動は半円筒に再度衝突するので、半円筒の方程式

$$x = \sqrt{R^2 - y^2} \quad (33)$$

と連立させる。まず、式 (31) の両辺を二乗 (x は正であることに気をつける)

$$x^2 = 4R(R-y) - 12(R-y)\sqrt{R(R-y)} + 9(R-y)^2 \quad (34)$$

連立すると

$$R^2 - y^2 = 4R(R - y) - 12(R - y)\sqrt{R(R - y)} + 9(R - y)^2 \quad (35)$$

点 A から出発するので、それ以外の解を求める。よって両辺を $(R - y)$ で割る

$$R + y = 4R - 12\sqrt{R(R - y)} + 9(R - y) \quad (36)$$

整理すると

$$6\sqrt{R(R - y)} = 6R - 5y \quad (37)$$

さらに両辺を二乗して

$$36R(R - y) = 36R^2 - 60Ry + 25y^2 \quad (38)$$

少し整理して

$$(25y - 24R)y = 0 \quad (39)$$

よって、解は

$$y = \frac{24}{25}R, 0 \quad (40)$$

となる。式 (31) に代入すると

$$x = -\frac{7}{25}R, R \quad (41)$$

前者の解は、円筒が $x < 0$ のところまで続いていた場合の解なので適切でない。よって、半円筒と物体が再着地する座標は $(R, 0)$ となる。これらを合わせると図は I-4 のようになる。

軌跡の方程式と円の方程式 $x^2 + y^2 = R^2$ という方程式を連立させることで、 t のみの方程式にして、その軌跡を知るという解法も可能である。

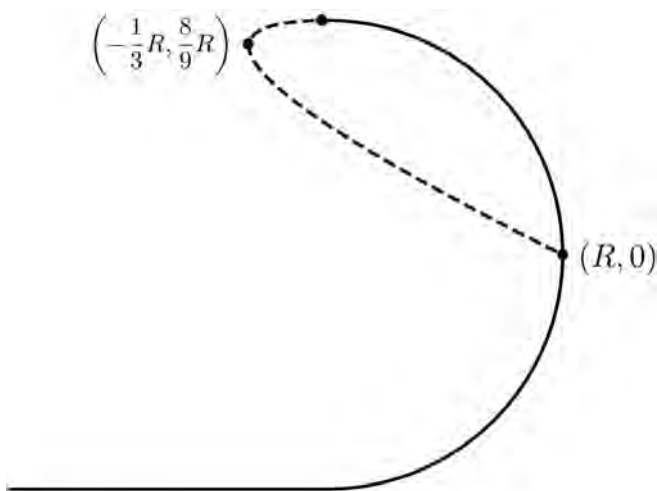


図 I-4:

問 8 高さ h に来た時の点 B からの水平距離は

$$\sqrt{R^2 - (h - R)^2} = \sqrt{h(2R - h)} \quad (42)$$

よって、ゴムの長さは

$$\sqrt{h(2R - h) + h^2} = \sqrt{2Rh} \quad (43)$$

である。

問 9 力学的エネルギー保存より

$$\frac{1}{2}k\ell^2 = \frac{1}{2}mv_3^2 + \frac{1}{2}k(\sqrt{2Rh} - \sqrt{2R})^2 + mgh \quad (44)$$

$$v_3 = \sqrt{\frac{k}{m} \left[\ell^2 - 2(\sqrt{Rh} - R)^2 \right] - 2gh} \quad (45)$$

となる。

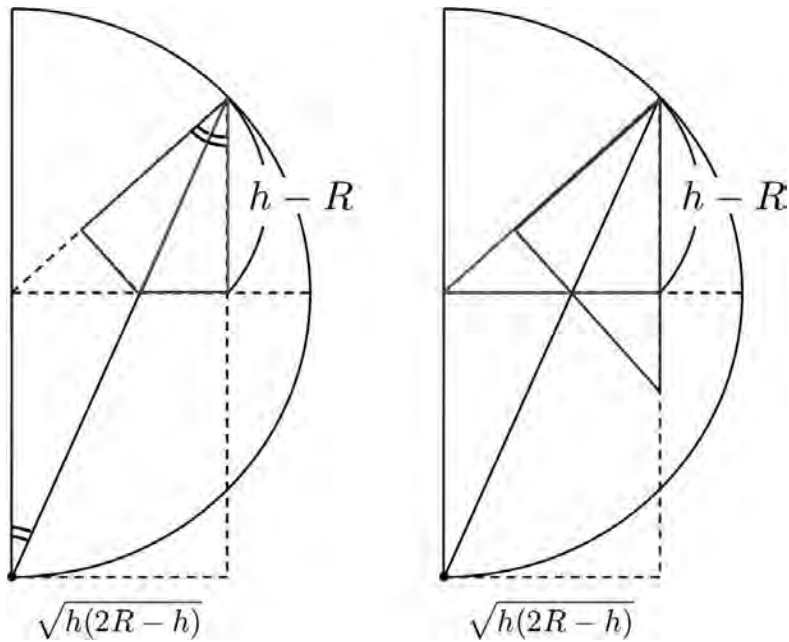


図 I-5:

問 10 図 I-5 にある赤と青の直角三角形がそれぞれ合同なので、力の成分は簡単に分けることができる。ゴムの長さは、 $\sqrt{2Rh}$ 。よって、ゴムの張力 T は

$$T = k\sqrt{2R}(\sqrt{h} - \sqrt{R}) \quad (46)$$

である。したがって $h > R$ では、ゴムは自然長より長い。図 I-5 左の直角三角形の斜辺の長さは、ゴムの長さを斜辺とする大きな直角三角形との相似関係から

$$\frac{h-R}{h}\sqrt{2Rh} = (h-R)\sqrt{\frac{2R}{h}} \quad (47)$$

動径方向の張力の大きさ T_r は

$$T_r = T \frac{h-R}{(h-R)\sqrt{\frac{2R}{h}}} \quad (48)$$

$$= T\sqrt{\frac{h}{2R}} \quad (49)$$

$$= k(h - \sqrt{Rh}) \quad (50)$$

遠心力 F_c は

$$F_c = \frac{mv_3^2}{R} \quad (51)$$

$$= \frac{k}{R} \left[\ell^2 - 2(\sqrt{Rh} - R)^2 \right] - \frac{2mgh}{R} \quad (52)$$

重力の動径方向の大きさは $mg(h - R)/R$ となるので (図 I-5 右図参照), これらを合わせると垂直抗力を求めることができ、それが正であれば高さ h に半円筒から離れることなく到達することができる。よって求める条件は

$$\frac{k}{R} \left[\ell^2 - 2(\sqrt{Rh} - R)^2 \right] - \frac{2mgh}{R} - k(h - \sqrt{Rh}) - mg\frac{h - R}{R} > 0 \quad (53)$$

少し整理すると

$$\ell > \sqrt{3Rh - 5R\sqrt{Rh} + 2R^2 + \frac{mg}{k}(3h - R)} \quad (54)$$

となり、これが求める条件である。

平成 31 年度

千葉大学先進科学プログラム入学者選考課題

課題論述

課題Ⅱ

解答例

II

出題意図

電磁気，力学，振動，気体分子運動の複合問題。

問1，問2：電荷に働く力と単振動についての理解を問う基本問題。

問3：電場が変化する時刻前後の運動方程式の解を接続させる問題。この時刻における位置と速度が一致するという条件を定式化することを通して数理的な能力を確認した。

問4：電場の向きが周期的に反転する場合の電荷の運動を問い，単振動の周期と電場の変化の周期が一致する場合の共鳴現象について考察させた。

問5，問6：小球と気体分子の衝突を通した気体の加熱について問う問題。数値を用いた計算力についても確認した。

H31
解答例

解答例

問1 小球の運動方程式は

$$ma_y = qE(t) - k(y - \ell_0)$$

である。

問2 (1) 問1で求めた方程式は，電場 $E(t) = E_0$ が一定の時，

$$ma_y = -k \left[y - \left(\ell_0 + \frac{qE_0}{k} \right) \right]$$

と書くことができる。この運動方程式は，

$$y_E = \ell_0 + \frac{qE_0}{k}$$

の高さで力が釣りあうことを示している。

(2) 前問(1)の $y = y_E$ を基準とした新しい座標 $z = y - y_E$ を用いて運動方程式を書きなおすと，

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} = -kz$$

となる。この運動方程式は単振動の方程式と同じである。単振動の角振動数は $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ ，周期は $T_Q = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$ である。

(3) 単振動の振幅を A_0 ，初期位相を θ とすると

$$z = A_0 \sin(\omega t + \theta)$$

と書くことができる。したがって

$$y = \ell_0 + \frac{qE_0}{k} + A_0 \sin(\omega t + \theta)$$

$$v_y = A_0 \omega \cos(\omega t + \theta)$$

である。 $t = 0$ で $y = \ell_0$, $v_y = 0$ を代入すると

$$\ell_0 + \frac{qE_0}{k} + A_0 \sin \theta = \ell_0 \quad (1)$$

$$A_0 \omega \cos \theta = 0 \quad (2)$$

が得られる。(2) 式を満たす θ は $\theta = \frac{\pi}{2}$ または $\theta = \frac{3\pi}{2}$ である。

(1) 式より

$$\frac{qE_0}{k} + A_0 \sin \theta = 0$$

が得られる。 $A_0 > 0$ だから $\sin \theta < 0$ 。したがって $\theta = \frac{3\pi}{2}$, $A_0 = \frac{qE_0}{k}$ 。

以上より,

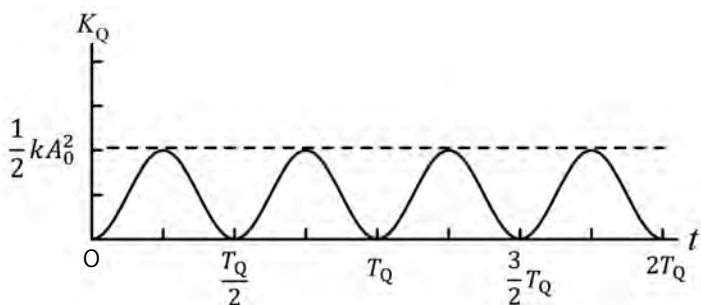
$$y = \ell_0 + \frac{qE_0}{k}(1 - \cos \omega t) \quad (3)$$

$$v_y = \frac{qE_0}{k} \omega \sin \omega t$$

(4) $v_y = A_0 \omega \sin \omega t$ より, 小球の運動エネルギー K_Q は

$$K_Q = \frac{1}{2} m v_y^2 = \frac{1}{2} k A_0^2 \sin^2 \omega t$$

である。 K_Q の時間変化のグラフは以下のようなになる。



運動エネルギーが最大となる時刻は $\omega t = \frac{\pi}{2} + n\pi$, すなわち $t = \frac{T_Q}{4} + \frac{nT_Q}{2}$ である。運動エネルギーの最大値は $\frac{1}{2}kA_0^2$ 。

(5) 小球の運動エネルギーの時間平均は $\overline{\sin^2 \omega t} = \frac{1 - \overline{\cos 2\omega t}}{2} = \frac{1}{2}$ より次式のようにになる。

$$\overline{K_Q} = \frac{1}{4} k A_0^2 \quad (4)$$

問3 この問いでは時刻 $t = t_1$ ($0 < t_1 \leq T_Q$) に電場の向きが逆転して $t \geq t_1$ では $E(t) = -E_0$ に保たれる場合を扱っている。

- (1) 時刻 $t \geq t_1$ における運動方程式 $m \frac{d^2 y}{dt^2} = -qE_0 - k(y - \ell_0)$ より $t \geq t_1$ における小球のつりあいの位置 y'_E は $y'_E = \ell_0 - \frac{qE_0}{k}$ に変化する。したがって $t \geq t_1$ における小球の y 座標と速度は単振動の振幅の大きさを A_1 、初期位相を θ_1 として

$$y = \ell_0 - \frac{qE_0}{k} + A_1 \sin(\omega t + \theta_1) = \ell_0 - A_0 + A_1 \sin(\omega t + \theta_1) \quad (5)$$

$$v_y = A_1 \omega \cos(\omega t + \theta_1)$$

となる。時刻 $t = t_1$ で、これらが問2 (3) の y , v_y と一致するという条件から

$$\ell_0 + A_0 - A_0 \cos \omega t_1 = \ell_0 - A_0 + A_1 \sin(\omega t_1 + \theta_1) \quad (6)$$

$$A_0 \omega \sin \omega t_1 = A_1 \omega \cos(\omega t_1 + \theta_1) \quad (7)$$

したがって

$$A_1 \sin(\omega t_1 + \theta_1) = A_0(2 - \cos \omega t_1) \quad (8)$$

$$A_1 \cos(\omega t_1 + \theta_1) = A_0 \sin \omega t_1 \quad (9)$$

が得られる。二乗して合計をとると次式が得られる。

$$A_1^2 = A_0^2 [(2 - \cos \omega t_1)^2 + \sin^2 \omega t_1] = A_0^2 (5 - 4 \cos \omega t_1) \quad (10)$$

$$A_1 = A_0 \sqrt{5 - 4 \cos \omega t_1} \quad (11)$$

- (2) $t \geq t_1$ における単振動の振幅 A_1 を最大にするのは $\cos \omega t_1 = -1$ 、すなわち $t_1 = \frac{T_Q}{2}$ のときである。

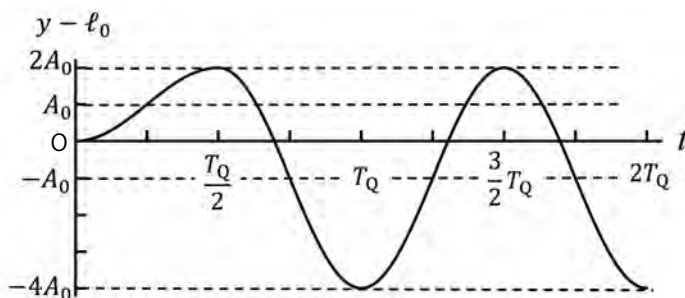
- (3) $t_1 = \frac{T_Q}{2}$ の場合 $\omega t_1 = \pi$ を (11) 式に代入すると $A_1 = 3A_0$ 。したがって (8) 式より $\sin(\omega t_1 + \theta_1) = -\sin \theta_1 = 1$ 、すなわち $\theta_1 = \frac{3\pi}{2}$ 。時刻 $t \geq t_1$ における小球の y 座標は、これらを (5) 式に代入して

$$y = \ell_0 - A_0 + 3A_0 \sin(\omega t + \frac{3\pi}{2}) \quad (12)$$

すなわち

$$y = \ell_0 - A_0 - 3A_0 \cos \omega t \quad (13)$$

である。 $t_1 = \frac{T_Q}{2}$ に選んだ場合の $0 \leq t \leq 2T_Q$ における小球の y 座標をたて軸を $y - \ell_0$ とするグラフにあらわすと以下ようになる。



- 問4 (1) (13) 式より $y_1 = \ell_0 + 2A_0$, $y_2 = \ell_0 - 4A_0$, $A_1 = 3A_0$.
 $t_2 \leq t \leq t_3$ において初期位相を θ_2 とすると

$$y = \ell_0 + A_0 + A_2 \sin(\omega t + \theta_2)$$

$$v_y = A_2 \omega \cos(\omega t + \theta_2)$$

と書くことができる。 $t = t_2$ において $v_y = 0$ より $\cos \theta_2 = 0$ 。したがって $\theta_2 = \frac{\pi}{2}$ または $\theta_2 = \frac{3\pi}{2}$ 。

$$y_2 = \ell_0 - 4A_0 = \ell_0 + A_0 + A_2 \sin(2\pi + \theta_2)$$

より $A_2 \sin \theta_2 = -5A_0 < 0$ 。したがって $\theta_2 = \frac{3\pi}{2}$ 。よって $A_2 = 5A_0$ 。

$$y_3 = \ell_0 + A_0 + 5A_0 \sin(3\pi + \frac{3\pi}{2}) = \ell_0 + 6A_0 \text{ が得られる。}$$

- (2) 初期位相は変化しないことがわかったので, $t_{2n} \leq t \leq t_{2n+1}$ において

$$y = \ell_0 + A_0 - A_{2n} \cos \omega t \quad (14)$$

であり, $t_{2n+1} \leq t \leq t_{2n+2}$ において

$$y = \ell_0 - A_0 - A_{2n+1} \cos \omega t \quad (15)$$

と書くことができる。 $t = t_{2n+1}$ で両者が等しいことから

$$y_{2n+1} = \ell_0 + A_0 - A_{2n} \cos \omega t_{2n+1} = \ell_0 - A_0 - A_{2n+1} \cos \omega t_{2n+1}$$

が得られる。 $\cos \omega t_{2n+1} = -1$ だから $A_{2n+1} = A_{2n} + 2A_0$ 。

同様に, $t = t_{2n+2}$ において

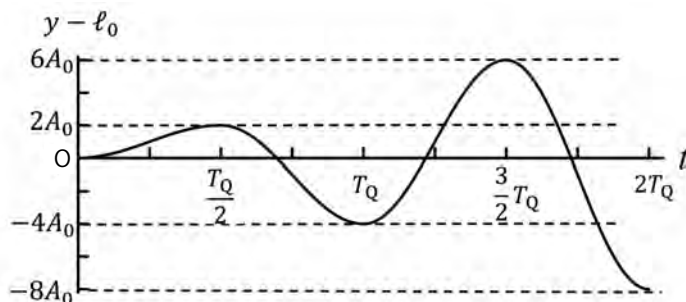
$$y_{2n+2} = \ell_0 - A_0 - A_{2n+1} \cos \omega t_{2n+2} = \ell_0 + A_0 - A_{2n+2} \cos \omega t_{2n+2}$$

が成り立つ。 $\cos \omega t_{2n+2} = 1$ だから $A_{2n+2} = A_{2n+1} + 2A_0$ 。

よって $A_{2n+2} = A_{2n} + 4A_0$ 。

- (3) $A_{2(n+1)} = A_{2n} + 4A_0$ だから, $A_{2n} = A_0 + n \times (4A_0) = (4n+1)A_0$ 。
 別解: 電場の反転によってつり合いの位置が $2A_0$ ずつずれるので
 $A_n = A_0 + 2nA_0 = (2n+1)A_0$, よって $A_{2n} = (4n+1)A_0$ 。

- (4) $y_{2n} = \ell_0 + A_0 - A_{2n} \cos \omega t_{2n} = \ell_0 + A_0 - (4n+1)A_0 = \ell_0 - 4nA_0$
 (5) $0 \leq t \leq 2T_Q$ における小球の y 座標の変化のグラフは以下ようになる。



H31
解答例

- 問5 (1) 衝突した直後の小球の速度を v'_y ，気体分子の速度の y 成分を u'_y とすると運動量保存則より $mv_y + mu_y = mv'_y + mu'_y$ ，弾性衝突より $v_y - u_y = u'_y - v'_y$ 。したがって $v'_y = u_y$ ， $u'_y = v_y$ 。
 (2) $\frac{1}{2}m\langle u_y^2 \rangle = \frac{1}{2}k_B T$ より $\langle u_y^2 \rangle = \frac{k_B T}{m}$ 。
 (3) 気体分子と小球 Q の最初の衝突によって気体分子が得る運動エネルギーの平均値 $\langle \Delta K \rangle$ は，衝突前の気体分子の運動エネルギーの平均値 $\langle K \rangle = \frac{1}{2}m\langle u_y^2 \rangle = \frac{1}{2}k_B T$ ，衝突後の気体分子の運動エネルギーの平均値 $\langle K' \rangle = \frac{1}{2}m\langle u_y'^2 \rangle = \frac{1}{2}m\langle v_y^2 \rangle = \langle K_Q \rangle$ より以下のようにになる。

$$\langle \Delta K \rangle = \langle K' \rangle - \langle K \rangle = \langle K_Q \rangle - \frac{1}{2}k_B T$$

- (4) $\langle K_Q \rangle$ を真空中での K_Q の時間平均で近似すると

$$\langle \Delta K \rangle = \frac{1}{4}k \left(\frac{qE_0}{k} \right)^2 - \frac{1}{2}k_B T$$

と書ける。 $\langle \Delta K \rangle > 0$ のとき

$$(qE_0)^2 > 2kk_B T = 2 \times 10^{-4} \times 1.38 \times 10^{-23} \times 300 = 8.28 \times 10^{-25}$$

したがって E_0 の下限値は次式で与えられる。

$$E_0 > \frac{\sqrt{2kk_B T}}{q} \doteq \frac{9.1 \times 10^{-13}}{1.6 \times 10^{-19}} \doteq 5.7 \times 10^6 \text{ V/m}$$

- 問6 (1) 周期 $T_Q = 2T_E$ で電場が逆転するとき， $A_{2n} = (4n+1)A_0$ より

$$\langle K_Q \rangle = \frac{1}{4}kA_{300}^2 = \frac{1}{4}k(601A_0)^2 = 601^2 \times \frac{1}{4}kA_0^2 > \frac{1}{2}k_B T$$

が得られる。したがって E_0 の下限値は以下のようにになる。

$$E_0 > \frac{\sqrt{2kk_B T}}{601q} \doteq \frac{5.7 \times 10^6}{601} \doteq 9.5 \times 10^3 \text{ V/m}$$

- (2) y 軸負方向に向う気体分子の平均の速さは問題文の近似のもとで

$$\langle u \rangle = \sqrt{\frac{k_B T}{m}} = \sqrt{\frac{1.38 \times 10^{-23} \times 300}{1.6 \times 10^{-26}}} \doteq 5.1 \times 10^2 \text{ m/s}$$

のように求まる。したがって、 y 軸負方向に運動する気体分子が単位時間に1個の小球と衝突する回数は

$$f = \frac{N}{2} \sigma \langle u \rangle = \frac{1}{2} \times 2.0 \times 10^{25} \times 1.0 \times 10^{-20} \times 5.1 \times 10^2 = 5.1 \times 10^7 \text{ Hz}$$

である。

- (3) $2T_E = T_Q$ に選ぶと加熱効率を高めることができる。

$$T_Q = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{1.6 \times 10^{-26}}{1.0 \times 10^{-4}}} \doteq 7.95 \times 10^{-11} \text{ s}$$

であるから、 $T_E = 4.0 \times 10^{-11} \text{ s}$ 毎に電場の向きを反転すれば良い。

電場の振動数を f_E とすると、 $f_E = \frac{1}{7.95 \times 10^{-11}} \doteq 1.3 \times 10^{10} \text{ Hz}$ 。

小球は $1/f$ 秒程度で気体分子との衝突によってエネルギーを失うため、小球の運動エネルギーが $\frac{1}{2} k_B T$ 程度になるまでの時間は $1/f$ より短く選ぶべきである。 $f = 5.1 \times 10^7 \text{ Hz}$ のとき、 $\frac{1}{f} \doteq 2.0 \times 10^{-8} \text{ s}$ 。問6(1)より $E_0 = 9.5 \times 10^3 \text{ V/m}$

とすると $t = 300T_E \doteq 1.2 \times 10^{-8} \text{ s}$ で小球の運動エネルギーの平均値が $\frac{1}{2} k_B T$ 以上になる。この時刻は小球が気体分子に最初に衝突するまでの時間 $1/f$ より短いので、小球は気体分子よりも大きな運動エネルギーを持つことができ、気体分子との衝突によって気体を加熱することができる。

平成 31 年度
千葉大学先進科学プログラム入学者選考課題

課題論述

数学

(15:30－17:00)

注意事項

1. この冊子は，監督者から解答を始めるよう合図があるまで開いてはいけません。
2. 問題冊子に印刷または製本の不具合がある場合は，手を上げて申し出て下さい。
3. 問題すべてに解答してください。
4. 解答用紙は何枚使用しても構いません。全ての解答用紙に受験番号を必ず記入して下さい。
5. 教科書，ノートなどは一切参照してはいけません。
6. その他，監督者の指示に従って下さい。

数学

問 1 以下の方程式を x について解きなさい。

$$(1) x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$$

$$(2) \sin 3x + \sin x = 0 \quad (0 \leq x < 2\pi)$$

$$(3) \log_3(x^2 + 2x - 3) + \log_{\frac{1}{3}}(x - 1) = 2 \quad (x > 1)$$

問 2 放物線 $y = x^2$ と直線 $y = 2ax + 1$ がある。以下の問いに答えなさい。

(1) 2つの線が交わる点の x 座標を求めなさい。

(2) 放物線と直線で囲まれる面積 S を求めなさい。

(3) (2) の面積 S を a について微分しなさい。

問 3 原点 O から座標空間内の点 $A(1, 1, 0)$ に引いた空間ベクトルを $\overrightarrow{OA}$, 点 $B(2, 1, 1)$ に引いた空間ベクトルを $\overrightarrow{OB}$ とする。2つのベクトル $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ を含む平面内の点で, 点 $C(1, 3, 10)$ にもっとも近い点の座標を求めなさい。

問 4 次の漸化式で表される数列 a_n の一般項を求めなさい。

$$\begin{cases} a_1 = 7 \\ a_{n+1} = 3a_n - 10 \end{cases}$$

問 5 2つの点 $A(1, 0)$, $B(4, 0)$ からの距離が $2:1$ である点 P が満たす方程式を求め, その軌跡を図示しなさい。

問 6 複素数 $(\sqrt{3} + i)^{10}$ の実部, 虚部, 絶対値, および偏角 θ を求めなさい。

ただし, $0 \leq \theta < 2\pi$ とする。

問 7 次の等式を満たす関数 $f(x)$ を求めなさい。

$$f(x) = x + \int_0^\pi f(t) \sin t \, dt$$

平成 31 年度

千葉大学先進科学プログラム入学者選考課題

H31
解答例

課題論述

数学

解答例

解答例：数学

問1 関数を含む基本的な方程式が解けることを確認する問題

$$(1) x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x-1)(x-2)(x-3) = 0 \text{ より,}$$

$x = 1, 2, 3$ が得られる。

$$(2) \sin 3x + \sin x = 4 \sin x - 4 \sin^3 x = 4 \sin x (1 - \sin^2 x) = 4 \sin x \cos^2 x$$

$\sin x = 0, \cos x = 0$ より, $0 \leq x < 2\pi$ の範囲 (定義域) では,

$$x = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2} \text{ が解となる。}$$

$$\text{別解: } \sin 3x + \sin x = 2 \sin \frac{3x+x}{2} \cos \frac{3x-x}{2} = 2 \sin 2x \cos x \text{ を用いてもよい。}$$

$$(3) \log_3(x^2 + 2x - 3) + \log_{\frac{1}{3}}(x - 1) = 2$$

$$\log_3(x^2 + 2x - 3) - \log_3(x - 1) = 2$$

$$\log_3(x + 3) = 2$$

$$x + 3 = 9$$

よって, $x = 6$ を得る。

問2 放物線と直線の交点と囲まれた領域の面積, 合成関数の微分の計算を問う問題

$$(1) x^2 - 2ax - 1 = 0$$

よって求める x 座標は $x = a \pm \sqrt{a^2 + 1}$ ($\equiv \alpha, \beta$)

$$(2) S = \int_{\alpha}^{\beta} \{(2ax + 1) - x^2\} dx = \left[ax^2 + x - \frac{x^3}{3} \right]_{\alpha}^{\beta} = \frac{4}{3}(\sqrt{a^2 + 1})^3$$

$$(\alpha + \beta = 2a, \alpha - \beta = -2\sqrt{a^2 + 1}, \alpha\beta = -1)$$

別解: $t = x - a$ と変数変換。 $\gamma = \sqrt{a^2 + 1}$ とおく。

$$S = \int_{-\gamma}^{\gamma} (-t^2 + a^2 + 1) dt = \left[-\frac{1}{3}t^3 + (a^2 + 1)t \right]_{-\gamma}^{\gamma} = -\frac{1}{3} \{\gamma^3 - (-\gamma)^3\} + \gamma^2 (\gamma - (-\gamma)) \\ = \frac{4}{3}\gamma^3 = \frac{4}{3}(\sqrt{a^2 + 1})^3$$

$$(3) S' = \frac{4}{3} \cdot 3(a^2 + 1)(\sqrt{a^2 + 1})' = 4(a^2 + 1) \cdot \frac{1}{2}(a^2 + 1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2a = 4a\sqrt{a^2 + 1} \text{ を得る。}$$

問3 ベクトルを用いた基本的な計算を試す問題

点 $C(1, 3, 10)$ の空間ベクトルを $\overrightarrow{OC}$, 求める座標の空間ベクトルを $\overrightarrow{OD}$ とするとき,

$$\overrightarrow{OD} = s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s + 2t \\ s + t \\ t \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} s + 2t - 1 \\ s + t - 3 \\ t - 10 \end{pmatrix}$$

$\overrightarrow{CD} \perp \overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{CD} \perp \overrightarrow{OB}$ なので,

$$\begin{pmatrix} s + 2t - 1 \\ s + t - 3 \\ t - 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0, \quad \begin{pmatrix} s + 2t - 1 \\ s + t - 3 \\ t - 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \text{ より, } s = -7, t = 6$$

$$\overrightarrow{OD} = \begin{pmatrix} s + 2t \\ s + t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

これより求める座標は, (5, -1, 6)

問 4 数列の一般項を求める基本的問題

$$a_{n+1} - 5 = 3(a_n - 5)$$

$$a_1 - 5 = 2$$

初項 2, 公比 3 の等比数列。

$$a_n - 5 = 2 \cdot 3^{n-1}$$

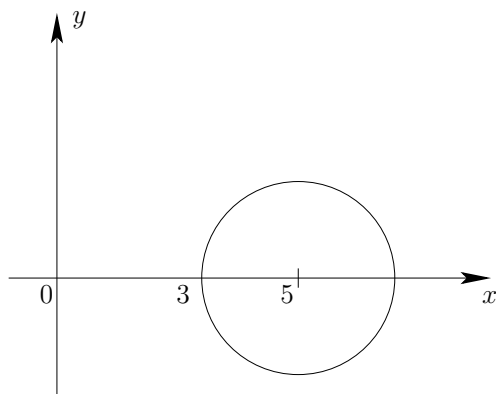
よって, 数列の一般項は $a_n = 2 \cdot 3^{n-1} + 5$ と表される。

問 5 アポロニウスの円を扱う基礎的な問題

$$(x - 1)^2 + y^2 = 4\{(x - 4)^2 + y^2\}$$

$$(x - 5)^2 + y^2 = 4 \text{ (点 P の満たす方程式)}$$

中心 (5, 0), 半径 2 の円。軌跡は下図参照。



問 6 複素数の基本的性質を問う問題

$$\begin{aligned}(\sqrt{3} + i)^{10} &= 2^{10} \left(\frac{\sqrt{3} + i}{2} \right)^{10} = 2^{10} \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)^{10} \\ &= 2^{10} \left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right) \text{ と表されるので, それぞれ以下の値を得る。}\end{aligned}$$

絶対値 : 1024, 偏角 : $\frac{5\pi}{3}$, 実部 : 512, 虚部 : $-512\sqrt{3}$

問 7 積分方程式について理解しているかを問う問題

定積分は定数となるから $\int_0^\pi f(t) \sin t \, dt = a$ とおくと, $f(x) = x + a$ となる。よって,

$$\begin{aligned}\int_0^\pi f(t) \sin t \, dt &= \int_0^\pi (t + a) \sin t \, dt \\ &= [(t + a)(-\cos t)]_0^\pi - \int_0^\pi (t + a)'(-\cos t) \, dt \\ &= \pi + 2a + [\sin t]_0^\pi = \pi + 2a\end{aligned}$$

ゆえに, $\pi + 2a = a$ より, $a = -\pi$

従って, $f(x) = x - \pi$ を得る。

平成30年度

千葉大学先進科学プログラム入学者選考課題

課題論述

課題I, II

(9:00-15:00)

H30
—
課題

注意事項

1. 問題すべてに解答してください。
2. 携帯電話, スマートフォンの電源を必ず切ってください。

[I]

打ち上げ花火の模型として、球状に固めた火薬の表面に多数の質点を均等に貼り付けた物体を考える。図1（左）のように、この物体を地表面から鉛直上方に打ち上げた。その後、図1（右）のように、物体が最高点（高度 h ）に達したときに、火薬を爆発させたところ、すべての質点は同時に初速度の大きさ v_0 で等方的に放射された。以下、質点の質量を m とし、質点の運動を考えよう。重力加速度の大きさを g とし、数値が必要な場合は、 $g = 10 \text{ m/s}^2$ を用いなさい。ただし、物体の大きさは無視できるものとする。

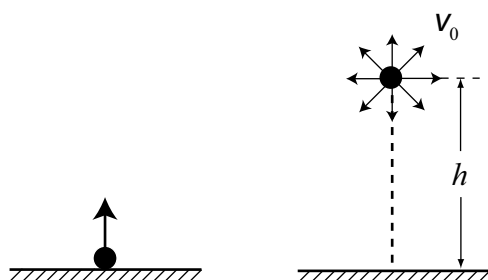


図1: (左) 地表面から打ち上げられる物体, (右) 等方的に放射される質点達

問1 物体が高度 h の最高点に達した時刻を $t = 0$ とし、それ以後の質点の運動を考えよう。個々の質点は時刻 t の経過とともにそれぞれ異なる軌道を3次元空間内に描くが、すべての質点をまとめて考えると、質点達はある時刻 t では、ある曲面上に存在する。以下では、その曲面を時刻 t での質点達の到達曲面と呼ぶことにする。ただし、観測は質点達から十分離れた場所で、質点達が地上に到達しない範囲で行うものとする。

- (a) 時刻 $t = 0$ に高度 h から初速度ゼロで自由落下する観測者が、放射された質点達の運動を観測するとどう見えるかを式を用いずに説明しなさい。また、この観測者から見ると、時刻 t での到達曲面はどのような曲面になるか答えなさい。
- (b) 前問の自由落下する観測者から見た、時刻 $t = 1, 2, 3, 4 \text{ s}$ での質点達の到達曲面を $v_0 = 15 \text{ m/s}$ として、ひとつの図に描きなさい。それぞれの時刻での到達曲面を特徴づけるのに必要な数値も書き込むこと。ただし、図はひとつの鉛直面内で描けばよい（図は3次的に描く必要は無い。そのため、到達曲面は曲線となる）。
- (c) 今度は、地表面に止まっている観測者が、放射された質点達の運動を観測するとどう見えるかを式を用いずに説明しなさい。その結果、時刻 t での到達曲面

はどのような曲面になるか答えなさい。

- (d) 前問の地表面に止まっている観測者から見た、時刻 $t = 1, 2, 3, 4$ s での質点達の到達曲面をひとつの図に描きなさい。問1(b)と同じただし書きに従うこと。

問2 次に、問1の問題を質点の運動方程式を用いて考えよう。図2(左)のように、地表面の打ち上げ地点を原点 O とし、鉛直上方に z 軸を、それと直交する方向に x 軸と y 軸を持つ、地表面に固定した3次元直交座標系 (x, y, z) を設定する。さらに、図2(右)のように、時刻 $t = 0$ に高度 h から初速度ゼロで自由落下する座標系 (x', y', z') を設定する。ただし、 x', y', z' の軸は、それぞれ x, y, z の軸に平行とする。

以下では、時刻 t での質点の位置座標を、座標系 (x, y, z) では $(x(t), y(t), z(t))$ 、座標系 (x', y', z') では $(x'(t), y'(t), z'(t))$ と書く。このとき、速度 $\vec{v}$ の x 成分 v_x は $v_x(t) = \frac{dx(t)}{dt}$ 、加速度の x 成分は $\frac{dv_x(t)}{dt} = \frac{d^2x(t)}{dt^2}$ 、他の成分も同様に表してよい。

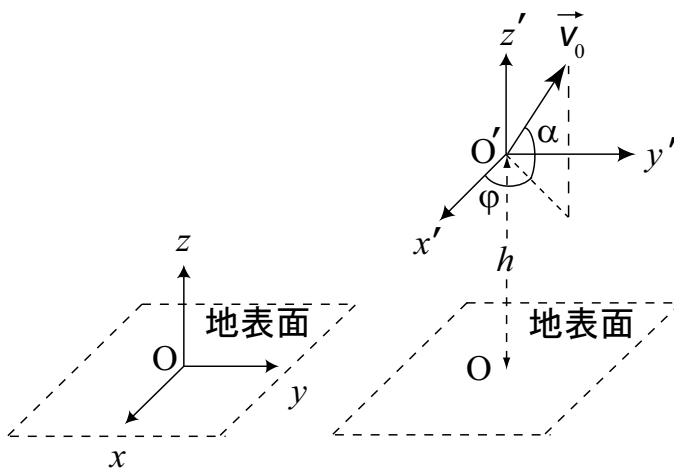


図2: (左) 地表面に固定された座標系 (x, y, z) , (右) 自由落下する座標系 (x', y', z')

- (a) ひとつの質点の運動方程式を、高度 h から自由落下する座標系 (x', y', z') と地表面に固定された座標系 (x, y, z) の両方で書き下しなさい。
- (b) ある時刻 t での質点の位置座標値 $(x(t), y(t), z(t))$ は、他の座標値 $(x'(t), y'(t), z'(t))$ を用いて書ける。両者の関係を式で表し、 (x', y', z') 系での運動方程式から (x, y, z) 系での運動方程式が導かれることを示しなさい。
- (c) 質点の初速度ベクトル $\vec{v}_0$ の向きは、図2(右)のように水平面から測った角度(仰角)を α 、 $\vec{v}_0$ の水平面への射影が x 軸となす角度を φ として指定できる。このとき初速度ベクトル $\vec{v}_0$ の x, y, z 成分をそれぞれ v_0, α, φ を用いて表しなさい。

- (d) 時刻 t でのひとつの質点の位置座標 $(x(t), y(t), z(t))$ を時刻 t の関数として表しなさい。
- (e) 座標系 (x, y, z) において、時刻 t での質点達の到達曲面を式で求めなさい。
- (f) 座標系 (x, y, z) において、ひとつの質点の軌道の式 (z を x, y の関数として表した、時刻 t を含まない式) を求めなさい。
- (g) 3次元空間 (x, y, z) において、質点達が到達できる領域は、高度 h と初速度の大きさ v_0 で決まる。この領域を式で表し、それはどのような領域か説明しなさい。特に、地表面での到達可能範囲を2次元面 (x, y) 内で求めなさい。

問3 最後に、質点には重力だけでなく、大気による抵抗力も働くものとする。抵抗力が質点の速度 $\vec{v}$ に比例すると仮定すると、その x, y, z 成分は速度 $\vec{v}$ の x, y, z 成分 v_x, v_y, v_z を用いて

$$-kmv_x, \quad -kmv_y, \quad -kmv_z \quad (1)$$

と書ける。ここで比例係数の大きさを km とした ($k > 0$)。

- (a) まず、予備的考察を行おう。抵抗力のみが働く1次元の運動の運動方程式は、質点の位置座標 $X(t)$ の代わりに、速度 $V(t)$ とその時間微分 $\frac{dV(t)}{dt}$ を用いて

$$m \frac{dV(t)}{dt} = -kmV(t) \implies \frac{dV(t)}{dt} = -kV(t) \quad (2)$$

と書ける。よって、この方程式の解 $V(t)$ は、微分した結果が元の関数に比例するような関数、つまり指数関数 $V(t) = V_0 e^{-kt}$ である。ここで、 V_0 は $t = 0$ での V の値、 $V_0 = V(0)$ である。位置座標 $X(t)$ は、 t で微分したときに $V(t)$ となるような t の関数である。これらを考慮して、運動方程式 (2) の解としての位置座標 $X(t)$ を求めなさい。ただし、 $t = 0$ では $X(t) = 0$ とする。また、 $X(t)$ を時刻 t の関数として、そのグラフを描きなさい。ただし、 $V_0 > 0$ とする。

- (b) 本題に戻ろう。地表面に固定された座標系における質点の運動方程式を、質点の位置座標を用いず、速度とその時間微分を用いて書き下しなさい。
- (c) さらに、運動方程式が、重力を含まず、抵抗力のみを含むような新しい座標系 $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ に移ることを考えよう。そのような $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ から (x, y, z) への変換式を求めなさい。ただし、時刻 $t = 0$ で $\tilde{x} = \tilde{y} = \tilde{z} = 0$ とする。
- (d) 時刻 t でのひとつの質点の位置座標 $(x(t), y(t), z(t))$ を時刻 t の関数として表しなさい。ただし、 v_0, α, φ は、問2(c)と同じとする。

- (e) 時刻 t での質点達の到達曲面を座標系 (x, y, z) において式で求め、それはどういう曲面であるか説明しなさい。
- (f) 大気の抵抗を考慮した場合は、質点達の到達可能領域はどうなるか答えなさい。特に、 h が非常に大きいときの、地表面での到達可能範囲を 2 次元面 (x, y) 内で求めなさい。ただし、指数関数 e^x は x が小さいときには、 $e^x \doteq 1 + x + \frac{1}{2}x^2$ と近似できることを用いてよい。

[II]

問1 光はある物質から別の物質へと進むとき、反射や屈折を起こす。このとき、屈折した光が進む方向(屈折角)は物質の屈折率によって決まる。物質のもつ屈折率のわずかな違いが身の回りの物理現象として現れる例として、逃げ水があげられる。晴れた暑い日には、アスファルトによって舗装された道路の遠くに水があるように見えるが、いくら近づいてもたどり着くことはできない(図1)。これは水ではなく、道路に空の景色が映っているからである。この現象がどのようにして生じるのかについて考えよう。

実際の試験では、アスファルトによって舗装された道路の遠くに水があるように見える逃げ水の写真が掲載されていましたが、公開版の試験問題では削除しました。写真はインターネット等で検索してください。キーワードとして「逃げ水」で検索すると、動画、写真や解説を多くのホームページで確認することができます。

図1

アスファルト近くの空気は熱せられやすく、数 cm 上の空気と 10°C 以上温度が違ふことはよく起こる。アスファルト近くに高い温度 T_H の空気層 H, その上に T_H よりも低い温度 T_L の空気層 L が存在しているとする。2つの空気層では温度が異なるため、屈折率はそれぞれ n_H , n_L と異なる。2つの空気層内部では温度がそれぞれ一定に保たれており、圧力は2つの層で等しいものとする。

- (1) 光が空気層 L から入射し、空気層 H で屈折することを考える。図2に示すように入射角を θ , 屈折角を ϕ とし、この2つの間に成り立つ関係式を求めなさい。

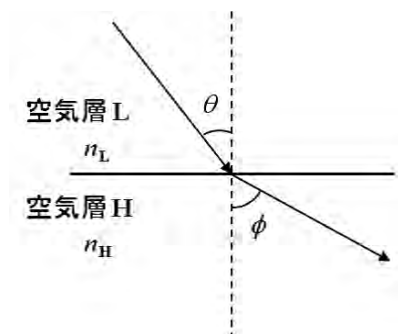


図 2

- (2) 入射角 θ を大きくしていくと、 θ が臨界角 θ_c 以上で全反射が起こる。これにより、アスファルト上に水が存在するように見える。 n_H と n_L の差が小さい場合には、臨界角は $\frac{\pi}{2}$ に近い角度になる。角 β_c を $\beta_c = \frac{\pi}{2} - \theta_c$ と定義すると、 β_c は非常に小さいため、 $\cos \beta_c \approx 1 - \frac{\beta_c^2}{2}$ と近似することができる。このとき、 β_c を n_H , n_L を用いて表しなさい。

- (3) 気体の場合、室温程度においては屈折率 n と圧力 p , 絶対温度 T の間には比例定数 α ($\alpha > 0$) を用いて

$$n - 1 = \alpha \frac{p}{T} \quad (1)$$

の関係が近似的に成り立つことが知られている。角 β_c を T_H , T_L , n_L を用いて表しなさい。

- (4) $T_H = 323 \text{ K}$, $T_L = 305 \text{ K}$, $n_L = 1.000265$ の場合に、逃げ水が歩行者からどれだけ離れた位置に見えるかを答えなさい。ただし、歩行者の目線の高さは地面から 1.5 m とし、空気層 H の厚さは十分に薄く無視できるものとする。

問2 気体の屈折率 n は、ジャマン干渉計を用いて測定することができる。ジャマン干渉計は図3に示すように容器 A_1 , A_2 と2つの平面鏡 P , Q からなる。平面鏡 P , Q (厚さ d) は屈折率 n_P をもつ材質でできており、裏面では光を完全に反射する。図3のように、光源 S から出た単色光 (波長 λ) が、平面鏡 P に入射角度 $\frac{\pi}{4}$ で入射し、平面鏡の表面で反射する光と裏面で反射する光の2つに分かれた。分かれた光はそれぞれ長さ ℓ の容器 A_1 , A_2 を通り、平面鏡 P に平行に設置されている平面鏡 Q に入射した。光が容器に出入りする際の反射や屈折は無視できる。入射した2つの光を平面鏡 Q により重ね合わせ、その先におかれたスクリーン上の点 O で光の強度を観察した。実験に用いた容器の体積は温度などによって変化しないものとする。また、容器には栓がついており、必要に応じて開閉できるようになっているものとする。以下の問いに答えなさい。ただし、真空中における屈折率は1とし、実験は真空中で行われているものとする。

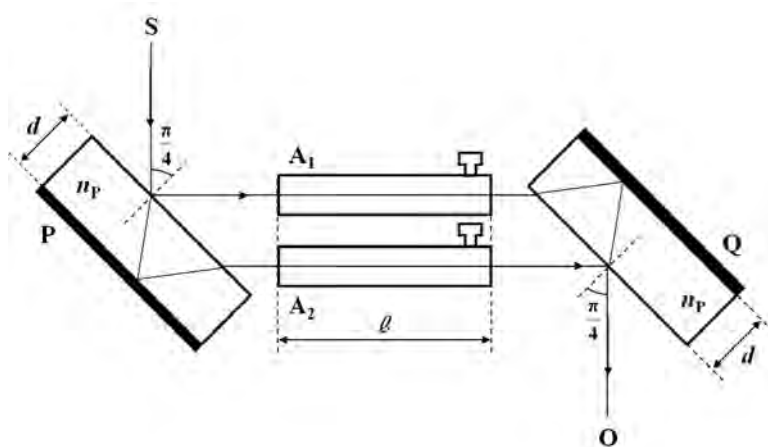


図3

- (1) 平面鏡 P の裏面で反射する光の平面鏡 P 内での光路長 (光学距離) を求めなさい。

はじめに、2つの容器の内部を十分に真空に引いた。次に、内部の温度を絶対温度 T に保ちつつ、容器 A_2 にゆっくりと気体を入れ始めた。この気体は理想気体とみなせるものとし、その屈折率は前ページの式 (1) に従うものとする。

- (2) 点 O において観察される光の強度はどのように変化するか。容器 A_2 に気体を入れ始める前と比較して答えなさい。
- (3) 容器 A_2 に気体を入れ続け、点 O における明るさが N 回目の極大となったとき、

容器 A_2 の圧力は p_0 に達した。温度 T 、圧力 p_0 における気体の屈折率 n_0 を N を用いて表しなさい。

- (4) 単色光として波長 6.33×10^{-7} m、長さ $\ell = 0.15$ m の容器を用いて実験を行った。容器 A_1 と A_2 の内部を同じ気体 (圧力 1.010×10^5 Pa) で満たした後、2つの容器の温度を 299 K に固定したまま、容器 A_1 のみ栓を開放し気体を徐々に放出した。点 O における明るさが75回目の極大となったとき、容器 A_1 の圧力は 6.99×10^4 Pa であった。このとき、圧力 1.010×10^5 Pa、温度 273 K における気体の屈折率を求めなさい。

容器 A_2 の栓を閉め、内部の温度を上昇させた。このとき、点 O で観察される光の明るさに変化は見られなかった。

- (5) 気体の屈折率 n と単位体積当たりの気体分子の個数 (個数密度) ρ の間にどのような関係式が成り立つか求めなさい。必要であればボルツマン定数 k_B を用いてよい。

問3 ここでは、気体の屈折率の起源について考えよう。

最初に屈折率 n と誘電率 ε の関係を見てみよう。真空中での光の速さ c は、真空中の誘電率 ε_0 および真空中の透磁率 μ_0 を用いて

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \quad (2)$$

と表せる。気体中での光の速さ v は、気体の誘電率 ε 、気体の透磁率 μ を用いて

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \mu}} \quad (3)$$

と表せる。一方、気体中での光の速さ v は気体の屈折率 n を用いて

$$v = \frac{c}{n} \quad (4)$$

と記述することができることから、気体の屈折率 n と誘電率 ε との間には

$$n^2 = \frac{\varepsilon \mu}{\varepsilon_0 \mu_0} \quad (5)$$

が成り立つ。可視光については $\mu \equiv \mu_0$ とみなすことができるため、

$$n^2 = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \quad (6)$$

と求められる。式 (6) より気体の屈折率 n は誘電率 ε によって決まることがわかる。

次に気体分子の中で電子が運動することを考える。光は電場と磁場が変動しながら空間を伝わる電磁波である。角振動数が ω のとき、時刻 t での光の電場 (電界) の強さ E は

$$E(t) = E_0 \cos \omega t \quad (7)$$

と表すことができる。この電場による力を考え、以下の問いに答えなさい。

- (1) 角振動数 ω で振動する光が気体に入射すると、気体分子中の電子 (質量 m 、電荷 $-e$ ($e > 0$)) には式 (7) で表せる電場から受ける力と、分子の中心からの距離 (変位) x に比例した引力 $-kx$ がはたらく。ただし、 k はばね定数で一定であり、 $k > m\omega^2$ である。これら2つの力を考えて、気体分子中の電子の運動方程式を書き下しなさい。ただし、電子の運動は振動電場の方向のみに限られているものとし、電子の加速度、速度、変位はそれぞれ $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{dx}{dt}$, x で表せるものとする。

- (2) 電子も入射した光と同じ角振動数 ω で振動すると考えられるので、 $x(t) = x_0 \cos \omega t$ と書き表せる。 x_0 を求めなさい。
- (3) 電子が変位する ($x \neq 0$) と、分子内部で正と負の電荷が分離する。このとき $-ex$ を、電気双極子モーメントと呼ぶ。個数密度が ρ であるとき、時刻 t において誘起される単位体積当たりの電気双極子モーメント (分極) P を求めなさい。
- (4) 気体の誘電率 ε は、電場 E とそれによって誘起される単位体積当たりの電気双極子モーメント P を結びつける物理量で、

$$P = (\varepsilon - \varepsilon_0)E \quad (8)$$

と定義される。 n と気体分子の個数密度 ρ との間に成立する関係式を求めなさい。ただし、 n が 1 に非常に近いため $n - 1 = \frac{n^2 - 1}{n + 1} \doteq \frac{n^2 - 1}{2}$ と近似できるものとする。また、求めた関係式より、問 1 の式 (1) における α を m , e , k , ω , ε_0 , k_B を用いて表しなさい。

平成 30 年度

千葉大学先進科学プログラム入学者選考課題

H30
解答例

課題 I

解答例

解答例 [I]

出題意図

打ち上げ花火を題材にして、質点の運動を問うことで、力学の基礎事項（力が働かない場合の慣性の法則と等速度運動、一様な力が働く場合の等加速度運動、抵抗力の働く場合の終端速度の存在等）を物理として理解しているか、及び、それらを数式を用いて表現できるか否かを確認する。

問1では、重力だけが働く場合の打ち上げ花火の運動を、数式を用いずに考察し、問題の本質的な理解を正確な文章と図で伝えられるかという表現能力を問う。

問2では、問1と同じ条件の下での花火の運動を、運動方程式を用いて考えることで、数理的考察能力および数学の運用能力を問う。

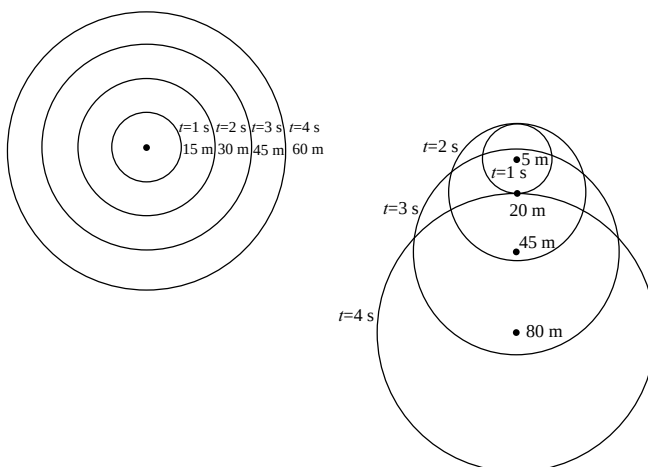
問3では、重力に加え、大気の抵抗が加わったより現実的な場合に、花火の運動はどのように変化するかを、前問の結果を踏まえて、総合的に考察できるかを判定する。

問2、問3では、運動方程式を微分方程式（微分を含む方程式）として認識はするが、それを数学の問題として直接解くことはせず、それに代わって、重力が消えるような別の座標系に移れば、問題を簡単化できるという物理的設定で考察してもらう。一様な（位置や速度に依存しない）重力と速度に比例する抵抗力とはかなり異質な力であることが認識できる。

これは、微分方程式の数学的解法に関する知識を要求せずに、重力があるために生じる非斉次項を持つ線形微分方程式（運動方程式）の一般解が、重力が消去された斉次の線形微分方程式の一般解に非斉次の線型方程式の特解を足した形で与えられることを物理的視点から捉えたことになっていると考える。

問1 (a) 解答例：鉛直下向きの重力が鉛直上向きの慣性力と釣り合うため（等価原理）、自由落下する観測者は重力を感じないので、打ち出された質点には何も力が働いていないように見える。よって、慣性の法則（Newtonの運動第1法則）により、質点達は初速 v_0 で等速度直線運動をする。従って、時刻 t での質点達の到達曲面は放射点を中心とする半径 $v_0 t$ の球面である。

(b) 解答例：それぞれ、高度 h の点を中心とする半径 $v_0 t = 15, 30, 45, 60$ m の同心球面となる。



解答例の図: 問 1 (b) 拡大する同心球面, 問 1 (d) 自由落下しながら拡大する球面

(c) 解答例: どの質点も各 t 毎の到達曲面は球面であるが, 自由落下の法則 (等加速度運動の式) により, 同じ距離 $\frac{1}{2}gt^2$ だけ落下するように見えるため, 到達曲面は, 問 1(a) で求めた半径 v_0t の球面と自由落下 $\frac{1}{2}gt^2$ の合成となる。

(d) 解答例: 自由落下の法則により, 時刻 $t = 1, 2, 3, 4$ 秒には, どの質点も距離 $\frac{1}{2}gt^2 = 5, 20, 45, 80$ m だけそれぞれ落下する。これらの落下点を中心とする半径 $v_0t = 15, 30, 45, 60$ m の球面をそれぞれ描けばよい。

問 2 (a) 解答例: 自由落下する座標系 (x', y', z') では, 重力と慣性力の合力がゼロとなるので

$$m \frac{d^2 x'}{dt^2} = 0, \quad m \frac{d^2 y'}{dt^2} = 0, \quad m \frac{d^2 z'}{dt^2} = 0. \quad (1)$$

座標系 (x, y, z) では重力が働くので,

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = 0, \quad m \frac{d^2 y}{dt^2} = 0, \quad m \frac{d^2 z}{dt^2} = -mg. \quad (2)$$

(b) 解答例: 変換式を

$$x(t) = x'(t), \quad y(t) = y'(t), \quad z(t) = z'(t) - \frac{1}{2}gt^2 + h, \quad (3)$$

とすると, 速度は,

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{dx'(t)}{dt}, \quad \frac{dy(t)}{dt} = \frac{dy'(t)}{dt}, \quad \frac{dz(t)}{dt} = \frac{dz'(t)}{dt} - gt, \quad (4)$$

加速度は,

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = \frac{d^2x'(t)}{dt^2}, \quad \frac{d^2y(t)}{dt^2} = \frac{d^2y'(t)}{dt^2}, \quad \frac{d^2z(t)}{dt^2} = \frac{d^2z'(t)}{dt^2} - g, \quad (5)$$

よって, 運動方程式は重力を含まない (1) から (2) が得られる。

[参考: $t = 0$ での初期条件は以下のように満たされる。]

$$x(0) = x'(0) = 0, \quad y(0) = y'(0) = 0, \quad z(0) = z'(0) + h = h. \quad (6)$$

$$v'_x(0) = v_x(0) = v_0 \cos \alpha \cos \varphi, \quad v'_y(0) = v_y(0) = v_0 \cos \alpha \sin \varphi,$$

$$v'_z(0) = v_z(0) = v_0 \sin \alpha. \quad (7)$$

(c) 解答例: $t = 0$ で速度ベクトルは両座標系で一致するので,

$$v_x^0 = v_0 \cos \alpha \cos \varphi, \quad v_y^0 = v_0 \cos \alpha \sin \varphi, \quad v_z^0 = v_0 \sin \alpha. \quad (8)$$

(d) 解答例: 自由落下する観測者の座標系 (x', y', z') では重力は働かないので, 質点の運動は等速直線運動であり, これが運動方程式の解である。位置は,

$$x'(t) = v_0 t \cos \alpha \cos \varphi, \quad y'(t) = v_0 t \cos \alpha \sin \varphi, \quad z'(t) = v_0 t \sin \alpha. \quad (9)$$

これらが時刻 $t = 0$ での全ての初期条件を満たし, かつ, 運動方程式の解になっていることは簡単に確かめられる。よって, (3) の関係式より,

$$x(t) = v_0 t \cos \alpha \cos \varphi, \quad y(t) = v_0 t \cos \alpha \sin \varphi, \quad z(t) = v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2}gt^2 + h. \quad (10)$$

(e) 解答例: 角度変数を消去していく。まず, φ を消去する,

$$x^2 + y^2 = v_0^2 t^2 \cos^2 \alpha, \quad \left(z + \frac{1}{2}gt^2 - h \right)^2 = v_0^2 t^2 \sin^2 \alpha. \quad (11)$$

次に, α を消去する,

$$x^2 + y^2 + \left(z + \frac{1}{2}gt^2 - h \right)^2 = (v_0 t)^2. \quad (12)$$

この式は, 中心が $(0, 0, h - \frac{1}{2}gt^2)$ で半径が $v_0 t$ の球面をあらわす。質点の集合は, 高度 h から鉛直下向きに $-\frac{1}{2}gt^2$ だけ自由落下した半径 $v_0 t$ の球面を描く。

(f) 解答例: 式 (10) の x と y から,

$$t = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{v_0 \cos \alpha}. \quad (13)$$

これを式 (10) の z に代入すると、軌道の式が得られる。

$$z = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \sqrt{x^2 + y^2} - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} (x^2 + y^2) + h. \quad (14)$$

(g) 解答例：式 (12) を t^2 の 2 次方程式と見ると、

$$\frac{1}{4} g^2 (t^2)^2 + [(z - h)g - v_0^2] t^2 + (z - h)^2 + x^2 + y^2 = 0. \quad (15)$$

t^2 が実数解を持つのは、その判別式が非負のとき

$$[(z - h)g - v_0^2]^2 - g^2[(z - h)^2 + x^2 + y^2] \geq 0. \quad (16)$$

これを整理すると $z - h$ の 2 次の項はキャンセルして、

$$z \leq h + \frac{v_0^2}{2g} - \frac{g}{2v_0^2} (x^2 + y^2). \quad (17)$$

よって、質点の到達可能領域は、上に凸な回転放物面（上に凸な放物線をその対称軸 z 軸の周りに回転させて得られる面）とその内部となる。この放物線は鉛直投射の最高到達高度 $h + \frac{v_0^2}{2g}$ を頂点に持つ。高度 h の水平面では、斜方投射の最大水平到達距離 $\frac{v_0^2}{g}$ で特徴付けられる。[これは、自由落下しながら拡大する球面の包絡面である。]

地表面との交点を表す領域は、 $z = 0$ とおいて求められる、以下の円内である。

$$0 \leq x^2 + y^2 \leq \frac{2v_0^2}{g} \left(h + \frac{v_0^2}{2g} \right). \quad (18)$$

解答例：別解：軌道の式 (14) の角度依存性を $\tan \alpha$ で統一して書くと、

$$z = \tan \alpha \sqrt{x^2 + y^2} - \frac{g}{2v_0^2} (\tan^2 \alpha + 1) (x^2 + y^2) + h. \quad (19)$$

式 (19) を $\tan \alpha$ の 2 次式と見ると、

$$\tan^2 \alpha - \frac{2v_0^2}{g\sqrt{x^2 + y^2}} \tan \alpha + \frac{2v_0^2}{g(x^2 + y^2)} (z - h) + 1 = 0. \quad (20)$$

実数解を持つのは、その判別式が非負のときで、(17) と一致する。

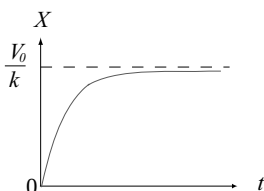
$$\frac{v_0^4}{g^2(x^2 + y^2)} - \frac{2v_0^2(z - h)}{g(x^2 + y^2)} - 1 \geq 0 \implies z \leq h + \frac{v_0^2}{2g} - \frac{g}{2v_0^2} (x^2 + y^2). \quad (21)$$

問 3 (a) 解答例： $V(t) = V_0 e^{-kt}$ を t で積分し、 $t = 0$ で $X = 0$ となるように積分定数を

選ぶと

$$X(t) = \frac{V_0}{k}(1 - e^{-kt}). \quad (22)$$

グラフは $t = 0$ で $X = 0$ から単調増加して、 $t \rightarrow \infty$ で $X \rightarrow \frac{V_0}{k}$ に漸近する。上限値 $\frac{V_0}{k}$ があることに注意。



解答例の図: 問3 (a) 抵抗力だけが働く運動

(b) 解答例:

$$m \frac{dv_x}{dt} = -kmv_x, \quad m \frac{dv_y}{dt} = -kmv_y, \quad m \frac{dv_z}{dt} = -kmv_z - mg. \quad (23)$$

(c) 解答例: 変換式を

$$x = \tilde{x}, \quad y = \tilde{y}, \quad z = \tilde{z} - \frac{g}{k}t + h, \quad (24)$$

とすると、以下のように重力が消去されることがわかる。

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{d\tilde{x}}{dt}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{d\tilde{y}}{dt}, \quad \frac{dz}{dt} = \frac{d\tilde{z}}{dt} - \frac{g}{k} \implies \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2\tilde{x}}{dt^2}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2\tilde{y}}{dt^2}, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{d^2\tilde{z}}{dt^2}, \\ \implies m \frac{d\tilde{v}_x}{dt} &= -km\tilde{v}_x, \quad m \frac{d\tilde{v}_y}{dt} = -km\tilde{v}_y, \quad m \frac{d\tilde{v}_z}{dt} = -km\tilde{v}_z. \end{aligned} \quad (25)$$

(d) 解答例: (a) と (c) を用いると

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{k}v_0 \cos \alpha \cos \varphi (1 - e^{-kt}), \quad y(t) = \frac{1}{k}v_0 \cos \alpha \sin \varphi (1 - e^{-kt}), \\ z(t) &= \frac{1}{k} \left(v_0 \sin \alpha + \frac{g}{k} \right) (1 - e^{-kt}) - \frac{g}{k}t + h, \\ &\rightarrow z(t) + \frac{g}{k}t - \frac{g}{k^2}(1 - e^{-kt}) - h = \frac{v_0}{k} \sin \alpha (1 - e^{-kt}). \end{aligned} \quad (26)$$

[参考:これは、 $t = 0$ での初期条件 $x(0) = 0, y(0) = 0, z(0) = h$, を満たし、か

つ、 $v_x(0) = v_0 \cos \alpha \cos \varphi, v_y(0) = v_0 \cos \alpha \sin \varphi, v_z(0) = v_0 \sin \alpha$, を満たす。]

$$\begin{aligned} v_x(t) &= v_0 \cos \alpha \cos \varphi e^{-kt}, & v_y(t) &= v_0 \cos \alpha \sin \varphi e^{-kt}, \\ v_z(t) &= \left(v_0 \sin \alpha + \frac{g}{k} \right) e^{-kt} - \frac{g}{k}. \end{aligned} \quad (27)$$

(e) 解答例：角度変数を消去していく。まず、 φ を消去する、

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= \frac{v_0^2}{k^2} (1 - e^{-kt})^2 \cos^2 \alpha, \\ \left[z + \frac{g}{k} t - \frac{g}{k^2} (1 - e^{-kt}) - h \right]^2 &= \frac{v_0^2}{k^2} (1 - e^{-kt})^2 \sin^2 \alpha. \end{aligned} \quad (28)$$

次に、 α を消去する、

$$x^2 + y^2 + \left[z + \frac{g}{k} t - \frac{g}{k^2} (1 - e^{-kt}) - h \right]^2 = \left[\frac{v_0}{k} (1 - e^{-kt}) \right]^2. \quad (29)$$

この式は、中心が $(0, 0, h - \frac{g}{k} t + \frac{g}{k^2} (1 - e^{-kt}))$ で半径が $\frac{v_0}{k} (1 - e^{-kt})$ の球面をあらわす。よって、大気の抵抗が働いても z 軸上を落下する（自由落下では無いが）球面になる。球は十分時間が経過すると終端速度 $\frac{g}{k}$ で落下する。

(f) 解答例： t が小さいときは $e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2$ を用いて $1 - e^{-kt} = kt - \frac{1}{2}k^2t^2$ を (29) に代入してみればわかるように、到達可能領域の境界面は、大気の抵抗が無い場合の回転放物面に近い。

t が大きくなると、到達可能領域の境界面は回転放物面からずれて半径 $\frac{v_0}{k}$ の円筒面に近づいていく。なぜなら、関数 $1 - e^{-kt}$ は時間の経過に伴って 0 から 1 の値をとるので、球の半径は $\frac{v_0}{k}$ より大きくなることはないから。

よって、地表面との交点は、十分時間が経過すると

$$0 \leq x^2 + y^2 \leq \left(\frac{v_0}{k} \right)^2. \quad (30)$$

式 (29) は、もはや t^2 の 2 次方程式では無いので以前の議論は使えない。[しかし、到達可能領域は、 z 軸上を落下する球面の包絡面であることにはかわりはない。]

[参考:問 2(g)] パラメータ α を持つ一群の軌道の包絡線は、軌道の方程式、

$$F(x, y, z, \alpha) := z - \tan \alpha \sqrt{x^2 + y^2} + \frac{g}{2v_0^2} (\tan^2 \alpha + 1)(x^2 + y^2) - h = 0, \quad (31)$$

とそのパラメータ微分

$$\frac{\partial F(x, y, z, \alpha)}{\partial \alpha} = -\sec^2 \alpha \sqrt{x^2 + y^2} + \frac{g}{v_0^2} \sec^2 \alpha \tan \alpha (x^2 + y^2) = 0, \quad (32)$$

から α を消去してえられる。実際、2 番目の式から

$$\tan \alpha = \frac{v_0^2}{g\sqrt{x^2 + y^2}}. \quad (33)$$

これを 1 番目の式に代入すると、次式が得られる。

$$z = h + \frac{v_0^2}{2g} - \frac{g}{2v_0^2}(x^2 + y^2). \quad (34)$$

[参考:問 3(d)] 重力と抵抗力が働く場合の運動方程式は、重力を非斉次項として持つ線形常微分方程式であるから、その一般解は、重力をゼロとして抵抗力のみの場合の斉次方程式の一般解（初期条件で決まる減衰運動）と抵抗力と重力を含む非斉次方程式の特解（終端速度での等速度運動）の和となる。

重力のみが働く場合、その一般解は、斉次方程式、つまり、全く力が働かない場合の一般解（初期条件で決まる等速直線運動）と重力による非斉次方程式の特解（自由落下運動、等加速度運動）の和として与えられるので、問 1 は正しい。

これら二つの場合の違いが理解できているか。(24) の座標変換は、特解部分を変換の一部に持ち、残りが斉次方程式の一般解に対応するとわかる。]

[注意：問 3(d)] 重力と抵抗力は力としては加え合わせられるが、それぞれの力による運動方程式を別々に解いた後で、それらの解としての位置ベクトルを加え合わせたものは、重力と抵抗力が同時に働く場合の運動方程式の解にはならない。問 1 との違いに注意。]

平成 30 年度

千葉大学先進科学プログラム入学者選考課題

H30
解答例

課題 II

解答例

解答例：課題II

出題意図

設問を通じて、マクロな物理現象をミクロな視点から理解することを目的とし、光の反射・屈折現象を題材に問題を作成した。分野としては光の性質，熱力学，電磁気と幅広く，融合問題となっている。

問1では光の全反射によるマクロな物理現象として逃げ水を取り上げている。問題を通じて，屈折率は温度によって決まる物理量であるということを学ぶ。

問2では実際に気体の屈折率を測定する際に用いられている干渉計での実験を通じて，どの物理量が気体の屈折率を決定しているのかを理解してもらうことを目的としている。光の干渉と熱力学との融合問題である。

問3では屈折率をミクロな視点から捉えることを目指している。高校では光のもつ振動数(周波数)によって屈折率が異なる(光の分散)ことを学ぶ。この周波数依存性を解釈するためには，気体の分子レベルでの性質を考慮する必要がある。その際に誘電率を理解することが必要不可欠となる。物質に電場を印加すると，物質内部の電荷分布に変化が生じ，電気双極子モーメントが誘起され，それにより逆向きの電場が形成される。単位体積当たりの電気双極子モーメントが分極であり，この分極と電場とを結び付けているのが誘電率である。分極の機構には大きく3つ(配向分極，イオン分極，電子分極)あるが，今回の問題では光を取り扱っていることから，高い振動数に追従することが可能な電子分極の寄与のみを考えている。古典的な振動子モデルを考え，運動方程式を解くことにより，屈折率が気体の個数密度にのみ依存していることを導かせる。問題を通じて，マクロな物理現象として屈折率を捉えた場合の問2と同じ関係が得られることを学ばせることを目的としている。

高校ではあまり取り扱わない誘電率を主体としているため，問3は概念を理解することに多少時間がかかるかもしれないが，設問自体は高校範囲の数学，物理を理解していれば解ける問題である。三角関数の計算などでは電卓を使用してよいとため，計算力や暗記力を問う問題ではない。

H30

解答例

問 1 (1) $n_L \sin \theta = n_H \sin \phi$

(2) 全反射が起きる際には $n_L \sin \theta_c = n_H$

$\sin \theta_c = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \beta_c \right) = \cos \beta_c$ であるので $n_L \cos \beta_c = n_H$
よって

$$\beta_c = \sqrt{2 - 2 \cos \beta_c} = \sqrt{2 \left(1 - \frac{n_H}{n_L} \right)}$$

(3) 式 (1) より $\frac{n_H - 1}{n_L - 1} = \frac{T_L}{T_H}$

したがって、 $1 - \frac{n_H}{n_L} = 1 - \frac{1}{n_L} \left\{ 1 + \frac{T_L}{T_H} (n_L - 1) \right\} = \left(1 - \frac{1}{n_L} \right) \left(1 - \frac{T_L}{T_H} \right)$
よって

$$\beta_c = \sqrt{2 \left(1 - \frac{1}{n_L} \right) \left(1 - \frac{T_L}{T_H} \right)}$$

(4) 代入すると $\beta_c = 5.434 \times 10^{-3}$

よって $1.5 / \tan (5.434 \times 10^{-3}) = 276.0$

2.8×10^2 m 離れたところに見える。

問 2 (1) 屈折の法則より、平面鏡での屈折角度を r とすると

$$\begin{aligned} \sin \frac{\pi}{4} &= n_P \sin r \\ \sin r &= \frac{1}{\sqrt{2} n_P} \end{aligned}$$

光路長は $\frac{2dn_P}{\cos r}$ より求められるので、 $\cos r = \sqrt{1 - \frac{1}{2n_P^2}}$ を代入することにより

$$\frac{2\sqrt{2}dn_P^2}{\sqrt{2n_P^2 - 1}}$$

とわかる。

(2) 光の強度は気体を入れ始めると弱くなり、その後明暗を繰り返す。

(3) 強めあうとき、光路差が波長の整数倍である。光路差は容器 A_1 と A_2 内部の屈

折率の違いによるので

$$\begin{aligned}\ell(n_0 - 1) &= N\lambda \\ n_0 &= 1 + \frac{\lambda}{\ell}N\end{aligned}$$

- (4) $T = 299 \text{ K}$, $p = 1.010 \times 10^5$ のときの屈折率を n_1 , $T = 299 \text{ K}$, $p = 6.99 \times 10^4$ のときの屈折率を n_2 とすると, 屈折率の違いにより生じる光路差は $(n_1 - n_2)\ell$ と表せる。

式 (1) より

$$(n_1 - n_2)\ell = \{(n_1 - 1) - (n_2 - 1)\}\ell = \frac{1.010 \times 10^5 - 6.99 \times 10^4}{299}\alpha\ell$$

光が強めあう条件を考えることにより

$$\begin{aligned}\frac{1.010 \times 10^5 - 6.99 \times 10^4}{299}\alpha\ell &= 75 \times (6.33 \times 10^{-7}) \\ \alpha &= 3.043 \times 10^{-6}\end{aligned}$$

よって

$$n - 1 = 3.043 \times 10^{-6} \times \frac{1.01 \times 10^5}{273}$$

$$n = 1.0011257 \doteq 1.00113$$

- (5) 状態方程式より $\frac{p}{T} = \rho k_B$ であるので式 (1) に代入すると $n - 1 = \alpha k_B \rho$ とわかる。

問 3 (1) $m \frac{d^2 x}{dt^2} + kx = -eE$ もしくは $m \frac{d^2 x}{dt^2} + kx = -eE_0 \cos \omega t$

- (2) 運動方程式に代入すると

$$\begin{aligned}-mx_0\omega^2 \cos \omega t + kx_0 \cos \omega t &= -eE_0 \cos \omega t \\ mx_0 \left(\frac{k}{m} - \omega^2 \right) &= -eE_0 \\ x_0 &= \frac{-eE_0}{k - m\omega^2}\end{aligned}$$

- (3)

$$P = -\rho e x_0 \cos \omega t = \frac{\rho e^2 E_0}{k - m\omega^2} \cos \omega t$$

H30

解答例

(4) 前問 (3) と式 (8) より

$$P = -\rho ex = (\varepsilon - \varepsilon_0)E$$

であるので, 代入すると

$$\varepsilon - \varepsilon_0 = \frac{\rho e^2}{k - m\omega^2}$$

式 (6) より

$$n^2 - 1 = \frac{\rho e^2}{\varepsilon_0(k - m\omega^2)}$$

と求まる。近似式より

$$\begin{aligned} n - 1 &= \frac{n^2 - 1}{2} = \frac{\rho e^2}{2\varepsilon_0(k - m\omega^2)} \\ n &= 1 + \frac{\rho e^2}{2\varepsilon_0(k - m\omega^2)} \end{aligned}$$

一方, 問 2(5) より

$$n = 1 + \alpha k_{\text{B}}\rho$$

であるので,

$$\alpha = \frac{e^2}{2k_{\text{B}}\varepsilon_0(k - m\omega^2)}$$

と求まる。

平成29年度

千葉大学先進科学プログラム入学者選考課題

課題論述

課題 I, II

(9:00-15:00)

H29
—
課題

注意事項

1. 問題すべてに解答してください。
2. 携帯電話，スマートフォンの電源を必ず切ってください。

[I]

細い直線状の溝がある半径 R の水平な円板が、水平面内を回転できるように設置されている。円板上の溝の中には質量 m の小球があり、溝の両端からのみ外に飛び出すことができる。このような小球の運動を考えよう。ただし、小球は転がることなく溝の中をすべるとする。

問 1 図 1 のような中心 O を通る直線状の細い溝がある半径 R の円板が水平に置かれている。まずは、円板が回転していない状況を考える。点 O にある小球に大きさ v_0 の初速度を与えて外向きに打ち出す。小球が溝をすべる際の溝の底面との動摩擦係数を μ' とし、溝の底面との静止摩擦係数 μ は動摩擦係数よりも大きいとする。小球と溝の壁面との摩擦や空気による抵抗は無視できるとし、重力加速度の大きさを g として以下の問いに答えなさい。

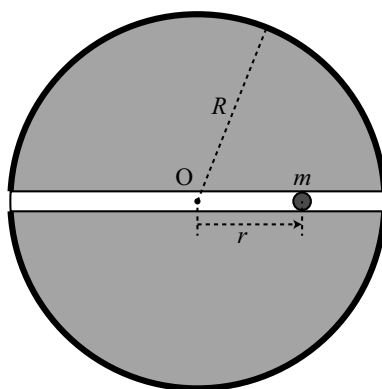


図 1

- (a) 小球が点 O から半径 r の位置まで静止することなく動いた。この位置において、小球にはたらく力の溝に平行な成分 $F_1(r)$ を求めなさい。ただし、中心から見て外向きを正とする。
- (b) 小球が点 O から半径 r の位置まで静止することなく動いたとき、その間に問 1(a) で求めた力が小球にした仕事 W_1 は、 $W_1 = \int_0^r F_1(r') dr'$ と計算できる。 W_1 を求めなさい。
- (c) 小球が円板の端まで到達するための v_0 の条件を求めなさい。
- (d) 問 1(c) の条件を満たすとき、小球が円板から飛び出すときの小球の速さ v_1 を求めなさい。

問 2 次に、図 2 のような回転中心 O を通る直線状の細い溝がある円板が一定の角速度 ω (ただし $\omega > 0$) で反時計回りに回転している状況を考える。点 O にある質量 m の小球に、円板と一緒に回転している観測者から見て大きさ v_0 の初速度を与えて外向きに打ち出すときの小球の運動を考えよう。以降は溝の底面もなめらかであり、小球と溝の壁面や底面との摩擦、空気による抵抗はないとする。以下の問 2(a) から問 2(c) では円板と一緒に回転している観測者の視点から考えなさい。ただし、円板と一緒に回転している観測者からみると、溝の中を運動している小球に、その位置に静止している場合と同じ遠心力がはたらくことが知られている。

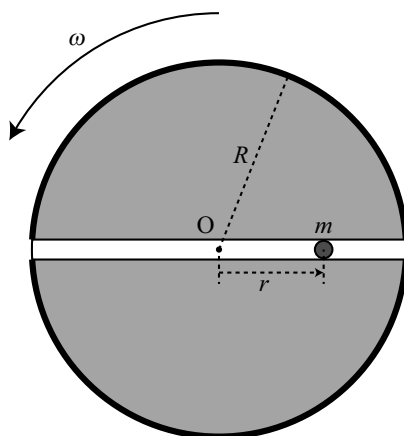


図 2

- (a) 小球が点 O から半径 r の位置にあるとき、小球にはたらく力の溝に平行な成分 $F_2(r)$ を求めなさい。ただし、中心から見て外向きを正とする。
- (b) 小球が点 O から半径 r の位置まで動いたとき、その間に問 2(a) で求めた力が小球に対してした仕事 W_2 を求めなさい。仕事は問 1(b) で求めたのと同様に計算できる。
- (c) 小球が原点から半径 r の位置にあるときの小球の速さ v_2 を求めなさい。
- (d) 小球が円板を飛び出した瞬間の、円板の外で静止している観測者から見た小球の速度の溝に平行な成分と溝に垂直な成分を求めなさい。ただし、溝に平行な成分は点 O から見て外向きを正とし、溝に垂直な成分は回転の正の向きに動いている場合を正とする。

問3 問2では、回転中心Oを通る溝のみを考えたが、溝の位置を点Oからずらすことで円板から飛び出す速さをもっと速くできないだろうか。そこで図3のように、点Oからずれた位置に直線状の細い溝がある半径 R の円板が水平面内を一定の角速度 ω (ただし $\omega > 0$) で反時計回りに回転している状況を考える。点Oから溝に下した垂線の足をAとし、OA間の距離を ℓ とする。点Aからみて回転の正の向きにある溝の端点をC、回転の負の向きにある端点をBとする。点Aにある質量 m の小球に円板と一緒に回転している観測者から見て大きさ v_0 の初速度を与えて点Bまたは点Cの向きに打ち出すときの小球の運動を考えよう。問2と同様に溝の底面もなめらかであり、小球と溝の壁面や底面との摩擦、空気による抵抗はないとする。

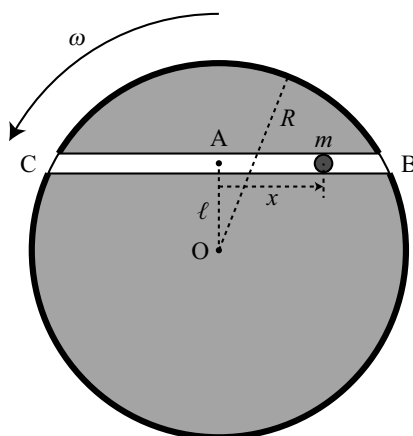


図3

まずは円板と一緒に回転している観測者の視点から考える。

- (a) 小球が点Aから点Bに向かって動いた。小球が点Aから距離 x の位置にあるとき、小球にはたらく力の溝に平行な成分 $F_3(x)$ を求めなさい。ただし点Aから点Bの向きを正とする。
- (b) 小球が点Aから点Bに向かって距離 x の位置まで動いたとき、小球の速さ v_3 を求めなさい。

次に、円板の外で静止している観測者の視点で考える。これ以降、初速度 v_0 は十分に小さいとして $v_0 = 0$ と近似できるとする。

- (c) 小球が点Bから円板外に飛び出したとき、円板の外で静止している観測者からみた小球の速さ $u_B(\ell)$ を求めなさい。
- (d) 小球が点Cから円板外に飛び出したとき、円板の外で静止している観測者からみた小球の速さ $u_C(\ell)$ を求めなさい。

- (e) $u_B(\ell)$, $u_C(\ell)$ を ℓ の関数としてみたとき, $0 \leq \ell \leq R$ の範囲で, グラフのおおよその形を描きなさい。
- (f) 小球が点 B または点 C から円板を飛び出すとき, 円板の外で静止している観測者から見たときの小球の速さの最大値と最小値を求めなさい。ただし, ℓ は $0 \leq \ell \leq R$ を満たすとする。

[II]

以下の問いに答えなさい。必要なら三角関数に関する以下の公式を用いてよい。

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

$$\sin x \sin y = -\frac{1}{2} \{ \cos(x+y) - \cos(x-y) \}$$

A.

波とは、何らかの物理量が空間的・時間的に変化しながら伝播する現象のことである。 x 方向の正の向きに伝播する単一周波数の平面波は

$$E(x, t) = E_0 \sin \left\{ \omega \left(t - \frac{x}{c} \right) \right\} \quad (1)$$

のように正弦関数で記述される。ここで、 x は位置、 t は時間を表す。 $E(x, t)$ は変化する物理量、 E_0 は波の振幅、 c は波の速さ、 ω は角周波数である。

問1 波長 λ 、周期 T を、角周波数 ω および波の速さ c を用いて表しなさい。

光は波の一種であり、振動する電磁場がその正体である。光の周波数は極めて高いので、光の電場や磁場の変化を直接観測することはできない。光検出器で測定できるのは光の強度である。角周波数 ω の光の強度 $I(x, t)$ は、光の電場の大きさ $E(x, t)$ の二乗をその一周期(T)で時間平均した量を使って、

$$I(x, t) = \frac{\epsilon_0 c}{2} \langle E(x, t)^2 \rangle_T \quad (2)$$

で与えられる。ここで、 ϵ_0 は誘電率であり、 c は光の速さに対応する。また、 $\langle \rangle_T$ は“光の電場の一周期で時間平均を取る”，という記号である。すなわち、 $\langle \rangle_T$ は、 $A(t)$ を時間 t の関数として、

$$\langle A(t) \rangle_T = \frac{1}{T} \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} A(t') dt' \quad (3)$$

のように定義される。以下の設問では、 $\langle \rangle_T$ を求める際には、角周波数 ω の波の周期 T を用いなさい。

問2 (3) 式の定義に従って $\langle \cos \omega' t \rangle_T$ を求め、 ω , ω' , t を用いて表しなさい。ただし、 ω と ω' は等しいとは限らないことに注意しなさい。

問3 (1) 式の $E(x, t)$ を光の電場の大きさとする。(1) 式を (2) 式に代入して位置 x における光の強度 $I(x, t)$ を求めなさい。ただし、 E_0 , ω はいずれも定数とする。また、(3) 式の時間積分を実行する際には、位置 x は定数とみなしてよい。

次に、角周波数が ω と $\omega + \Delta\omega$ でわずかに異なる二つの単色光を考える。それぞれの光の電場は正弦関数で表され、光の電場の向き（偏光方向）が同じであるとす。これらの単色光を重ね合わせて合成波を作る。このとき、合成波の光の電場はそれぞれの光の電場の和で表される。このとき合成波には「うなり」が生じ、光の強度の増減が繰り返されることになる。

問4

(a) $\langle \{A \sin \omega t + B \sin (\omega + \Delta\omega) t\}^2 \rangle_T$ を計算しなさい。

(b) $\Delta\omega$ が十分小さいとき ($|\Delta\omega| \ll \omega$) には、

$$\langle \{A \sin \omega t + B \sin (\omega + \Delta\omega) t\}^2 \rangle_T \cong \frac{A^2 + B^2 + 2AB \cos \Delta\omega t}{2}$$

となることを示しなさい。 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ を証明せずに用いても良い。

問5 x 方向の正の向きに進む光の電場が

$$E(x, t) = E_0 \sin \left\{ \omega \left(t - \frac{x}{c} \right) \right\} + \alpha E_0 \sin \left\{ (\omega + \Delta\omega) \left(t - \frac{x}{c} \right) \right\}$$

と書かれる場合を考える。角周波数の違い $\Delta\omega$ は光の角周波数 ω と比べて十分小さいものとする。また、 α は定数とする。このとき、位置 x , 時間 t での光強度は $I = I_0 \{1 + V \cos \phi(x, t)\}$ と表記することができ、干渉によって光の強度が時間とともに増減する。平均強度 I_0 , コントラスト V , 位相 $\phi(x, t)$ を求めなさい。

B.

図1のように、光源、半透鏡、可動鏡、固定鏡、光検出器から構成される干渉計を考える。図1の左にある光源から角周波数 ω の単色光を入射する。この光は平面波として取り扱うことができる。光は半透鏡で1:1の強度比に分割され、一方は反射されて図の上方（経路1）へ、もう一方は透過して図の右側（経路2）へ進む。経路1には移動可能な鏡（可動鏡）が、経路2には位置が固定された鏡（固定鏡）があり、それぞれの鏡で反射された光は半透鏡上の同じ位置で重ね合わされる。経路1を通った光の半分が半透鏡を透過し、経路2を通った光の半分が半透鏡で反射されて、光検出器上の同じ位置に照射される。光源、固定鏡、光検出器と半透鏡との距離は等しく、 L であった。可動鏡と半透鏡の距離を L_1 とする。また、空間を満たしている媒質の屈折率は1、光の速さは c とする。

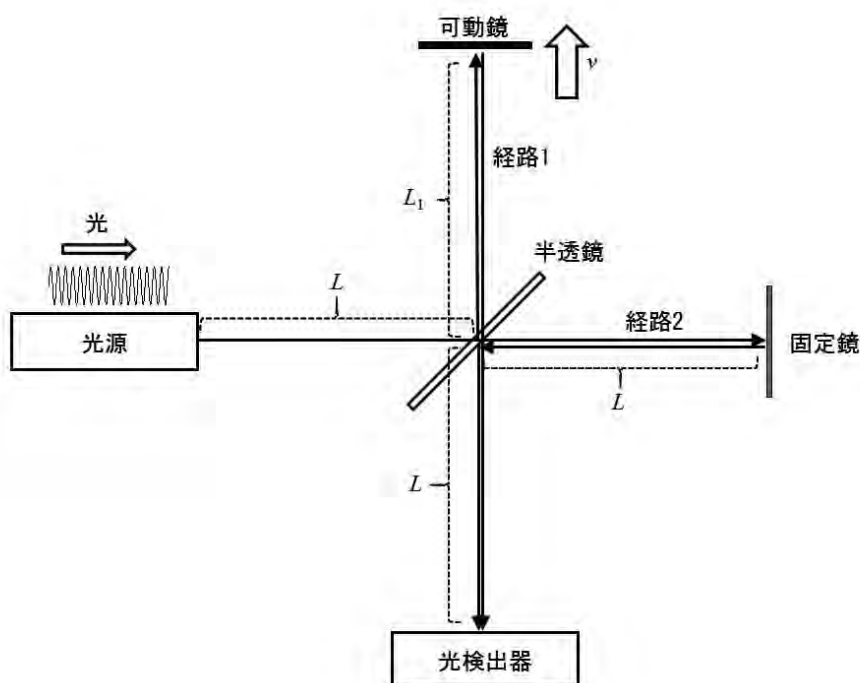


図 1:

問 1 はじめ可動鏡は半透鏡から距離 L_0 の位置に静止していた ($L_1 = L_0$)。このとき、光検出器上で観測される光の強度は、可動鏡側と固定鏡側を進んだ光の光路長の差によって異なる。光検出器上で観測される光の強度が最大になるときの L と L_0 の関係を示しなさい。

- 問2 可動鏡が一定の速さ v で半透鏡から遠ざかると、光検出器上では経路1と経路2を通った光が重なり合って干渉し、光の強度が時間とともに周期的に変化する。時刻 t での可動鏡の位置が $L_1 = L_0 + vt (v > 0)$ と表されるとき、光強度の増減の周期を ω , c , v を用いて表しなさい。ただし、反射された光はドップラー効果により波長が変化するはずであるが、ここでは簡単のためドップラー効果を無視する。
- 問3 実際には、経路1の可動鏡を速さ v で移動させると、反射波の角周波数はドップラー効果により変化する。以下のような手順で反射波の角周波数を求めよう。ただし、 $c \gg v$ のときには、光のドップラー効果は音波の場合と同じように取り扱うことができ、静止している場所から測った光の速さは角周波数によらず常に一定 (c) であると考えてよい。
- (a) 時刻 t_1 に半透鏡で反射された光が可動鏡で反射され、再び半透鏡に到達する時刻 t_2 を t_1 , L_0 , v , c を用いて表しなさい。
 - (b) 時刻 $t_1 + \Delta t_1$ に半透鏡で反射された光が可動鏡で反射され、再び半透鏡に到達する時刻を $t_2 + \Delta t_2$ とする。 Δt_2 を Δt_1 , v , c を用いて表しなさい。
 - (c) 時間 Δt_1 および Δt_2 のあいだに光の電場が振動する回数は等しくなくてはならないことに注意して、反射波の角周波数を ω , v , c を用いて表しなさい。
 - (d) ドップラー効果を考慮すると、光検出器上では角周波数の異なる二つの光が重ね合わされていることになる。このため二つの光はうなりを起こす。光の強度の増減の周期を求めなさい。
- 問4 可動鏡の反射率は1 (完全反射) だが、固定鏡の反射率は β だった。(すなわち、固定鏡に入射した光の強度が I_1 だとすると、反射光の強度は βI_1 になる。) 光検出器で観測される干渉のコントラスト V (A. 問5 参照) を求めなさい。

☆解説

以上の原理を応用すると、生体のように不透明な物体の奥行方向の断層画像を得ることができる。これは光コヒーレンストモグラフィーと呼ばれ、医療分野で実用化されている。図1で固定鏡の代わりに奥行きのある半透明な物体を置いたとしよう。これは反射率の異なる固定鏡が奥行方向に連続して置かれているとみなすことができる。経路2を通り物体の内部から反射した光と経路1を通った光が光検出器上に同時に辿り着けば、干渉による明滅が観測される。光源としてある一定時間だけ光が出力されるようなパルス光を用いると、干渉のコントラストと可動鏡位置の関係から、物体の奥行方向の断層画像を得ることができる。

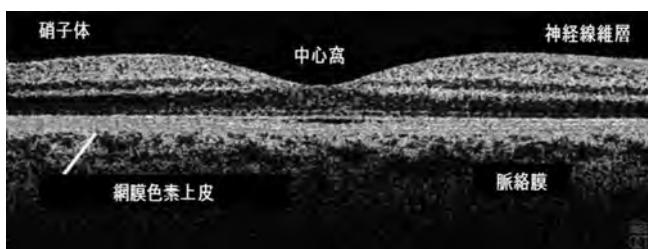


図 2: 網膜の光コヒーレンストモグラフィー断層画像

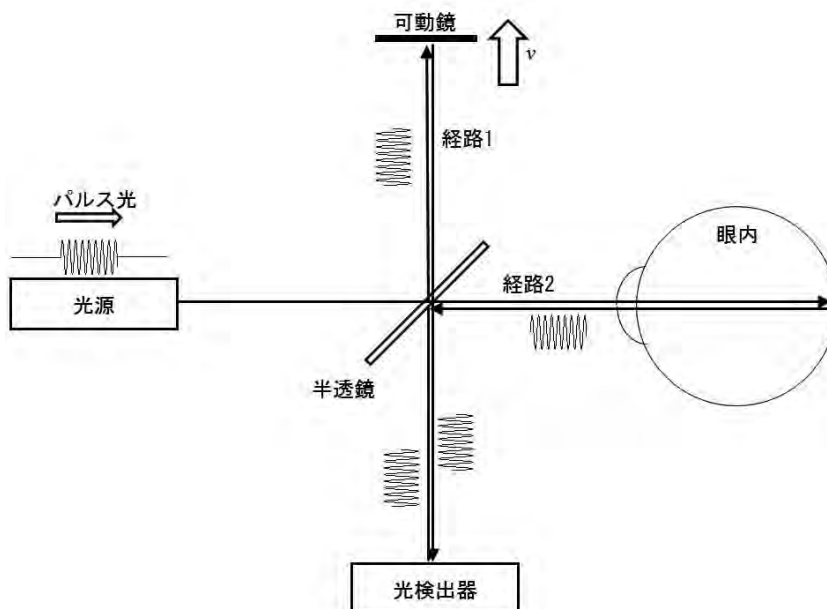


図 3: 光コヒーレンストモグラフィー装置の概要

平成 2 9 年度

千葉大学先進科学プログラム入学者選考課題

課題 I

解答例

H29
解答例

解答例：課題Ⅰ

出題意図

物体を円板の上に乗せて回転させると、物体は外側に力を受けて飛び出そうとします。このような円板上での物体の運動を力学的に扱うとき、二つの考え方があります。一つは回転している物体と一緒に回転している観測者から考える方法、もう一つは回転している円板の外から物体の運動を考える方法です。前者の場合、観測者は加速度運動をしているために慣性力を考える必要が出てきます。本問題では、特に慣性力の中でも遠心力と呼ばれる外向きにかかる力に着目し、小球の運動を考えます。この問題では、小球は溝に沿った運動しかしないので、速度に垂直な方向にはたらくコリオリ力を考える必要はありません。重要なのは小球と一緒に回転している観測者からみると、遠心力は重力のように位置エネルギーのようなもの（大学の物理ではポテンシャルといいます）を持つところです。そのため、エネルギー保存則で考えると小球の運動をわかりやすく記述することができます。円板から飛び出すまでの運動は、円板と一緒に回転している観測者の視点で考えられるのですが、円板の外から見ている観測者からみた、円板から飛び出した後の小球の速度は、円板の回転速度も考慮する必要があります。つまり、速度の向きを考えて速度の合成をする必要があるのです。後半の問題では、円の中心を通らない溝から飛び出した小球の速さが最大と最小になる場合を考えますが、これは、円板が回転していることにより得られる速度と、円板と一緒に回転している観測者からみた円板から飛び出す小球の速度が、ともに大きく、かつ、できるだけ同じ向きを向くときに速さが大きくなります。この事実は、遠心ポンプの形状の設計する際にも考慮されています。その条件を数学を使って計算してみたいというのがこの問題の最終的な課題です。そのためには、物理の力学の知識だけではなく、数学の微積分を使いこなす力が必要となってきます。

問1は基礎的な力学、特に摩擦を扱う問題ですので、大学に進学するには必ず解けてほしい問題であり、30点の配点とします。問2は、問1の考え方を応用し、慣性力である遠心力を仕事の観点から考える応用問題です。計算自体はあまり難しくないので、じっくりと説明を読んだり、教科書などを調べて解答にたどり着いてほ

H29

解答例

しいと思います。この問2までできる方は大学1年生の講義にも対応できる応用力があると思われます。その意味で、問2は40点の配点をしています。問3は力や速度をベクトルとしてしっかり理解し、数学のベクトルや微積分の知識を活用して問題を解いていかなければならない、非常に高度な問題であるといえます。問3には30点を配点します。

問 1 (a) 垂直抗力が mg となるので摩擦力の大きさは $\mu' mg$ 。外向きを正にしている
ので、 $-\mu' mg$ 。

(b) 仕事 W_1 は

$$W_1 = \int_0^r F_1(r') dr' = \int_0^r (-\mu' mg) dr' = -\mu' mgr$$

(c) エネルギー保存則により、初期に持っていた運動エネルギーと摩擦力によってされた仕事の和がその位置まで動いたときの運動エネルギーと考えられる。よって

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - \mu' mgR \geq 0$$

ならば、端まで到達する。すなわち条件は、 $v_0 \geq \sqrt{2\mu' gR}$ 。

(d) (c) と同様にエネルギー保存則で考え、

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - \mu' mgR = \frac{1}{2}mv_1^2$$

よって、 $v_1 = \sqrt{v_0^2 - 2\mu' gR}$ 。

問 2 (a) 小球には遠心力がはたらく。その大きさは $ma\omega^2$ で外向きである。つまり、
 $F_2(r) = mr\omega^2$ 。

(b) 問 1 と同様に、

$$W_2 = \int_0^r mr'\omega^2 dr' = \frac{m\omega^2}{2}r^2$$

(c) 半径 r の点での速さを v_2 とすると、問 1 と同様にエネルギー保存則より

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{m\omega^2}{2}r^2 = \frac{1}{2}mv_2^2$$

となる。これより、 $v_2 = \sqrt{v_0^2 + \omega^2 r^2}$ 。

(d) 円板から飛び出すとき、円板の端の速さは ωR であり、これは溝に垂直な速度成分となる。また、円板の溝に平行な速度成分は回転している円板と一緒に運動している観測者から見ても同じである。よって、溝に平行な成分は $\sqrt{v_0^2 + \omega^2 R^2}$ 、溝に垂直な成分は ωR となる。

問3 (a) 遠心力は大きさ $m\omega^2\sqrt{\ell^2+x^2}$ で動径方向の外向きにはたらく。溝に沿った向きの成分は、幾何学的に考えて、その $\frac{x}{\sqrt{\ell^2+x^2}}$ 倍であるので、

$$F_3(x) = m\omega^2\sqrt{x^2+\ell^2}\frac{x}{\sqrt{x^2+\ell^2}} = m\omega^2x$$

(b) 問1や問2と同様に仕事を計算すると、

$$W_3 = \int_0^x F(x')dx' = \int_0^x m\omega^2x'dx' = \frac{m}{2}\omega^2x^2$$

である。よって、速さは

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{m}{2}\omega^2x^2 = \frac{m}{2}v_3^2$$

より、 $v_3 = \sqrt{v_0^2 + \omega^2x^2}$ 。

(c) $v_0 = 0$ と近似できるので、円板と一緒に運動する観測者からみた、小球が飛び出すときの速さは $\omega\sqrt{R^2-\ell^2}$ となる。角 AOB の大きさを θ とおくと、 $\cos\theta = \frac{\ell}{R}$ 。また、円板の端での円板の速度は接線方向に ωR である。これらを考慮して、余弦定理より、

$$u_B(\ell)^2 = (\omega R)^2 + \left(\omega\sqrt{R^2-\ell^2}\right)^2 - 2\omega^2R\sqrt{R^2-\ell^2}\cos\theta$$

これより、

$$u_B(\ell) = \omega\sqrt{2R^2-\ell^2-2\ell\sqrt{R^2-\ell^2}}$$

(d) (c) とほぼ同様に考えられるが、飛び出す点が C であるため、速度の向きが逆である。よって、

$$u_C(\ell)^2 = (\omega R)^2 + \left(\omega\sqrt{R^2-\ell^2}\right)^2 - 2\omega^2R\sqrt{R^2-\ell^2}\cos(\pi-\theta)$$

が成立する。これより、

$$u_C(\ell) = \omega\sqrt{2R^2-\ell^2+2\ell\sqrt{R^2-\ell^2}}$$

(e) $u_B > 0$, $u_C > 0$ より, これらの増減と二乗したものの増減は一致する。

すなわち $g_{\pm}(\ell) = 2R^2 - \ell^2 \pm 2\ell\sqrt{R^2 - \ell^2}$ (複号同順) とおくと, $u_B = \omega\sqrt{g_-(\ell)}$, $u_C = \omega\sqrt{g_+(\ell)}$ である。定義域は $0 < \ell < R$ であることに注意しなければならない。

$$\frac{dg_{\pm}}{d\ell} = -2\ell \pm \left(2\sqrt{R^2 - \ell^2} + 2\ell \frac{-2\ell}{2\sqrt{R^2 - \ell^2}} \right) = 2 \left(-\ell \pm \frac{R^2 - \ell^2}{\sqrt{R^2 - \ell^2}} \right)$$

と計算できるので, $\frac{dg}{d\ell} = 0$ より,

$$\ell^2(R^2 - \ell^2) = (R^2 - 2\ell^2)^2$$

これを解くと, $\ell^2 = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{10} R^2$ であり, これが $\frac{dg}{d\ell}$ が 0 になる候補である。

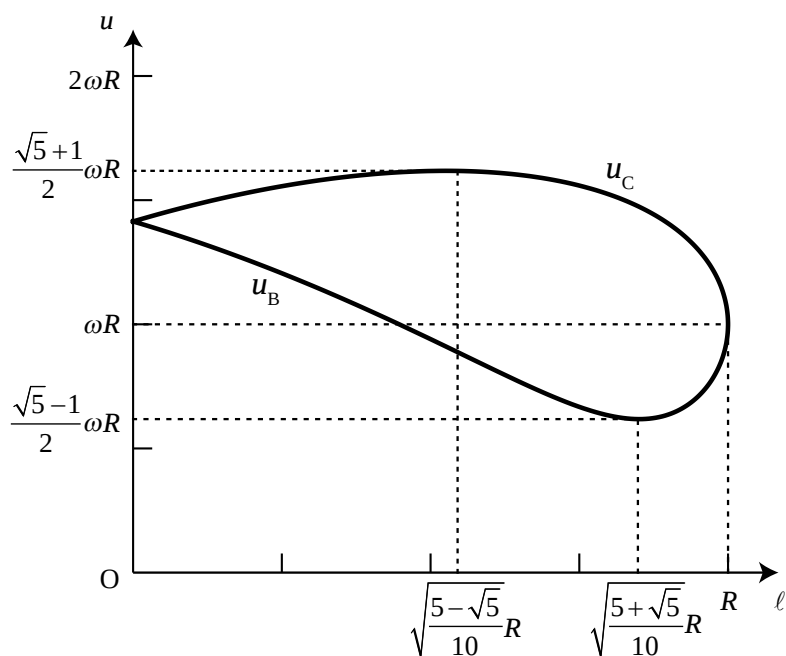
$\ell > 0$ を考慮して代入してチェックすることで, g_+ は $\ell^2 = \frac{5 - \sqrt{5}}{10} R^2$ で極大値 $\frac{3 + \sqrt{5}}{2}$ を, g_- のときは $\ell^2 = \frac{5 + \sqrt{5}}{10} R^2$ で極小値 $\frac{3 - \sqrt{5}}{2}$ をとることが分かる。

これらよりグラフの概形は以下のように描ける。

ただし, $\sqrt{\frac{3 - \sqrt{5}}{2}} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \doteq 0.618$, $\sqrt{\frac{3 + \sqrt{5}}{2}} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} \doteq 1.618$ を用いた。

H29

解答例



H29
解答例

(f) (e) より、速さの最大値は

$$\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}\omega R = \frac{\sqrt{5}+1}{2}\omega R$$

となる。また、最小値は

$$\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}\omega R = \frac{\sqrt{5}-1}{2}\omega R$$

となる。

参考までに、最大値をとるとき、 $\ell = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}R \doteq 0.851R$ 、角 AOB は

$\cos \theta_1 = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}$ となるような $0 < \theta_1 < \frac{\pi}{2}$ を満たす角 $\theta_1 \doteq 58.28^\circ$ とな

り、最小値をとるとき、 $\ell = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}R \doteq 0.526R$ 、角 AOC は

$\cos \theta_2 = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}$ となるような $0 < \theta_1 < \frac{\pi}{2}$ を満たす角 $\theta_2 \doteq 31.72^\circ$ となる。

問 3(c),(d),(e) については ℓ の代わりに角 AOB または、角 AOC の大きさ θ を考えると式変形が多少簡単になる。

角 AOB を θ とすると、点 B から飛び出すときの、円板と一緒に回転している観測者からみた小球の速度は、円板がちょうど図 3 の位置のときに小球が飛び出したとすると、 $(\omega R \sin \theta, 0)$ となる。一方、回転する円板の点 B の速度は $(-\omega R \cos \theta, \omega R \sin \theta)$ である。よって、速度の合成をすると、円板の外から見た小球の速度は $\omega R(-\sin \theta + \cos \theta, \sin \theta)$ となる。よってこの速度の大きさ $u_B(\theta)$ は

$$\begin{aligned} u_B(\theta) &= \omega R \sqrt{(-\sin \theta + \cos \theta)^2 + (\sin \theta)^2} \\ &= \omega R \sqrt{1 - 2 \sin \theta \cos \theta + \sin^2 \theta} \\ &= \omega R \sqrt{1 - \sin 2\theta + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\theta} \\ &= \omega R \sqrt{\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} \sin(2\theta + \alpha)} \end{aligned}$$

ここで、角 α は、 $\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$ 、 $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$ となる角である。 θ の定義域が $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ であることから、この場合、 $2\theta + \alpha = \frac{\pi}{2}$ となる角 θ のときに最小値

$\omega R \sqrt{\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}} = \omega R \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$ をとることがわかる。最大値は $\theta = \frac{\pi}{2}$ のとき $\omega R \sqrt{2}$ となる。

同様に、角 AOC を θ とすると、C から飛び出すときの、円板と一緒に回転している観測者からみた小球の速度は、円板がちょうど図 3 の位置のときに小球が飛び出したとすると $(-\omega R \sin \theta, 0)$ となる。一方、回転する円板の点 C の速度は $(-\omega R \cos \theta, -\omega R \sin \theta)$ である。よって、速度の合成をすると、円板の外から見た小球の速度は $\omega R(-\sin \theta - \cos \theta, -\sin \theta)$ となる。よってこの速度の

大きさ $u_C(\theta)$ は

$$\begin{aligned} u_C(\theta) &= \omega R \sqrt{(-\sin \theta - \cos \theta)^2 + (-\sin \theta)^2} \\ &= \omega R \sqrt{1 + 2 \sin \theta \cos \theta + \sin^2 \theta} \\ &= \omega R \sqrt{1 + \sin 2\theta + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\theta} \\ &= \omega R \sqrt{\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \sin(2\theta - \alpha)} \end{aligned}$$

ここで、角 α は、上と同様 $\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$ となる角である。 θ の定義域が $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ であることから、この場合、 $2\theta - \alpha = \frac{\pi}{2}$ となる角 θ のときに最大値 $\omega R \sqrt{\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}} = \omega R \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ をとることがわかる。最小値は $\theta = 0$ のとき ωR となる。

よって、最大値、最小値はそれぞれ

$$\omega R \sqrt{\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}} = \omega R \frac{\sqrt{5}+1}{2}, \quad \omega R \sqrt{\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}} = \omega R \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

となる。グラフの概形は ℓ と θ の関係を考えつつ描けばよい。

参考（大学レベルで考えると）

静止座標系での加速度 $\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2}$, 回転座標系での加速度 $\frac{d'^2 \mathbf{r}}{dt'^2}$, 回転座標系での速度 $\frac{d' \mathbf{r}}{dt'}$ は

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d'^2 \mathbf{r}}{dt'^2} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + 2\boldsymbol{\omega} \times \frac{d' \mathbf{r}}{dt'} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}$$

の関係がある。ここで、右辺の第2項が遠心力に相当する。今、 $\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{e}_z$ で、かつ、 $\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_z = 0$ より、

$$\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = -\omega^2 \mathbf{r}$$

とできる。これが、遠心力に相当する。今回の問題では、 ω が一定なので、右辺の第4項は消え、また、右辺第3項（コリオリ力）は $\mathbf{r} \cdot \left(2\boldsymbol{\omega} \times \frac{d' \mathbf{r}}{dt'} \right) = 0$ となるため、仕

事はしない（今、溝の中での小球の運動を考えているので、 $\mathbf{r}$ と $\frac{d'\mathbf{r}}{dt}$ は平行である）。

平面極座標 (r, θ) で運動方程式をたてて考える。円板外の観測者から見て運動方程式は、

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = N\mathbf{e}_\theta$$

となる。ただし、 N は溝から受ける垂直抗力である。平面極座標で加速度を表すと

$$\left(\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right)\mathbf{e}_r + \left(r\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\right)\mathbf{e}_\theta = N\mathbf{e}_\theta$$

よって、動径方向の運動方程式は

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \omega^2 r$$

となり、これを解けばよいことがわかる。この微分方程式の一般解は

$$r = Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t}$$

と書けるので、 $t = 0$ で速度 v_0 の場合には

$$r = \frac{v_0}{\omega} \sinh(\omega t)$$

と書ける。 $r = R$ となるのは、

$$t = \frac{1}{\omega} \operatorname{arcsinh}\left(\frac{\omega R}{v_0}\right)$$

のときであり、そのときの速度は

$$\begin{aligned} v &= v_0 \cosh\left(\operatorname{arcsinh}\left(\frac{\omega R}{v_0}\right)\right) \\ &= v_0 \cosh\left(\operatorname{arccosh}\sqrt{1 + \left(\frac{\omega R}{v_0}\right)^2}\right) \\ &= v_0 \sqrt{1 + \left(\frac{\omega R}{v_0}\right)^2} \\ &= \sqrt{v_0^2 + \omega^2 R^2} \end{aligned}$$

となる。

溝が中心からずれている場合には、回転座標系で考えて、

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} - \omega^2 \mathbf{r} + 2\omega \mathbf{e}_z \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{N}$$

ただし、 $\mathbf{N}$ は溝の壁による垂直抗力である。今、溝に拘束されているので、 $\mathbf{r}$ は $\mathbf{r} = \ell \mathbf{e}_y + x \mathbf{e}_x$ と書ける。また、垂直抗力は $\mathbf{N} = N \mathbf{e}_y$ と書ける。 x 方向の運動方程式を書くと

$$\frac{d^2 x}{dt^2} - \omega^2 x = 0$$

が得られる。これは、上と同じ微分方程式となっており、同様に解くことができる。

H29

解答例

平成 2 9 年度

千葉大学先進科学プログラム入学者選考課題

課題 II

解答例

H29

解答例

解答例：課題II

出題意図

生体の断層画像を得られる光コヒーレンストモグラフィー技術を題材に、光の干渉やドップラー効果などを理解しているか、またそれを計算で示せるかを試す問題を作成した。

高校では位相が同じとき2つの光は強め合い、逆位相の時には弱め合うことを習う。これは振動数が完全に同一な場合である。振動数がわずかに異なる時、位相がほぼ同じ時と反対の時が交互に現れてうなりが生じる。実際に光の強度変化を計算し、うなりの発生を示すのがAの設問である。電磁場の変化から特定の周波数成分を求める計算(フーリエ変換)は難しいので、光の強度を周期 T の時間での平均と等しいと定義した。定性的には厳密な計算と同等の結果が得られる。

設問Bでは片方の反射鏡を動かすことにより光が明暗する状況を考えた。可動反射鏡が動くとき光路長が変わると同時に、反射された光の周波数がドップラー効果により変化する。周波数や光路長の変化から光の強度変化を求めてもらうのが設問Bであるが、この結果は光の明暗から反射鏡の位置を特定できることを示している。動かない反射鏡の代わりに生体を置くと、生体の中で光を反射している場所を知ることができる。これが光コヒーレンストモグラフィーの原理に他ならない。

この原理を用いた実際の測定器では、ある一瞬だけ光が発生するパルス光が用いられる。一つのパルスが発生している極めて短い時間の間には、光は時間的・空間的な一様性(=コヒーレンス)が高いとみなすことができる。このようなパルス光を正しく扱うには大学レベルの数学が必要である。また光のドップラー効果を厳密に扱うためには特殊相対論が必要である。しかし生体の断層画像を得るための技術の本質は高校の物理から学べると感じてもらえればありがたい。

この設問を解くためには、三角関数の加法定理や積分を駆使する力も必要である。煩雑であるが積分により消える項を正しく判別する力を養ってもらいたい。

A.

問 1 波長: $\lambda = 2\pi c/\omega$

周期: $T = 2\pi/\omega$

問 2

$$\begin{aligned}\langle \cos \omega' t \rangle_T &= \frac{1}{T} \int_{t-T/2}^{t+T/2} \cos \omega' t dt' = \frac{\sin \omega' \left(t + \frac{T}{2} \right) - \sin \omega' \left(t - \frac{T}{2} \right)}{\omega' T} \\ &= \frac{2 \cos \omega' t \sin \frac{\omega' T}{2}}{\omega' T} = \frac{\omega}{\pi \omega'} \cos \omega' t \sin \left(\pi \frac{\omega'}{\omega} \right)\end{aligned}$$

問 3

$$I(x, t) = \frac{\epsilon_0 c}{2} \langle E(t)^2 \rangle_T = \frac{\epsilon_0 c}{2} \left\langle E_0^2 \sin^2 \left\{ \omega \left(t - \frac{x}{c} \right) \right\} \right\rangle_T = \frac{\epsilon_0 c E_0^2}{4}$$

問 4 (a)

$$\begin{aligned}& \langle \{A \sin \omega t + B \sin(\omega + \Delta\omega)t\}^2 \rangle_T \\ &= \langle A^2 \sin^2 \omega t + 2AB \sin \omega t \sin(\omega + \Delta\omega)t + B^2 \sin^2(\omega + \Delta\omega)t \rangle_T\end{aligned}$$

各項を計算する。

第 1 項：

$$\langle \sin^2 \omega t \rangle_T = \left\langle \frac{1 - \cos 2\omega t}{2} \right\rangle_T = \frac{1}{2}$$

第 2 項：

$$\begin{aligned}& \langle \sin \omega t \sin(\omega + \Delta\omega)t \rangle_T = \left\langle -\frac{1}{2} \{ \cos(2\omega + \Delta\omega)t - \cos \Delta\omega \} \right\rangle_T \\ &= -\frac{1}{2} \left\{ \frac{\omega}{\pi(2\omega + \Delta\omega)} \cos(2\omega + \Delta\omega)t \sin \left(\frac{\pi(2\omega + \Delta\omega)}{\omega} \right) - \frac{\omega}{\pi \Delta\omega} \cos \Delta\omega t \sin \left(\pi \frac{\Delta\omega}{\omega} \right) \right\}\end{aligned}$$

第3項：

$$\begin{aligned}\langle \sin^2(\omega + \Delta\omega)t \rangle_T &= \left\langle \frac{1 - \cos 2(\omega + \Delta\omega)t}{2} \right\rangle_T \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{\omega}{2\pi(\omega + \Delta\omega)} \cos 2(\omega + \Delta\omega)t \sin \left(2\pi \frac{\omega + \Delta\omega}{\omega} \right)\end{aligned}$$

以上から,

$$\begin{aligned}\langle \{A \sin \omega t + B \sin(\omega + \Delta\omega)t\}^2 \rangle_T &= \frac{A^2 + B^2}{2} \\ &\quad - AB \frac{\omega}{\pi(2\omega + \Delta\omega)} \cos(2\omega + \Delta\omega)t \sin \left(\pi \frac{\Delta\omega}{\omega} \right) \\ &\quad + AB \frac{\omega}{\pi\Delta\omega} \cos \Delta\omega t \sin \left(\pi \frac{\Delta\omega}{\omega} \right) \\ &\quad - \frac{B^2}{2} \frac{\omega}{2\pi(\omega + \Delta\omega)} \cos 2(\omega + \Delta\omega)t \sin \left(2\pi \frac{\Delta\omega}{\omega} \right)\end{aligned}$$

(b) $\frac{\Delta\omega}{\omega} \rightarrow 0$ の極限をとると,

$$(\text{第2項}) \rightarrow -AB \frac{\omega}{2\pi\omega} \cos 2\omega t \sin \left(\pi \frac{\Delta\omega}{\omega} \right) \rightarrow 0$$

$$(\text{第3項}) \rightarrow AB \frac{\omega}{\pi\Delta\omega} \cos \Delta\omega t \sin \left(\pi \frac{\Delta\omega}{\omega} \right) \rightarrow AB \cos \Delta\omega t$$

$$(\text{第4項}) \rightarrow -\frac{B^2}{2} \frac{\omega}{2\pi\omega} \cos \omega t \sin \left(\pi \frac{\Delta\omega}{\omega} \right) \rightarrow 0$$

よって,

$$\langle \{A \sin \omega t + B \sin(\omega + \Delta\omega)t\}^2 \rangle_T \cong \frac{A^2 + B^2 + 2AB \cos \Delta\omega t}{2}$$

問5 問4(b) で $A \rightarrow E_0$, $B \rightarrow \alpha E_0$, $t \rightarrow t - \frac{x}{c}$ と置き換えて,

$$\begin{aligned}I(x, t) &= \frac{\epsilon_0 c}{2} \left\langle \left[E_0 \sin \left\{ \omega \left(t - \frac{x}{c} \right) \right\} + \alpha E_0 \sin \left\{ (\omega + \Delta\omega) \left(t - \frac{x}{c} \right) \right\} \right]^2 \right\rangle_T \\ &= \frac{\epsilon_0 c}{2} \left[\frac{E_0^2 + \alpha^2 E_0^2}{2} + \alpha E_0^2 \cos \left\{ \Delta\omega \left(t - \frac{x}{c} \right) \right\} \right] \\ &= \frac{\epsilon_0 c (E_0^2 + \alpha^2 E_0^2)}{4} \left[1 + \frac{2\alpha}{1 + \alpha^2} \cos \left\{ \Delta\omega \left(t - \frac{x}{c} \right) \right\} \right]\end{aligned}$$

よって,

$$I_0 = \frac{\epsilon_0 c (1 + \alpha^2)}{4} E_0^2$$

$$V = \frac{2\alpha}{1 + \alpha^2}$$

$$\phi = \Delta\omega \left(t - \frac{x}{c} \right)$$

H29

解答例

B.

問1 経路1と経路2の長さの差は $2(L_0 - L)$ 。これが波長の整数倍となれば二つの光は強め合い光の強度は最大になるので、 $2(L_0 - L) = \frac{2\pi n c}{\omega}$ (n は整数)

問2 時刻 t における経路1と経路2の光路差は $2(L_0 - L) + 2vt$ 。つまり、毎秒 $2v$ で光路差が変化する。光路差が波長だけ変化するのに必要な時間が明暗の周期となるから、周期を τ とすると $2v\tau = \lambda = \frac{2\pi c}{\omega}$ 。よって、 $\tau = \frac{\pi c}{v\omega}$

問3 (a) 時刻 t_1 における可動鏡と半透鏡の距離は $L_0 + vt_1$ 。したがって、光が可動鏡に到達するのは $t_1 + \frac{L_0 + vt_1}{c - v}$ 。往路と復路は同じ時間が掛かるので、

$$t_2 = t_1 + \frac{2(L_0 + vt_1)}{c - v}$$

$$(b) \quad t_2 + \Delta t_2 = t_1 + \Delta t_1 + 2 \frac{L_0 + v(t_1 + \Delta t_1)}{c - v} = t_2 + \frac{c + v}{c - v} \Delta t_1$$

$$\text{よって、} \Delta t_2 = \frac{c + v}{c - v} \Delta t_1$$

$$(c) \quad \omega' = \omega \frac{c - v}{c + v}$$

$$(d) \quad \text{明暗の周期は} \frac{\pi(c + v)}{v\omega}$$

問4 光の電場の二乗が強度になることを考えると、反射率が β のとき、光の電場 E_1 は反射されて $\sqrt{\beta}E_1$ となる。したがって、A.問5の解答で $\alpha = \sqrt{\beta}$ とすればよく、コントラストは $\frac{2\sqrt{\beta}}{1 + \beta}$ となる。

平成 28 年度

千葉大学先進科学プログラム入学者選考課題

課題論述

課題 I, II, III

(9:00-15:00)

注意事項

携帯電話,スマートフォンの電源を必ず切ってください。

- ・ 物理学コース

I, II の 2 題を解答してください。

- ・ フロンティアテクノロジーコース

I, II, III の中から 2 題を選択して解答してください。

課題 III は採録されていません。

[I]

ワイヤによって支えられているつり橋は様々な形でゆれる。例えば、1940年に崩壊したタコマ橋の場合、図1の写真に示すように右と左の車線（橋の床版）がシーソーのようにゆれた。一般に振動数は、ポテンシャル（位置）エネルギーと運動エネルギーから求めることができる。問1で、ばねにつながれた小球（質点）の振動についてこのことを確かめたのち、問2で、つり橋がどのような周期でゆれるか簡単な模型を用いて考えよう¹。

実際の試験では大きくゆれているタコマ橋の写真が掲載されていましたが、公開版の試験問題では削除しました。写真はインターネット等で検索してください。キーワードとして、「タコマ橋」で検索すると、動画、写真や解説を多くのホームページで確認することができます。

図1: 図1: タコマ橋（1940年）。多くの橋では、横から強風が吹くと、橋の床版が上下に運動する。タコマ橋は、写真に示すように橋の床版がシーソーのようにゆれ、その後崩壊した。

必要なら以下の数学公式を用いてよい。

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} \cos x &= -\sin x, & \frac{d}{dx} \sin x &= \cos x, \\ \frac{d}{dt} \cos x &= -\sin x \frac{dx}{dt}, & \frac{d}{dt} \sin x &= \cos x \frac{dx}{dt}\end{aligned}$$

$|x|$ が十分小さいとき、 x の3乗以上の項を無視できるので、次の近似式が成り立つ。

$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}, \quad \sin x \approx x, \quad (1+x)^a \approx 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2}x^2$$

¹本問題では、つり橋の構造を簡略化し、更にはさまざまな制約を課すため、実際の現象とは異なる可能性がある。興味があれば、試験後につり橋の詳細な記述の仕方を考え、本問題との相違点等を考察してみてください。

1

A 図2(A)のように、ばね定数が k の軽いばねに質量 m の小球をつけて天井の点Oからつるし、上下に振動させる。このとき小球は、角振動数 $\omega_a = \sqrt{\frac{k}{m}}$ で単振動する。ばねの自然長を ℓ_0 、重力加速度の大きさを $g > 0$ 、点Oを原点、鉛直下方を x 軸の向きとして、次の問いに答えなさい。

- (A-1) つりあいの状態にあるときの、ばねの伸び $\Delta\ell$ 、および重力の位置エネルギーとばねの位置エネルギーの和 U_0 を求めなさい。ここで、重力の位置エネルギーの基準点はばねの自然長の位置とする。
- (A-2) 小球が振幅 A 、角振動数 ω で単振動している場合を考える。つりあいの状態にあるときのばねの長さを $\ell_1 (= \ell_0 + \Delta\ell)$ とすると、おもりの座標は

$$x = \ell_1 + A \cos \omega t$$

と表される。小球の運動エネルギー T 、および重力の位置エネルギーとばねの位置エネルギーの和 U を、 m 、 k 、 A 、 ω 、 t 、 U_0 のうち必要なものを用いて表しなさい。

- (A-3) まさつを無視すると、力学的エネルギー $E (= T + U)$ は保存される。このとき、 $\omega = \omega_a = \sqrt{\frac{k}{m}}$ が満たされることを示しなさい。

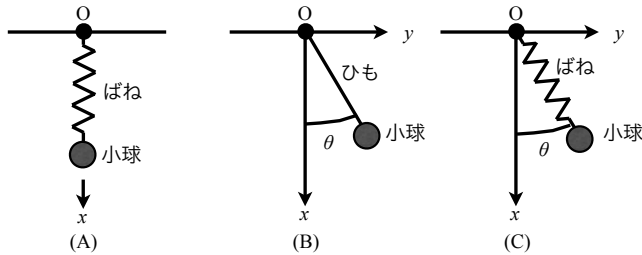


図 2

B 図2(B)のように、長さ ℓ_1 のひもと質量 m の小球でできた単振り子の振動を考える。
ここで、重力加速度の大きさを $g > 0$ 、点 O を原点、鉛直下方を x 軸の向き、水平
右方向を y 軸の向き、小球は xy 平面内を運動するとして、次の問いに答えなさい。

(B-1) 小球の位置 (x, y) とその時間変化 $\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right)$ を ℓ_1 , θ , $\frac{d\theta}{dt}$ を用いて表しなさい。

ここで、 θ はひもと鉛直線のなす角度、 $\frac{d\theta}{dt}$ はその時間変化を表す。

また、小球の運動エネルギー T 、および重力の位置エネルギー U を、 m , g , ℓ_1 , θ , $\frac{d\theta}{dt}$ のうち必要なものを用いて表しなさい。ここで、重力の位置エネルギーの基準点は小球が静止しているときの小球の位置とする。

(B-2) 角度が $\theta = B \cos \omega_b t$ で単振動するとして、角振動数 ω_b を求めなさい。ただし、 $|\theta|$ は十分に小さいとして、問題文に与えられた近似式を用いること。

C 図2(C)のように、問 A で考えた小球が、上下だけでなく左右にもゆれる場合を考える。ばねは長さが ℓ で、鉛直線から角度 θ 傾いた直線状になっているとして、次の問いに答えなさい。

(C-1) 小球の位置 (x, y) とその時間変化 $\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right)$ を ℓ , $\frac{d\ell}{dt}$, θ , $\frac{d\theta}{dt}$ を用いて表しなさい。

また、小球の運動エネルギー T 、および重力の位置エネルギーとばねの位置エネルギーの和 U を、 m , k , g , ℓ , ℓ_0 , $\frac{d\ell}{dt}$, $\frac{d\theta}{dt}$ のうち必要なものを用いて表しなさい。ここで、重力の位置エネルギーの基準点は小球が静止しているときの小球の位置とする。

(C-2) ばねの長さ ℓ と角度 θ がそれぞれ、

$$\ell = \ell_1 + A \cos \omega_a t$$

$$\theta = B \sin \omega_b t$$

のように振動する場合 ($\omega_a \neq \omega_b$) を考える。ただし、 A と B は十分に小さい正の定数で、 A^3 , A^2B , A^4 など A や B について 3 次より高い次数の項は無視できるとする。また ℓ_1 は問 (A-2) で用いたつりあいの状態にあるときのばねの長さを表す。エネルギー保存則が成り立つことを利用し、 ω_a と ω_b を、 m , k , g , ℓ_1 のうち必要なものを用いて表しなさい。

(C-3) この小球がどのような運動をするか、その軌跡を図示し簡単に説明しなさい。

2

図1に見られるタコマ橋のゆれを考えるため、橋の一部（断面）を同じ種類の2本のばねにより支えられた棒と近似する模型（図3）を考えよう。棒は自動車を通る床を切り取ったもので、その長さは道幅 L と等しい。棒は十分に軽いが、その中心および両端に、質量 m の小球が取り付けられている（図3 (b)）。また、ばねのばね定数を k 、自然長を ℓ_0 とし、橋を支えるばねの支点（図では黒丸）は固定されていると考える。つりあいの状態では、ばねの長さはどちらも ℓ_1 であり、棒は水平に保たれている。つりあいの状態での棒の重心を原点、鉛直下方を x 軸の向き、水平右方向を y 軸の向きとする。棒は xy 平面内で以下の3種類の運動をする。

- (A) 棒は水平を保ったまま上下に運動をする（図4(A)）。
- (B) 棒は水平を保ったまま主に横方向に運動をする（図4(B)）。
- (C) 棒はその重心の位置が移動せず、シーソーのような運動をする（図4(C)）。

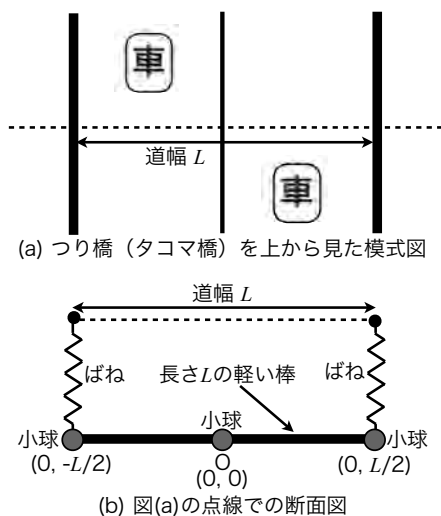


図3

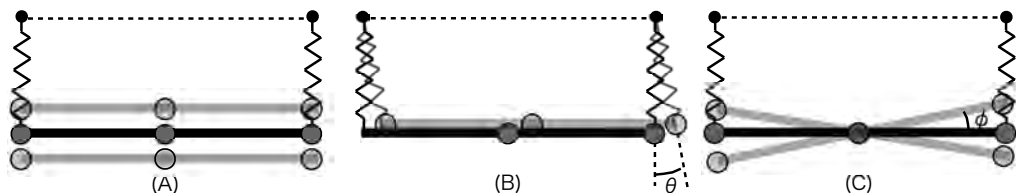


図4

以下では、左のばねの長さを ℓ_L 、右のばねの長さを ℓ_R 、ばねと鉛直線のなす角度を θ (図 4(B))、棒と水平方向のなす角度を ϕ (図 4(C)) とする。 $|\theta|$ 、 $|\phi|$ は十分小さいとして、微小量の 3 次以上を無視して下記の問いに答えなさい。

- (A) 棒が水平を保ったまま上下に運動をする場合 (図 4(A)) の角振動数を求めなさい。更に、表 1 の値を代入して振動周期を求めなさい。
- (B) 棒が水平を保ったまま主に横方向に運動をする場合 (図 4(B)) の角振動数を求めなさい。更に、表 1 の値を代入して振動周期を求めなさい。

次に、棒がその重心の位置を変えず、シーソーのような運動をする場合 (図 4(C)) を考える。

- (C-1) 左右の小球の座標 (x_L, y_L) および (x_R, y_R) を求めたのち、左右のばねがのびた長さ $\Delta\ell_L$ および $\Delta\ell_R$ を L 、 ℓ_1 、 ϕ 、 θ のうち必要なものを用いて表しなさい。
- (C-2) 微小量の 2 次以上を無視して、 $\Delta\ell_L$ および $\Delta\ell_R$ を L 、 ϕ を用いて表しなさい。
- (C-3) この運動の角振動数を求めなさい。更に、表 1 の値を代入して振動周期を求めなさい。

表 1：タコマ橋のゆれを考える際に用いる値

名称	記号	数値	単位
小球の質量	m	1.0×10^3	kg
ばね定数	k	1.5×10^3	N/m
つりあいの状態でのばねの長さ	ℓ_1	50	m
重力加速度の大きさ	g	9.8	m/s ²

[II]

空気の主成分である窒素も、冷やすと液体となる。このような気体から液体への変化をファンデルワールスの状態方程式

$$p = \frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2} \quad (1)$$

を使って考えよう。この式で変数 p, V, T はそれぞれ1モルの窒素の圧力、体積、温度で、 R は気体定数である。また a と b は窒素分子の性質を表す正の定数である。表1に示された値を用いて、方程式(1)に関する以下の問いに答えなさい。ただし、この問題では $V > b$ かつ $p \geq 0$ の場合だけを考える。

表 1: 気体を表す諸定数

名称	記号	数値
アボガドロ数	N_A	$6.022 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
気体定数	R	$8.314 \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$
窒素 N_2	a	$1.41 \times 10^{-1} \text{ Pa m}^6 \text{ mol}^{-2}$
	b	$3.92 \times 10^{-5} \text{ m}^3 \text{ mol}^{-1}$

1. 定数 b は、分子が有限の大きさを持っているため、いくら強い圧力をかけても体積はつねに $V > b$ となることを表している。表1の値をもとに窒素分子の大きさを考えよう。実際の窒素分子は鉄アレイのような形をしているが、ここでは立方体と仮定し、その辺の長さ ℓ を有効数字3桁で求めなさい。
2. 定数 a は分子の間に引力が働く効果を表している。体積 V を $V + \Delta V$ に増やすには、

$$\Delta W' = \frac{a}{V^2} \Delta V \quad (2)$$

だけのエネルギーがいる。1モルのガスには N_A 個の分子が入ってお互いに引力をおよぼしているが、遠く離れた分子同士の引力は無視できるので分子同士の引力のエネルギーは

$$U = N_A u(r) \quad (3)$$

と近似することができる。ここで $u(r)$ は分子1個あたりの引力のエネルギー、 r は

$$\frac{4\pi}{3} \left(\frac{r}{2}\right)^3 N_A = V \quad (4)$$

により定義される分子間の平均距離である。引力のエネルギー $u(r)$ を求めなさい。

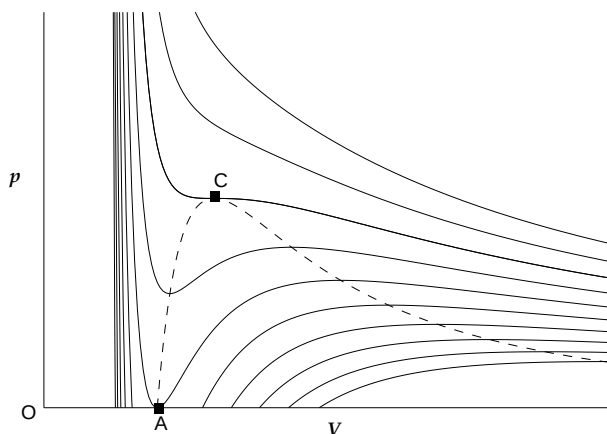


図 1: ファンデルワールスの状態方程式の $p-V$ 図。各実線は、温度を一定に保ってこの体系を変化させた場合の圧力と体積の関係を表している。各実線の上で圧力 p は、破線との交点で極小あるいは極大となる。

3. 温度を一定に保ったまま体積 V を変化させると、圧力 p は図 1 の破線との交点で極大あるいは極小となる。この破線を表す関数 $p = p(V)$ を求めなさい。
4. 図 1 の点 A では圧力が 0 となる。点 A での体積 V_A を求め、温度が $T_A = a/(4bR)$ であることを示しなさい。
5. 図 1 の破線上で圧力が最大となる点 C での体積 V_C 、温度 T_C 、圧力 p_C を求めなさい。また表 1 の値を用いて、 T_C を有効数字 3 桁で求めなさい。

(次頁につづく)

6. 理想気体では圧力と温度が与えられれば、体積は $V = RT/p$ により求まる。しかしファンデルワールスの状態方程式では、 $p < p_C$ の場合、温度と圧力が同じ値となる体積が3つ存在する。ただし、図1で破線より下の状態は、問7で述べる理由により安定に存在できない。このことを考慮して温度が $T = T_A$ のとき、安定な状態が存在しない範囲 $V_{\min} < V < V_{\max}$ (図2) を求めなさい。

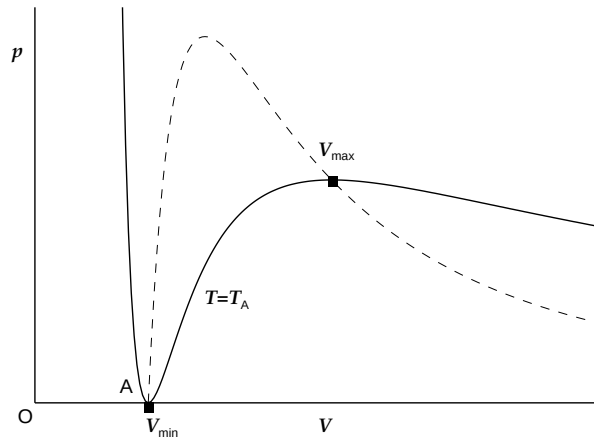


図 2: 温度が T の場合の体積 V と圧力 p 。

7. 温度が一定に保たれている場合、図1で破線より下の領域では体積が増えると圧力が上がるので、少しでも膨張して体積が増え始めると、圧力が再び元の値に戻るまで膨張が止まらない。マックスウェルは等温線と等圧線を結んだサイクルを考え、この膨張の際に発生する熱が

$$Q = \int_{V_2}^{V_3} p dV - p_2 (V_3 - V_2) \quad (5)$$

であることを示した(図3を参照のこと)。ここで V_2 と p_2 は不安定な状態での体積と圧力で、 V_3 は圧力が p_2 となる体積である。式(5)の右辺第1項は温度を一定に保ちながら膨張する場合の仕事、第2項はその周囲においた理想気体になされた仕事である。同様に体積が減少して V_1 へと変化した場合に発生する熱は

$$Q' = \int_{V_2}^{V_1} p dV - p_2 (V_1 - V_2) \quad (6)$$

と表される。不安定な状態からの膨張により発生する熱 $Q = Q(V_2, V_3)$ 、収縮により発生する熱 $Q' = Q'(V_2, V_1)$ を求めなさい。なお膨張や収縮の間、温度は一定に保たれているとして式(5)および式(6)の積分を行うこと。

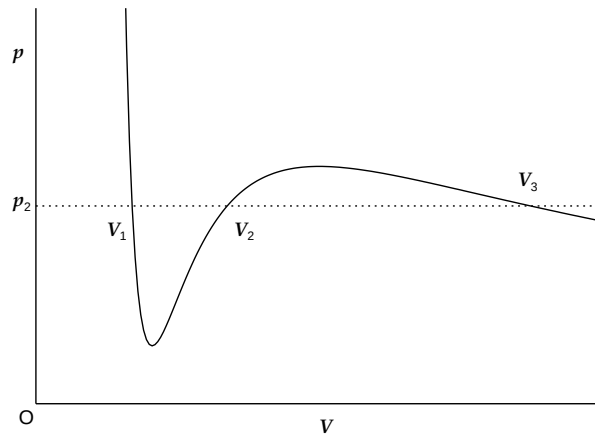


図 3: 実線はある温度での圧力 p と体積 V の関係を表す。体積が V_1, V_2, V_3 のときの圧力はいずれも p_2 で等しい。実線と点線で囲まれた領域の面積は、式 (5) と (6) の右辺に等しい。

8. マックスウェルは、不安定な状態は発生する熱が多いほうに遷移しやすいという仮説を立てた。この仮説に従い、温度が $T = T_A$ で体積が $V_2 = 4b$ の状態は、膨張するか収縮するか答えなさい。
9. 前問の結果は、温度が T_A で圧力が $p_2 = RT_A/(V_2 - b) - a/V_2^2$ のとき、膨張するか収縮するかを判定する基準を与えていると読み替えることができる。この説に従い、温度を T_A に保ったまま圧力を p_C から徐々に下げていったときどのような変化が期待できるか述べなさい。
10. ファンデルワールスの方程式では、気体から液体への変化や液体の性質についてどのようなことが説明できるだろうか。気づいたことを箇条書きで示しなさい。

平成 28 年度

千葉大学先進科学プログラム入学者選考課題

課題 I

解答例

H28
解答例

解答例 [I]

1

- (A-1) つりあいの状態にあるとき，小球にはたらくばねの弾性力と重力は等しいので，ばねの伸び $\Delta\ell$ は次のようになる。

$$\begin{aligned} mg - k\Delta\ell &= 0 \\ \Delta\ell &= \frac{mg}{k} \end{aligned} \quad (1)$$

ばねの自然長の位置を基準とした重力の位置エネルギー $(-mg\Delta\ell)$ とばねの位置エネルギー $\left(\frac{k}{2}\Delta\ell^2\right)$ の和 U_0 は，

$$U_0 = -mg\Delta\ell + \frac{k}{2}\Delta\ell^2 \quad (2)$$

となる。

- (A-2) 小球の運動エネルギーは，

$$T = \frac{m}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = \frac{m}{2} A^2 \omega^2 \sin^2 \omega t \quad (3)$$

となる。また，重力の位置エネルギーとばねの位置エネルギーの和は，

$$\begin{aligned} U &= -mg(\Delta\ell + A \cos \omega t) + \frac{k}{2}(\Delta\ell + A \cos \omega t)^2 \\ &= -mg\Delta\ell - mgA \cos \omega t + \frac{k}{2}\Delta\ell^2 + \Delta\ell k A \cos \omega t + \frac{k}{2}A^2 \cos^2 \omega t \\ &= U_0 + \frac{k}{2}A^2 \cos^2 \omega t, -mgA \cos \omega t + \Delta\ell k A \cos \omega t \\ &= U_0 + \frac{k}{2}A^2 \cos^2 \omega t \end{aligned} \quad (4)$$

となる。

- (A-3) 力学的エネルギーは，

$$E = T + U = \frac{m}{2} A^2 \omega^2 \sin^2 \omega t + U_0 + \frac{k}{2} A^2 \cos^2 \omega t$$

となる。力学的エネルギーが保存することから、任意の時刻において、力学的エネルギーの時間変化が0になることを用いると、

$$\begin{aligned}\frac{dE}{dt} &= mA^2\omega^3 \sin \omega t \cos \omega t - kA^2\omega \cos \omega t \sin \omega t = 0 \\ m\omega^2 &= k \\ \omega &= \sqrt{\frac{k}{m}} = \omega_a\end{aligned}\quad (5)$$

となる。

(B-1) 小球の位置とその時間変化は、

$$x = \ell_1 \cos \theta, \quad y = \ell_1 \sin \theta \quad (6)$$

$$\frac{dx}{dt} = -\ell_1 \frac{d\theta}{dt} \sin \theta, \quad \frac{dy}{dt} = \ell_1 \frac{d\theta}{dt} \cos \theta \quad (7)$$

となる。また小球の運動エネルギーは、

$$T = \frac{m}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \frac{m}{2} \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 = \frac{m}{2} \ell_1^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \quad (8)$$

となり、小球が静止しているときを基準とした重力の位置エネルギーは、

$$U = mg\ell_1(1 - \cos \theta) \quad (9)$$

となる。

(B-2) 任意の時刻において、力学的エネルギーの時間変化が0になることを用いると、

$$\begin{aligned}T &= \frac{m}{2} \ell_1^2 (B\omega_b \sin \omega_b t)^2 \\ U &\approx mg\ell_1 \left(1 - 1 + \frac{\theta^2}{2} \right) = \frac{m}{2} g\ell_1 \theta^2 = \frac{m}{2} g\ell_1 (B \cos \omega_b t)^2 \\ E &= T + U = \frac{m}{2} \ell_1^2 (B\omega_b \sin \omega_b t)^2 + \frac{m}{2} g\ell_1 (B \cos \omega_b t)^2 \\ \frac{dE}{dt} &= m\ell_1^2 B^2 \omega_b^3 \sin \omega_b t \cos \omega_b t - mg\ell_1 B^2 \omega_b \cos \omega_b t \sin \omega_b t \\ &= (\ell_1 \omega_b^2 - g) m\ell_1 B^2 \omega_b \sin \omega_b t \cos \omega_b t = 0 \\ \omega_b &= \sqrt{\frac{g}{\ell_1}}\end{aligned}\quad (10)$$

となる。

(C-1) 小球の位置とその時間変化は,

$$x = \ell \cos \theta, \quad y = \ell \sin \theta \quad (11)$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d\ell}{dt} \cos \theta - \ell \frac{d\theta}{dt} \sin \theta, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{d\ell}{dt} \sin \theta + \ell \frac{d\theta}{dt} \cos \theta \quad (12)$$

となる。また小球の運動エネルギーは,

$$\begin{aligned} T &= \frac{m}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} m \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 \\ &= \frac{m}{2} \left[\left(\frac{d\ell}{dt} \right)^2 + \ell^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (13)$$

となり, 小球が静止しているときを基準とした重力の位置エネルギーは,

$$U = mg(\ell_0 - \ell \cos \theta) + \frac{1}{2} k(\ell - \ell_0)^2 \quad (14)$$

となる。

(C-2) ばねの長さ ℓ と角度 θ がそれぞれ, $\ell = \ell_1 + A \cos \omega_a t$, $\theta = B \sin \omega_b t$, かつ $\omega_a \neq \omega_b$ であるとき, 任意の時刻において, 力学的エネルギーの時

H28

解答例

間変化が0になることを用いると,

$$\begin{aligned}
 T &= \frac{m}{2} A^2 \omega_a^2 \sin^2 \omega_a t + \frac{m}{2} (\ell_1 + A \cos \omega_a t)^2 B^2 \omega_b^2 \cos^2 \omega_b t \\
 &\approx \frac{m}{2} A^2 \omega_a^2 \sin^2 \omega_a t + \frac{m}{2} \ell_1^2 B^2 \omega_b^2 \cos^2 \omega_b t \\
 \frac{dT}{dt} &= mA^2 \omega_a^3 \sin \omega_a t \cos \omega_a t - m \ell_1^2 B^2 \omega_b^3 \cos \omega_b t \sin \omega_b t \\
 U &\approx mg \left[\ell_0 - (\ell_0 + \Delta \ell + A \cos \omega_a t) \left(1 - \frac{B^2 \sin^2 \omega_b t}{2} \right) \right] \\
 &\quad + \frac{k}{2} (\ell_0 + \Delta \ell + A \cos \omega_a t - \ell_0)^2 \\
 &\approx mg \left[-\Delta \ell - A \cos \omega_a t + \frac{\ell_1}{2} B^2 \sin^2 \omega_b t \right] + \frac{k}{2} (\Delta \ell + A \cos \omega_a t)^2 \\
 &= -mg \Delta \ell + \frac{1}{2} k \Delta \ell^2 + (-mg + k \Delta \ell) A \cos \omega_a t \\
 &\quad + \frac{m}{2} g \ell_1 B^2 \sin^2 \omega_b t + \frac{k}{2} A^2 \cos^2 \omega_a t \\
 &= -mg \Delta \ell + \frac{k}{2} \Delta \ell^2 + \frac{m}{2} g \ell_1 B^2 \sin^2 \omega_b t + \frac{k}{2} A^2 \cos^2 \omega_a t \\
 \frac{dU}{dt} &= mg \ell_1 B^2 \omega_b \sin \omega_b t \cos \omega_b t - k A^2 \omega_a \cos \omega_a t \sin \omega_a t
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 mA^2 \omega_a^3 &= k A^2 \omega_a \\
 \omega_a &= \sqrt{\frac{k}{m}}
 \end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned}
 m \ell_1^2 B^2 \omega_b^3 &= mg \ell_1 B^2 \omega_b \\
 \omega_b &= \sqrt{\frac{g}{\ell_1}}
 \end{aligned} \tag{16}$$

となる。

(C-3) 小球は r 方向と θ 方向にそれぞれ単振動しており、小球の軌跡は図 A1 の左図のようになる。 $|\theta|$, $|x|$, $\left| \frac{d\theta}{dt} \right|$ が十分小さく、3 次以上の項を無視できるとすれば (加速度や遠心力が小さい), それぞれの方向に対して独立した運動となる。 r 方向の運動の周期は $2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$, θ 方向の運動の

周期は $2\pi\sqrt{\frac{\ell_1}{g}}$ となる。また実際の実験でこの近似を成立させるためには、ばね定数を十分大きくすることにより変位 ℓ を小さくさせる、ばねの自然長 ℓ_0 を長くし角速度を遅くさせるなど工夫する必要がある。また図 A1 の右図は、 $\omega_a \gg \omega_b \left(\frac{k}{m} \gg \frac{g}{l_1} \right)$ の場合の軌跡の様子である。

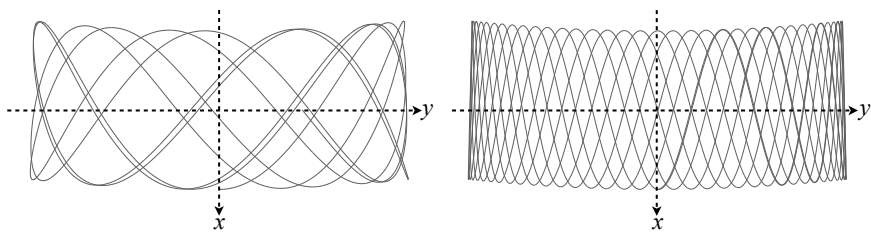


図 A1：小球の軌跡。図中の x 軸と y 軸の交点 (原点) はつりあいの位置を表す。(左図) ω_a と ω_b の値が近い時の軌跡。(右図) $\omega_a \gg \omega_b$ の時の軌跡。

H28

解答例

2

(A) 左右のばねののびを Δx とし、問1を参考にとすると、

$$\begin{aligned}
 U &= \frac{k}{2} [(\Delta x + \ell_1 - \ell_0)^2 + (\Delta x + \ell_1 - \ell_0)^2] - 3mg(\Delta x + \ell_1 - \ell_0) \\
 &= k [\Delta x^2 + 2\Delta x(\ell_1 - \ell_0) + (\ell_1 - \ell_0)^2] - 3mg(\Delta x + \ell_1 - \ell_0) \\
 &= k\Delta x^2 + (-3mg + 2k(\ell_1 - \ell_0))\Delta x + k(\ell_1 - \ell_0)^2 - 3mg(\ell_1 - \ell_0) \\
 &= k\Delta x^2 + k(\ell_1 - \ell_0)^2 - 3mg(\ell_1 - \ell_0) \\
 T &= \frac{3m}{2} \left(\frac{d\Delta x}{dt} \right)^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 k &= \frac{3m}{2}\omega^2 \\
 \omega &= \sqrt{\frac{2k}{3m}}
 \end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{aligned}
 f_v &= \frac{\omega}{2\pi} = \frac{\sqrt{\frac{3.0 \times 10^3}{3.0 \times 10^3}}}{2\pi} [\text{Hz}] \approx 0.16 [\text{Hz}] \\
 &= 9.5 [\text{min}^{-1}] \\
 T_v &= 6.3 [\text{s}]
 \end{aligned} \tag{18}$$

となる。ここで f_v と T_v はそれぞれ振動数と振動周期を表す。

(B) 振り子のような運動をすると考え、問[1]を参考にすると、

$$\begin{aligned}
 U &= \frac{k}{2} [(\ell_1 - \ell_0)^2 + (\ell_1 - \ell_0)^2] + 3mg(\ell_0 - \ell_1 \cos \theta) \\
 &\approx k(\ell_1 - \ell_0)^2 + 3mg \left(\ell_0 - \ell_1 + \frac{\ell_1 \theta^2}{2} \right) \\
 T &= \frac{3m}{2} \ell_1^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \\
 \frac{3}{2} mg \ell_1 &= \frac{3}{2} \omega^2 m \ell_1^2 \\
 \omega &= \sqrt{\frac{g}{\ell_1}} \quad (19) \\
 f &= \frac{\sqrt{9.8}}{2\pi} [\text{Hz}] \approx 0.070 [\text{Hz}] \\
 &= 4.2 [\text{min}^{-1}] \\
 T &= 14 [\text{s}] \quad (20)
 \end{aligned}$$

となる。ここで f と T はそれぞれ振動数と振動周期を表す。

H28

解答例

(C-1) 左右の小球の座標は図 A2 に示す。また、 $\Delta\ell_L = \Delta\ell_-$ 、 $\Delta\ell_R = \Delta\ell_+$ とおくと、

$$\Delta\ell_{\pm} = \sqrt{\left(\ell_1 \mp \frac{L}{2} \sin \phi\right)^2 + \left(\pm \frac{L}{2} \mp \frac{L}{2} \cos \phi\right)^2} - \ell_1 \quad (21)$$

となる。

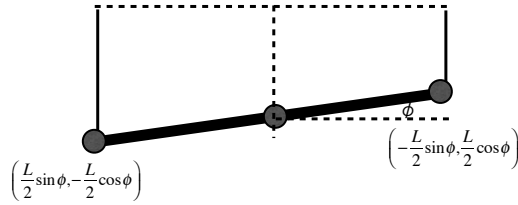


図 A2

(C-2)

$$\begin{aligned} \Delta\ell_{\pm} &\approx \sqrt{\left(\ell_1 \mp \frac{L}{2} \phi\right)^2 + \left(\pm \frac{L}{4} \phi^2\right)^2} - \ell_1 \\ &\approx \sqrt{\ell_1^2 \mp \ell_1 L \phi + \frac{L^2}{4} \phi^2} - \ell_1 \\ &= \ell_1 \sqrt{1 \mp \frac{L}{\ell_1} \phi + \frac{1}{\ell_1^2} \frac{L^2}{4} \phi^2} - \ell_1 \\ &\approx \ell_1 \left[1 + \frac{1}{2} \left(\mp \frac{L}{\ell_1} \phi + \frac{1}{\ell_1^2} \frac{L^2}{4} \phi^2 \right) - \frac{1}{8} \left(\mp \frac{L}{\ell_1} \phi + \frac{1}{\ell_1^2} \frac{L^2}{4} \phi^2 \right)^2 \right] - \ell_1 \\ &\approx \mp \frac{L}{2} \phi + \frac{1}{\ell_1} \frac{L^2}{8} \phi^2 - \frac{1}{8} \left(\frac{L^2}{\ell_1} \phi^2 \right) \\ &\approx \mp \frac{L}{2} \phi \end{aligned} \quad (22)$$

(C-3) この場合の運動エネルギー、および重力の位置エネルギーとばねの位

置エネルギーの和を求め、問1を参考にすると、

$$\begin{aligned}
 U &\approx \frac{k}{2} \left[\left(-\frac{L}{2}\phi + \ell_1 - \ell_0 \right)^2 + \left(\frac{L}{2}\phi + \ell_1 - \ell_0 \right)^2 \right] \\
 &= \frac{k}{2} \left[2 \left(\frac{L}{2}\phi \right)^2 + 2(\ell_1 - \ell_0)^2 \right] \\
 &= k \left(\frac{L}{2} \right)^2 \phi^2 + k(\ell_1 - \ell_0)^2 \\
 T &= 2 \times \frac{m}{2} \left(\frac{L}{2} \right)^2 \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 k \left(\frac{L}{2} \right)^2 &= \omega^2 m \left(\frac{L}{2} \right)^2 \\
 \omega &= \sqrt{\frac{k}{m}}
 \end{aligned} \tag{23}$$

$$\begin{aligned}
 f_t &= \frac{\sqrt{\frac{1.5 \times 10^3}{1.0 \times 10^3}}}{2\pi} [\text{Hz}] \approx 0.19 [\text{Hz}] \\
 &= 12 [\text{min}^{-1}] \\
 T_t &= 5.1 [\text{s}]
 \end{aligned} \tag{24}$$

となる。ここで f_t と T_t はそれぞれ振動数と振動周期を表す。

H28

解答例

平成 28 年度

千葉大学先進科学プログラム入学者選考課題

課題 II

解答例

H28
解答例

解答例 [II]

1.

$$\ell^3 N_A = b \quad (7)$$

と $N_A = 6.022 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ より

$$\ell = \left(\frac{b}{N_A} \right)^{1/3} = 4.02 \times 10^{-10} \text{ m} \quad (8)$$

2.

$$W' = \int^V \frac{a}{(V')^2} dV' = -\frac{a}{V} \quad (9)$$

ここで体積が十分に大きいとき、分子間の引力は無視できるとして積分定数を定めた。

$$u = \frac{U}{N_A} = \frac{W'}{N_A} = -\frac{a}{N_A V} = -\frac{6a}{\pi N_A^2 r^3} \quad (10)$$

3. 温度を一定として p を V で微分すると

$$\frac{dp}{dV} = -\frac{RT}{(V-b)^2} + \frac{2a}{V^3} \quad (11)$$

この右辺が 0 となる条件とファンデルワールスの状態方程式から温度 T を消去すると

$$p = \frac{a(V-2b)}{V^3} \quad (12)$$

が得られる。

4. 前問で求めた破線の方程式に $p = 0$ を代入すると、 $V_A = 2b$ が得られる。
また $V_A = 2b$ と $p = 0$ をファンデルワールスの状態方程式に代入すると
 $T_A = a/(4bR)$ が得られる。

5. 点 C では $dp/dV = 0$ かつ

$$\frac{d^2p}{dV^2} = 2\frac{RT}{(V-b)^3} - \frac{6a}{V^4} = 0 \quad (13)$$

なので、

$$V_C = 3b \quad (14)$$

$$T_C = \frac{8a}{27bR} \quad (15)$$

$$p_C = \frac{a}{27b^2} \quad (16)$$

数値を代入すると

$$T_C = 128 \text{ K} \quad (17)$$

が得られる。

6. 温度が T_A のとき問3で求めた $dp/dV = 0$ となる条件は

$$-\frac{a}{4b(V-b)^2} + \frac{2a}{V^3} = 0 \quad (18)$$

と表される。これを整理すると

$$V^3 - 8bV^2 + 16b^2V - 8b^3 = 0 \quad (19)$$

となる。この3次方程式は点Aを通ることを利用すると、

$$(V-2b)(V^2-6bV+4b^2) = 0 \quad (20)$$

と因数分解できる。上式の左辺第2項の2次方程式の解は $V = (3 \pm \sqrt{5})b$ なので、 $V_{\min} = 2b$, $V_{\max} = (3 + \sqrt{5})b$ が得られる。

- 7.

$$Q = RT \log \left(\frac{V_3 - b}{V_2 - b} \right) + \frac{a}{V_3} - \frac{a}{V_2} - p_2(V_3 - V_2) \quad (21)$$

$$Q' = RT \log \left(\frac{V_1 - b}{V_2 - b} \right) + \frac{a}{V_1} - \frac{a}{V_2} - p_2(V_1 - V_2) \quad (22)$$

8. 温度が T_A で体積が V_2 の時と圧力が等しいことから

$$\frac{a}{4b(V_2 - b)} - \frac{a}{V_2^2} = \frac{a}{4b(V - b)} - \frac{a}{V^2} \quad (23)$$

この方程式は根の一つが $V = V_2$ である3次方程式であることに注意して変形し、 $V_2 = 4b$ を代入すると、

$$V^2 - 9bV + 12b^2 = 0 \quad (24)$$

が得られる。従って

$$V_1 = \frac{9 - \sqrt{33}}{2}b = 1.6277b \quad (25)$$

$$V_3 = \frac{9 + \sqrt{33}}{2}b = 7.3723b \quad (26)$$

数値を代入すると $Q = 3.72 \times 10^{-3}a/b$, $Q' = 2.27 \times 10^{-2}a/b$ が得られる。従って この場合は体積が V_1 になるまで収縮する。

9. 圧力が p_C の場合は $V < 2b$ の状態だけが許される。圧力が

$$p_{\max} = \frac{RT_A}{V_{\max} - b} - \frac{a}{V_{\max}^2} \quad (27)$$

より低くなると二つの可能性が現れるが、圧力が比較的高い場合は $Q' > Q$ となるため体積の小さい状態が実際には実現しやすい。さらに圧力が下がると、 $Q' < Q$ となるので体積が急激に増大する (気化)。圧力が非常に低い状態では体積が大きい (密度の低い) 状態だけが実現する。

10. 例えば

- (a) 気体と液体の間間的な密度 (体積) が存在しないのは、温度がある上限 (ファンデルワールスの方程式では T_C) より低いときだけである。高温では圧力を上げると、体積は連続的に変化する。
- (b) 液体となるのは、低温で圧力が高いときだけである。
- (c) 液体では分子の大きさと分子間の距離が同程度である。
- (d) 液体でも圧力を上げると、わずかながら体積が小さくなる。
- (e) 分子が小さく、分子間の引力が強いほど、液体と気体の区別がある上限の温度 (T_C) が高くなる。(H₂O のように液体になりやすい分子はお互いの引力が強い。)
- (f) 液体から気体への変化も発熱・吸熱により説明できる。
- (g) 温度を制御することにより、気体から液体への変化を (相転移を経ないで) 連続的な変化として実現することができる。

平成 27 年度

千葉大学先進科学プログラム入学者選考課題

課題論述

課題[II-A], [II-B], [II-C], [II-D]

(10:00—15:30)

注意事項

課題 II には, [II-A], [II-B], [II-C], [II-D] の 4 題があります。

志望するコースによって, 次に示す問題を解答してください。

- ・物理学コース：
[II-A], [II-B] の 2 題を解答してください。
- ・フロンティアテクノロジーコース：
[II-A], [II-B], [II-C], [II-D] の中から 2 題を選択して解答してください。ただし, [II-A]あるいは[II-B]の少なくとも 1 題は選択すること。

課題[II-C], [II-D]は採録されていません。

II-A

ケプラーの法則を次のように記そう。

第1法則：それぞれの惑星は、恒星を焦点とする楕円軌道上を運動する。

第2法則：恒星と惑星とを結ぶ線分(動径)が、単位時間に描く面積(面積速度)は、それぞれの惑星について一定である。

第3法則：惑星の公転周期 T の2乗と、楕円軌道の半長軸 a の3乗の比は、同じ恒星を回るすべての惑星について同じ値である。

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$$

ただし、 G は万有引力定数、 M は恒星の質量である。

そうするとこの法則は、太陽系に限らず一般の恒星・惑星系で成立する。教科書でケプラーの法則および万有引力の法則について復習したうえで、太陽系外の恒星と惑星に関する以下の問いに答えなさい。またこの問題では、恒星の質量は惑星の質量より十分大きいので、恒星は静止していると見なしてよい。

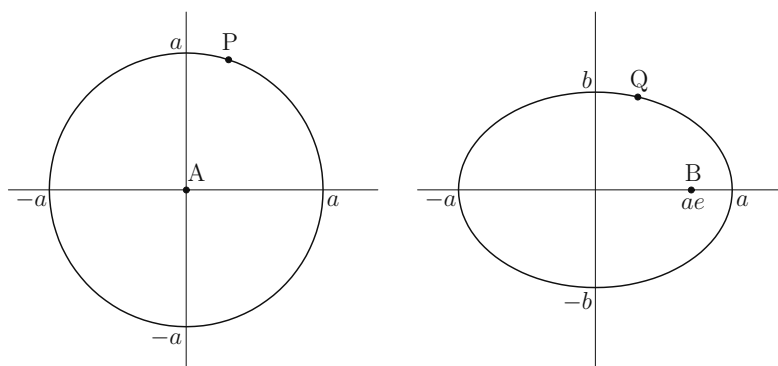


図 1: 円軌道 (左) と楕円軌道 (右)

問1 図1 (左) のように、惑星 P は、半径 a の円軌道を描き、恒星 A の周囲を周期 T_P で公転している。恒星 A の質量 M_A は太陽の質量の何倍か、地球の公転周期 T_0 と半長軸 a_0 、および T_P , a を用いて表しなさい。

問2 図1 (右) のように、惑星 Q は、半長軸が a で半短軸が $b = a\sqrt{1-e^2}$ の楕円軌道を描き、恒星 B の周囲を周期 T_Q で公転している。ここで e は離心率である。恒星 B の質量 M_B を、 M_A , T_P , T_Q を用いて表しなさい。

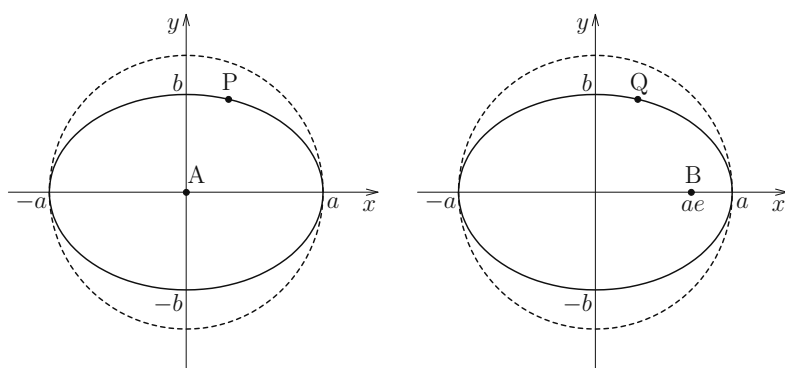


図 2: 円軌道 (左) と楕円軌道 (右)

さて、図 2 の実線は、地球 (観測点) から見た惑星 P と Q の軌道である。惑星 Q の軌道面は地球と恒星 B を結ぶ直線 (視線方向, z 軸) に対して垂直であるのに対して、惑星 P は軌道面が地球からの視線方向に対して傾いている。このため地球から観測すると、どちらも

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2(1-e^2)} = 1$$

という 2 次式で表される同じ大きさの楕円軌道上を反時計回りに運動しているように見える。しかし、恒星 A は楕円の中心 $(x, y) = (0, 0)$ に位置するのに対し、恒星 B は楕円の焦点 $(x, y) = (ae, 0)$ に位置する。

問 3 軌道が長軸と交わる点 $(x, y) = (a, 0)$ での惑星 P と Q の速さを、軌道の大きさを表す a, e , およびそれぞれの公転周期 T_P, T_Q を用いて表しなさい。ただし惑星 P の場合、地球と恒星 A を結ぶ方向の運動は測定できないとして、 xy 平面内の速さを求めなさい。

問 4 惑星 P が長軸と交わる位置 $(x, y) = (a, 0)$ を $t = t_P$ に通過したあと、

$$(x, y) = (0, b), (-a, 0), (0, -b)$$

のそれぞれを最初に通過する時刻を、 t_P と T_P で表しなさい。

問 5 惑星 Q が長軸と交わる位置 $(x, y) = (a, 0)$ を $t = t_Q$ に通過したあと、

$$(x, y) = (0, b), (-a, 0), (0, -b)$$

のそれぞれを最初に通過する時刻を、 t_Q と T_Q で表しなさい。

問 6 惑星 Q の速度の x 成分が最大となる位置を求めなさい。また、惑星 Q の速度の x 成分の最大値を a, e, T_Q を用いて表しなさい。

- 問 7 惑星 Q を軌道の長軸方向から観測した場合と、短軸方向から観測した場合のそれぞれについて、速度がどのように変化するか、方眼紙にグラフを描いて説明しなさい。グラフを描く際には離心率を $e = 1/2$ としなさい。横軸は、 $t_Q = 0$ を原点とし、 T_Q を 10 cm として、2 周期分を描くこと。縦軸のスケールは自分で自由に決めてよいが、長軸方向から観測した場合と短軸方向から観測した場合をひとつのグラフにまとめ、比較しやすいようにすること。
- 問 8 問 7 で求めた速度の時間変化は、惑星 P の速度変化とどのように違うか、その特徴について述べなさい。

II-B

単色の平行光の干渉について考えよう。以下では、単色光の波長を λ 、光速を c とする。

問1 まず、 x 軸上を正の向きに進行する単色光について考える。光は電場と磁場が振動する横波であり、平面波の進行と同様に考えることができる。ここで、 $x = x_0$ の位置で、光による電場の進行方向に垂直な成分が $E = E_0 \cos \omega t$ と書けるとする。

(1) ω を λ と c のうち必要な記号を用いて表しなさい。

(2) $x = x_0 + \ell$ の位置での電場の進行方向に垂直な成分を $E = E_0 \cos(\omega t - k\ell)$ と書くとき、 k を λ と c のうち必要な記号を用いて求めなさい。

問2 図1のように $x = 0$ であらわされる面 (yz 平面) 内に2本のスリットのある無限に広い板を置く。ただし、それぞれのスリットは y 軸上の2点 ($x = 0, y = -\delta$), ($x = 0, y = \delta$) にあり、 z 軸方向に無限に長く、その幅は δ や λ に比べて十分に小さいとする。この2本のスリットに、平行な単色光を入射する。単色光は位相がそろっており、スリットの位置において光は同位相であるとする。 xy 平面内で、原点 O を通り x 軸からの角度が θ で表される向きに距離 L だけ離れた点 P で光の強度を観察する。ただし、 L は δ と比べて十分に大きいとする。

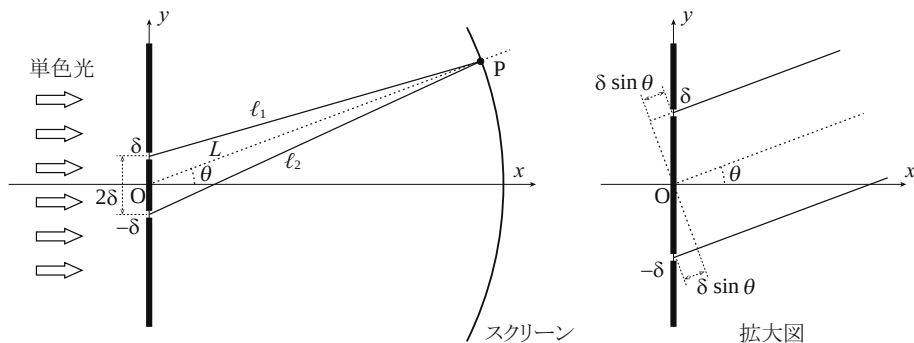


図1

(1) $\theta = 0$ の向きで観測された光の強度が極大であった。 θ を増加させていくとき、はじめて強度が極小になる θ を $\theta_{\min}$ とする。 $\sin \theta_{\min}$ を求めなさい。ただし、2つのスリットから θ の方向へ進む光について、スリットから点 P までの光路長 ℓ がそれぞれ $\ell_1 = L - \delta \sin \theta$, $\ell_2 = L + \delta \sin \theta$ であると考えればよい。

- (2) スリットで回折された光による点 P における電場を考える。 ℓ が λ や δ と比べて十分に大きいとき、電場は一定の平面内を向いており、 $E = E_1 \cos(\omega t - k\ell)$ と書ける。 E_1 はスリットからの距離に依存するが、 ℓ が δ に比べて十分に大きい時には、2つのスリットから回折されてくる光について E_1 は等しいとしてよい。電磁場は重ね合わせができるため、ある点における電場はそれぞれのスリットから回折されてきた光による電場を足し合わせるにより得られる。このことを用いると、点 P における電場 $E(\theta)$ は $E(\theta) = f(\theta) \cos(\omega t - kL)$ と書ける。このとき $f(\theta)$ を求めなさい。
- (3) $F(\theta) = \frac{f(\theta)}{f(0)}$ とするとき、 $F(\theta)$ を求め、 $F(\theta)$ が E_1 によらないことを示しなさい。
- (4) 光強度 I は、電場を2乗したものを1周期にわたって積分した値に比例する。比例係数を A として、光強度 I を θ の関数として求めなさい。また、 $\lambda = 500 \text{ nm}$, $\delta = 5.0 \mu\text{m}$ として、光強度 I を θ の関数として見たときのグラフを $-\frac{1}{10} < \theta < \frac{1}{10}$ の範囲で配布した方眼紙に描きなさい。グラフには極小点の θ の値を明記すること。ただし、グラフを描くときには、 θ は十分に小さいとして、 $\sin \theta$ を θ で近似してよい。

問3 次に、図2のように $x=0$ であらわされる面 (yz 平面) 内に1本のスリットのある無限に広い板を置く。ただし、スリットは y 軸上の線分 $-a < y < a$ 上で光を透過し、 z 軸方向に無限に長いとする。このスリットに、平行な単色光を入射することを考える。単色光は位相がそろっており、スリット内のすべての点において、光は同位相であるとする。 xy 平面内で、原点 O を通り x 軸からの角度が θ で表される向きに距離 L だけ離れた点 P で光の強度を観察する。ただし、 L は a と比べて十分に大きいとする。

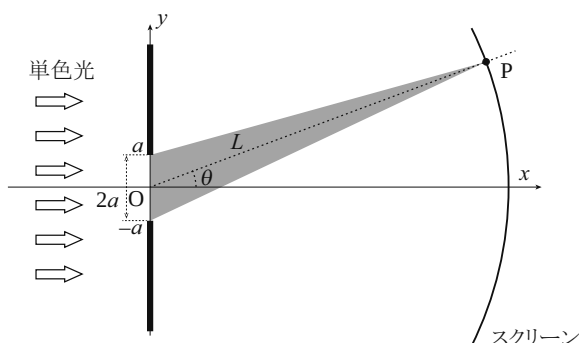


図2

- (1) スリットで回折された光による電場が問2(2)と同様に表されるとき、点 $(x=0, y=b, z=0)$ から広がっていく光について、点 P における電場 $E_1(b, \theta)$ を求めなさい。
- (2) (1) で求めた電場 $E_1(b, \theta)$ はスリット内の1点から回折されてきた光によるものである。スリット全体から回折してきた光による電場は b が $-a$ から a までの各点から広がってきた光による電場を積分することにより得られる。すなわち、点 P における電場 $E'(\theta)$ は

$$E'(\theta) = \int_{-a}^a E_1(b, \theta) db$$

と表すことができる。この積分を実行し、変形すると $E'(\theta) = g(\theta) \cos(\omega t - kL)$ となる。この $g(\theta)$ について、 $G(\theta) = \frac{g(\theta)}{g(0)}$ とおくと、 $G(\theta)$ を求めなさい。ただし、 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ は証明せずに用いてよい。

- (3) 光強度 I は、電場を2乗したものを1周期にわたって積分した値に比例する。比例係数を B として、光強度 I を θ の関数として求めなさい。また、 $\lambda = 500 \text{ nm}$, $a = 5.0 \mu\text{m}$ として、その関数のグラフを $-\frac{1}{10} < \theta < \frac{1}{10}$ の範囲で配布した方眼紙に描きなさい。グラフには極小点の θ の値を明記すること。ただし、グラフを描くときには、 θ は十分に小さいとして、 $\sin \theta$ を θ で近似してよい。
- (4) 単色光の代わりに白色光を入射した場合には、スクリーンにどのような像が映ると予想されるか? なぜそのように考えたかも含めて答えなさい。

II-C

短辺の長さ $2a$ ，長辺の長さ $2b$ ($a < b$) の長方形がある。3次元直交座標系において，この短辺は X 軸に平行，長辺は Y 軸に平行， Z 軸が長方形と直交し，かつ，対角線の交点と原点が一致するよう配置されている。

問 1 解答用紙の 3次元直交座標系に長方形を書き入れなさい。

原点 $(0,0,0)$ と点 $(1,1,1)$ を通る直線の周りの回転を考える。

問 2 X 軸上の点 $(c,0,0)$ (ただし $c > 0$) を，直線の周りに 360° 回転するとき，この点が描く軌跡を，解答用紙の 3次元直交座標系に書き入れなさい。

問 3 もとの長方形を，この直線の周りに 120° および 240° 回転させたときの位置にある長方形を，解答用紙の 3次元直交座標系に書き入れなさい。

もとの長方形を A ，上の回転移動後の位置にある長方形の一方を B ，他方を C とする。 A の各頂点から B および C の頂点のうち最も近い距離にあるすべての頂点を線分で結ぶ。同様に B から C および A に対して， C から A および B に対して，それぞれ線分で結ぶ。

問 4 線分は全部で何本あるか答えなさい。ただし，両端点が一致する線分は合わせて 1 本と数えること。

上の問題で求めた線分と長方形 A ， B ， C の短辺をあわせたものは，ある多面体の辺になっている。

問 5 面は全部でいくつあるか答えなさい。

問 6 多面体が正多面体となるとき $\frac{b}{a}$ の値を求めなさい。答えだけでなく計算の過程も示すこと。

上の問題の正多面体の各辺を三等分する内分点について考える。

問 7 正多面体のある頂点に関して，この頂点を端点とする各線分の内分点のうち，この頂点に近い方の内分点すべてを通過する平面に対して，この頂点から下ろした垂線の長さを， a を用いた式で表しなさい。答えだけでなく計算の過程も示すこと。

正多面体の全ての頂点に関して，問 7 で考察した平面で頂点側を切り落としたときにできる立体を考える。

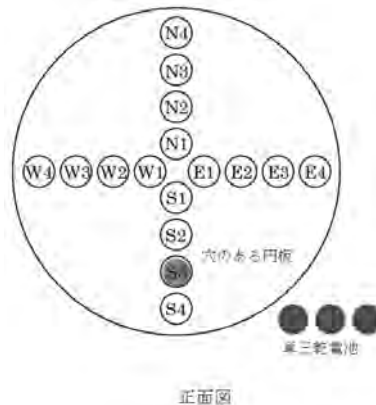
問 8 面は全部でいくつあるか答えなさい。

問 9 身近にあるものでこの多面体の構造を利用しているものを示しなさい。

II-D

準備された物品を使用して実験を行い、下記の問いに答えなさい。

[準備物品] 穴のある円筒、乾電池4本、ものさし、分度器、ストップウォッチ、消しゴム、マジック、シール・マーカー、かたい板、厚紙、水準器、はさみ、テープ(小)、テープ(大)、ボールペン赤青黒、方眼紙、座金、はかり(共通物品)



上図の円筒は、乾電池4本を適宜任意の穴に入れることにより自由にその重心位置を変えることができる。この円筒の運動について考える。この4本の乾電池はいずれの穴にも入れることができ、一つの穴には乾電池一本のみ入れられる。以下では乾電池を入れる穴を上図のアルファベットと数字で示す。例えば、S1とE1の穴に乾電池を入れるときは[S1.E1]と記述する。上図の例では、[S3]となる。また、この円筒は鉛直方向に自立することができる、安定して転がることができる。

- 問1** [S4.E4.N4.W4], [S3.E3.N3.W3], [S2.E2.N2.W2], [S1.E1.N1.W1] が斜面を転がる時の運動の様子を観察し、その違いを定量的に検討しなさい。また、その違いが生まれる原因を考察しなさい。実験にあたっては、準備されている物品のみを使用し、その実験装置の構成を図解するとともに、実験の手順および留意点を記しなさい。
- 問2** [S4.E4.W4], [S4.E3.W3], [S4.E2.W2], [S4.E1.W1] の水平面における周期運動(起き上がり小法師運動)を観察し、それらの周期を測定しなさい。測定された周期の相違について考察し、その現象について図および文章を用いて説明しなさい。周期の測定においては、初期の振れ角が45度になるように調整しなさい。また図中に、それぞれの円筒の重心位置も明示しなさい。
- 問3** 問2と同じ条件で、[S4], [S3], [S2], [S1]の周期を測り、その違いが生まれる原因を考察しなさい。
- 問4** 問2と問3の結果から、どのような場合に振動の周期が長くなると考えられるか。乾電池を4本穴に入れた場合で最も振動の周期が長くなる配置を述べなさい。またそのように考えた理由も述べなさい。

平成 27 年度

千葉大学先進科学プログラム入学者選考課題

課題 II-A 解答例

H27
解答例

II-A

解答例

問1 ケプラーの第3法則

$$\frac{T_P^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM_A} \quad (1)$$

$$\frac{T_0^2}{a_0^3} = \frac{4\pi^2}{GM_\odot} \quad (2)$$

を利用すると、

$$M_A = \left(\frac{T_0}{T_P}\right)^2 \left(\frac{a}{a_0}\right)^3 M_\odot \quad (3)$$

である。従って、 M_A は太陽の質量 $M_\odot$ の

$$\left(\frac{T_0}{T_P}\right)^2 \left(\frac{a}{a_0}\right)^3 \text{ 倍} \quad (4)$$

である。遠心力が aT^{-2} に比例するのに対して重力が $M_A a^{-2}$ に比例することからも同じ結論が得られる。

問2 ケプラーの第3法則を利用すると

$$M_B = \left(\frac{T_P}{T_Q}\right)^2 M_A \quad (5)$$

惑星の周期は軌道離心率に依らないことを認識してもらうのが出題の意図。

問3 惑星 P は一定の速度 $v = 2\pi a/T_P$ で回転しているが、 y 方向の速度は $b/a = \sqrt{1-e^2}$ 倍になり、

$$v = \frac{2\pi b}{T_P} = \sqrt{1-e^2} \frac{2\pi a}{T_P} \quad (6)$$

である。惑星 Q の速度は、面積速度一定の法則を使えば求まる。楕円の面積は $S = \pi ab$ であることと、点 $(x, y) = (a, 0)$ での恒星 B からの距離は $a(1-e)$ であることを考えると、

$$\frac{a(1-e)v}{2} = \frac{\pi ab}{T_Q} \quad (7)$$

より

$$v = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \frac{2\pi a}{T_Q} \quad (8)$$

問4 惑星 P は円軌道を一定の角速度で回転しているので、 $t = t_P + T_P/4, t_P + T_P/2, t_P + 3T_P/4$ の時刻に、それぞれ $(x, y) = (0, b), (-a, 0), (0, -b)$ を通過する。さらに、これらの時刻から 周期 T_P の整数倍だけ時間が経過したときにも通過する。

問5 惑星が $(x, y) = (a, 0)$ から $(0, b)$ までの運動によりできた図形の面積 S_1 は

$$S_1 = \frac{\pi ab}{4} - \frac{(ae)b}{2} \quad (9)$$

である。従って面積速度一定の法則により、時刻

$$t_1 = t_Q + \frac{S_1}{\pi ab} T_Q = t_Q + \left(\frac{1}{4} - \frac{e}{2\pi} \right) T_Q \quad (10)$$

に $(x, y) = (0, b)$ を通過する。同様に、時刻

$$t_2 = t_Q + \frac{T_Q}{2}, \quad t_3 = t_Q + \left(\frac{3}{4} + \frac{e}{2\pi} \right) T_Q \quad (11)$$

に、それぞれ $(x, y) = (-a, 0), (0, -b)$ を通過する。

問6 速度は、恒星 B と惑星 Q の間の重力により変化するので、加速度ベクトルは惑星 Q から恒星 B への方角を向く。従って、 $x = ae$ の場所で $dv_x/dt = 0$ であることが分かる。回転の向きを考えると、 v_x が最大となるのは $(x, y) = (ae, -b\sqrt{1-e^2})$ の場所である。面積速度一定の法則を使うと、

$$\frac{b\sqrt{1-e^2}v_{x,\max}}{2} = \frac{\pi ab}{T_Q} \quad (12)$$

なので

$$v_{x,\max} = \frac{2\pi a}{\sqrt{1-e^2}T_Q} \quad (13)$$

である。

表 1: 惑星 Q の速度。単位は $2\pi a/T_Q$ 。

$(t - t_Q)/T_Q$	v_x	v_y
0 = 0.000	0 = 0.000	$\sqrt{3}$ = 1.732
$1/6 - \sqrt{3}/(8\pi)$ = 0.098	$-2\sqrt{3}/3$ = -1.155	—
$1/4 - 1/(4\pi)$ = 0.170	-1 = -1.000	0 = 0.000
1/2 = 0.500	0 = 0.000	$-\sqrt{3}/3$ = -0.577
$3/4 + 1/(4\pi)$ = 0.830	1 = 1.000	0 = 0.000
$5/6 + \sqrt{3}/(8\pi)$ = 0.902	$2\sqrt{3}/3$ = 1.155	—

問 7 設問 3, 5, 6 で求めた惑星 Q の速度は以下の表 1 のようにまとめられる。これらの点は極大と極小および 0 となる点をすべて含むので、滑らかに結ぶとグラフの概形が求められる。

なお、上記の点を滑らかにつないだグラフで十分であるが、次のような媒介変数表示を用いれば、より精密なグラフが作成できる。

$$(x, y) = (a \cos \varphi, a\sqrt{1-e^2} \sin \varphi) \quad (14)$$

を使うと、媒介変数が $\varphi = 0$ から φ' まで変化したとき、恒星 B と惑星 Q を結ぶ線分の描く面積は

$$S = \frac{a^2\sqrt{1-e^2}}{2} (\varphi' - e \sin \varphi') \quad (15)$$

である。これを利用すると

$$t = t_Q + \frac{T_Q}{2\pi} (\varphi - e \sin \varphi) \quad (16)$$

$$v_x = -\frac{2\pi a}{T_Q} \sin \varphi (1 - e \cos \varphi)^{-1} \quad (17)$$

$$v_y = \frac{2\pi a}{T_Q} \sqrt{1-e^2} \cos \varphi (1 - e \cos \varphi)^{-1} \quad (18)$$

である。媒介変数表示を使うと図 3 が得られる。

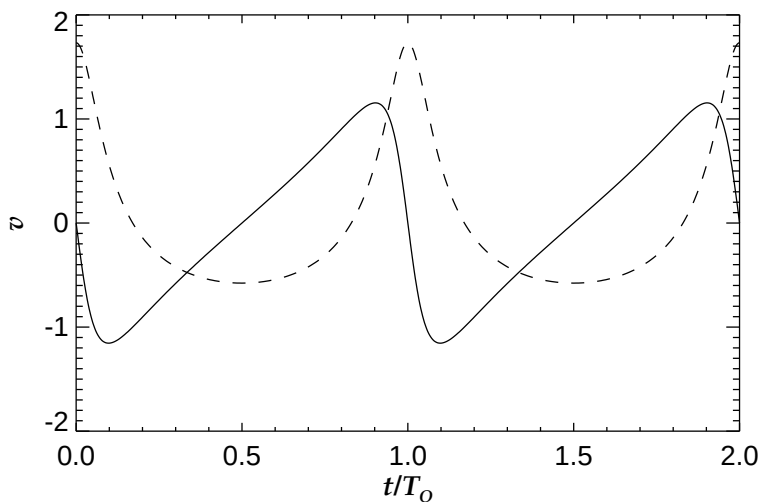


図 3: 惑星 Q の速度の時間変化。実線は v_x (短軸方向から見た場合の速度), 破線は v_y (長軸方向から見た場合の速度) を表す。

問 8 次のような特徴を記すことが期待される。

1. 惑星 Q の速度変化は単純な三角関数では表せない。
2. 速度 v_x が最大から最小に変化するのはいち早く、最小から最大への変化は遅い。
離心率 $e = 0.5$ の場合、前者は 周期の 20 % 弱である。
3. 速度 v_y の最大値は、最小値の絶対値より大きい。
4. 速度 v_y が正である期間は、負である期間より短い。
5. 速度の絶対値で比べると最大値は $\max |v_x| > \max |v_y|$ である。

出題の意図と解説

ケプラーの法則を用いて楕円運動する惑星の速度と位置を求める問題です。問 1 と問 2 では、第 3 法則を用いると惑星の運動から恒星の質量を導けることを狙っています。問 3, 4, 6, 7 では幾何学の知識と第 2 法則を組み合わせ、軌道上のいくつかの点を通る時刻とそこでの速度を求める力を試しています。第 2 法則は角運動量保存則と等価ですが、幾何学的に惑星の位置を推定することにも使えることを示した問題です。問 5 は加速度と力の関係をきちんと理解しているかどうかを問うています。問 8 は加速度変化から軌道の離心率 e が原理的に求められることを認識してもらうための問題です。問 3 から 7 は問 8 を論じるための導入にもなっていて、問 8 でグラフから特徴を読み取る力を試す問題になっています。全体として質点の力学と楕円の性質についての理解度および三角関数の演算能力を試す問題となっています。

この問題では理解しやすくするため、惑星の動きを望遠鏡で直接見ることができるとしました。しかし実際の惑星はもともと暗い上に、近くに明るい星がそばにいるため、直接その位置を測ることは困難です。昼間は太陽のために星が見えなかったり、満月の周りでは暗い星が見えづらくなるのと事情は似ています。ようやく数年前に太陽系の他の惑星のうち、親星から比較的遠いところにあるものが見つかるようになったばかりです。これらの軌道周期は 100 年よりも長いので、まだその運動を見ることはできません。

しかし 20 年前の 1995 年にスイスジュネーブ天文台のミッシェル・メイヨール (Michel Mayor) とディディエ・ケロス (Didier Queloz) はペガサス座 51 番星の周囲をわずか 4.2 日で公転する惑星を発見しました。正確に言うと、惑星本体ではなくペガサス座 51 番星が 4.2 日で私たちに近づいたり遠ざかったりするのを、光のドップラー効果を使って測定したのです。これは惑星の引力に引かれてペガサス座 51 番星も惑星と同じ周期でゆっくり回転します。惑星は軽いので、ペガサス座 51 番星のうごきはゆっくりで、この速度変化を追うためには高精度の測定が必要です。

惑星の軌道が楕円だと、問題文にあるように速度は三角関数とは違った変化を示します。この効果を使うことにより、直接は見えない惑星の軌道離心率を知ることができます。今回の問題をきっかけに、直接は見えない惑星でも、運動が楕円になっていることが検出できることを理解していただければ幸いです。

平成 27 年度

千葉大学先進科学プログラム入学者選考課題

課題 II-B 解答例

H27

解答例

II-B 解答

光の干渉に関しては、高等学校の教科書では光路差が波長の整数倍か半整数倍かにより明るくなったり暗くなったりすると学びます。それでは、多くの光が重なり合う時はどうなるでしょうか？ その場合、単純に二つの光路の光路差だけからでは議論できません。そこで、光が電磁波であることを思い起こし、波であれば（厳密にいうと線形波であれば）、重ね合わせの原理が成り立つことを用いて考えなければいけません。光は各点から伝播してきた電磁波の重ね合わせですので、それぞれの点から出てきた光を足し合わせればよいことになります。問2では、高校の教科書でも扱う複スリットによる回折を電磁波の重ね合わせの観点から考えてみます。そして、問3では、高校では扱われない単スリットによる回折を電磁波の重ね合わせの概念を用いて解いていきます。そのとき重要なのは、単スリットの場合、スリットの中の各点から伝播してきた光の重ね合わせとして考えないといけないということです。この場合、光路は無限にあるので、積分として考える必要があります。そうすると、単スリットでも光が回折されること、また、波長によって光の回折され具合が異なるので、単スリットを通った光も虹色に見えることがわかります。

問1 (1) $c = f\lambda$, $\omega = 2\pi f$ より, $\boxed{\omega = \frac{2\pi c}{\lambda}}$

(2) 速度 c で進行する波と考えると

$$E = E_0 \cos\left(\omega\left(t - \frac{\ell}{c}\right)\right) = E_0 \cos\left(\frac{2\pi c}{\lambda}\left(t - \frac{\ell}{c}\right)\right) = E_0 \cos\left(\frac{2\pi c}{\lambda}t - \frac{2\pi \ell}{\lambda}\right).$$

よって, $\boxed{k = \frac{2\pi}{\lambda}}$

問2 (1) 光路差は $2\delta \sin \theta$ であるので, $2\delta \sin \theta_{\min} = \frac{\lambda}{2}$. これより, $\boxed{\sin \theta_{\min} = \frac{\lambda}{4\delta}}$

(2) 2つのスリットからの電場を足し合わせればよいので,

$$E = E_1 \cos(\omega t - k(L - \delta \sin \theta)) + E_1 \cos(\omega t - k(L + \delta \sin \theta)).$$

三角関数の和を積にする公式を用いて

$$E = 2E_1 \cos(\omega t - kL) \cos(k\delta \sin \theta)$$

よって $\boxed{f(\theta) = 2E_1 \cos(k\delta \sin \theta)}$

(3) $f(0) = 2E_1$ である。これより

$$\boxed{F(\theta) = \cos(k\delta \sin \theta)}$$

(4) 強度 I は

$$I = A \int_0^{2\pi} 4E_1^2 \cos^2(\omega t - kL) \cos^2(k\delta \sin \theta) dt = \frac{4\pi A E_1^2}{\omega} \cos^2\left(\frac{2\pi\delta}{\lambda} \sin \theta\right)$$

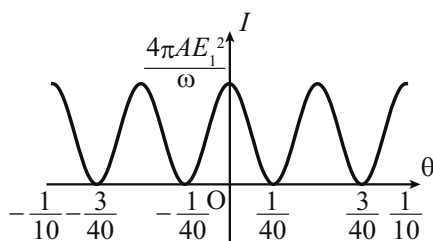
よって, $\boxed{I = \frac{4\pi A E_1^2}{\omega} \cos^2(k\delta \sin \theta)}$

参考までに、一般的には周期で割った平均をとるので、平均も示しておく。この電場の周期は $\frac{2\pi}{\omega}$ であるので、平均は $2AE_1^2 \cos^2(k\delta \sin \theta)$ となる。

$$\sin \theta \sim \theta \text{ とすると } I = \frac{4\pi A E_1^2}{\omega} \cos^2(k\delta \theta) \text{ となる.}$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \text{ より値を入れると, } I = \frac{4\pi A E_1^2}{\omega} \cos^2(20\pi\theta)$$

グラフを描くと図のようになる。



問 3 (1) 問 1 と同様に考えると, $E = E_1 \cos(\omega t - k(L - b \sin \theta))$

(2) 題意より比例定数を E_2 とすると

$$\begin{aligned} E'(\theta) &= \int_{-a}^a E_2 \cos(\omega t - k(L - b \sin \theta)) db \\ &= \frac{E_2}{k \sin \theta} [\sin(\omega t - k(L - b \sin \theta))]_{b=-a}^{b=a} \\ &= \frac{E_2}{k \sin \theta} [\sin(\omega t - k(L - a \sin \theta)) - \sin(\omega t - k(L + a \sin \theta))] \\ &= \frac{E_2}{k \sin \theta} \cos(\omega t - kL) \sin(ka \sin \theta) \end{aligned}$$

よって, $g(\theta) = \frac{E_2}{k \sin \theta} \sin(ka \sin \theta)$ 。

ここで, $g(0) = \lim_{\theta \rightarrow 0} g(\theta) = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{E_2}{k} \frac{ka \sin \theta}{\sin \theta} \frac{\sin(ka \sin \theta)}{ka \sin \theta} = E_2 a$ よって、

$$G(\theta) = \frac{\sin(ka \sin \theta)}{ka \sin \theta}$$

(3) 強度 I は

$$\begin{aligned} I &= B \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \left(\frac{E_1}{k \sin \theta} \right)^2 \cos^2(\omega t - kL) \sin^2(ka \sin \theta) dt \\ &= \frac{\pi B}{\omega} \left(\frac{E_1}{k \sin \theta} \right)^2 \sin^2(ka \sin \theta) \end{aligned}$$

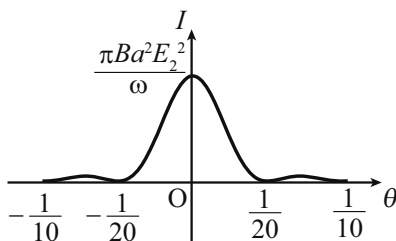
$$\text{よって, } I = \frac{\pi B}{\omega} \left(\frac{E_1}{k \sin \theta} \right)^2 \sin^2(ka \sin \theta)$$

問 2 と同様に平均をとると, 周期は $\frac{2\pi}{\omega}$ であるので, 平均は $\frac{B}{2} \left(\frac{E_1}{k \sin \theta} \right)^2 \sin^2(ka \sin \theta)$

$\sin \theta \sim \theta$ とすると, $I = \frac{\pi B}{\omega} \left(\frac{E_1}{k\theta} \right)^2 \sin^2(ka\theta)$ となる。

値を入れると, $I = \frac{\pi B a^2 E_2^2}{\omega} \left(\frac{1}{20\pi\theta} \right)^2 \sin^2(20\pi\theta)$

グラフを描くと図のようになる。



(4) (3) のグラフより暗線に相当する角は波長が長いほど外側に来る。つまり、波長が長くなればなるほど外側に回折するようになる。これを考慮すると、波長が長い赤色の光は外側に、波長の短い紫色の光は内側に見えるはずである。よって、中央の光はほぼ白色のままだが、回折した光は虹色に見える。外側が赤色、内側が紫色に見えると考えられる。

平成 27 年度

千葉大学先進科学プログラム入学者選考課題

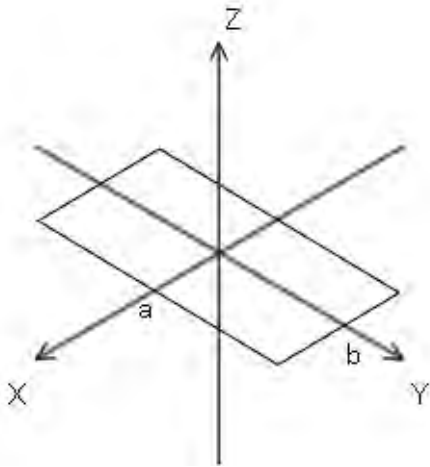
課題 II-C 解答例

H27
解答例

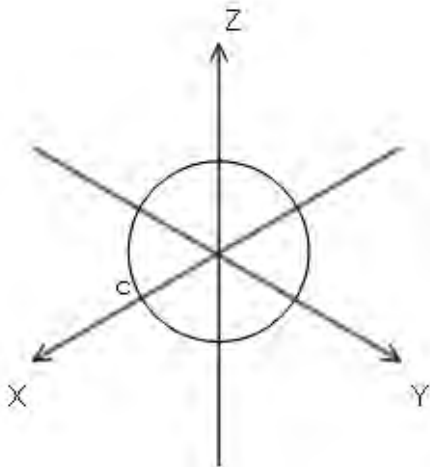
II-C

解答例

問1 以下のような図が書かれていれば正解。(短辺長辺の向きが逆の場合この問題では1/2部分点を与える。)

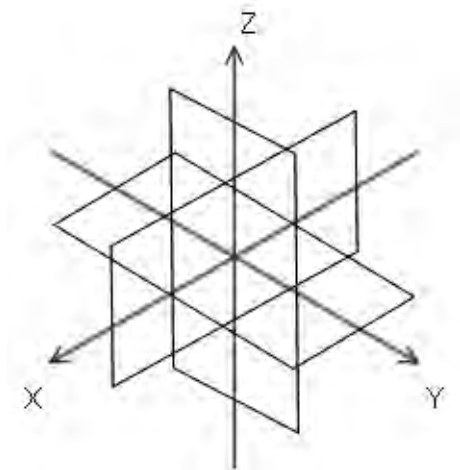


問2 円が描かれていれば正解



問3 次のような図が書かれていれば正解。(もとの長方形の記入の有無は採点対象外。問1で長短の向きが異なっている場合を引

き継いだ場合は減点しない。)



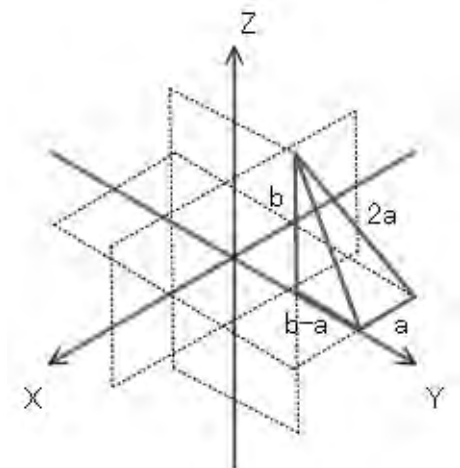
問4 24本 ($12 \times 4 \div 2 = 24$)

問5 20面 (図から数えられる)

あるいは、オイラーの多面体公式をつかう。頂点の数12, 辺の数30($24 + 6$)から, 面の数 n は

$$12 - 30 + n = 2$$

を満たす。



問6 上図で

$$b^2 + (b-a)^2 = (2a)^2 - a^2$$

この式を変形すると

$$b^2 - ab - a^2 = 0$$

となり、

$$x = \frac{b}{a}$$

とすると

$$x^2 - x - 1 = 0$$

これを解いて

$$x = \frac{b}{a} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

($\frac{b}{a} > 0$ なので、 $1 \pm \sqrt{5}$ とした場合は減点。)

問7 正五角錐の高さを求める。正五角形の一辺の長さとお角線の長さの比は問6で求めた値(黄金比)になっている。これを用いた解答例を示す。

底面の正五角形の一辺の長さを l ($=\frac{2a}{3}$)、問6で求めた(黄金)比を g とすると、底面の外接円の半径 r について、以下の方程式が得られる。

$$l^2 = r^2 + r^2 - 2rr \cos \theta$$

$$(gl)^2 = r^2 + r^2 - 2rr \cos 2\theta$$

ここで

$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = 2\cos^2 \theta - 1$$

を利用して、正五角錐の高さ h について解くと、

$$h = \sqrt{l^2 - r^2} = \frac{2}{3}a\sqrt{\frac{6-2\sqrt{5}}{10-2\sqrt{5}}}$$

(a の位置は前後にズレていても減点しない。二重根号部分を整理した場合、解答例と異なる可能性があるが、その値を計算したとき0.525731112(以下省略)になる

はずなので、一致するならもちろん正解。可能性としては

$$\frac{2}{3}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}a$$

などが考えられる。)

問8 32面(12個の頂点を切り落とすことで新たに12面増える。 $20+12=32$)。

問9 サッカーボール(ボール、でも正解)。あるいはフラードームやレーダードームなど、建築物の屋根を答えてもよい。

出題意図

空間認識能力の高い学生を選抜できればと思い作問しました。問1、問2では、座標系を $(1,1,1) \rightarrow (0,0,0)$ でみたぐらいに初めから用意してあげる(解答用紙にあらかじめ書いておく)と正解が得られやすいと思います。

問7では、内分点を結んでできる面が正五角形であることを答えさせないまま、正五角錐の高さを要求しています。まず正五角形であることに気付くことが大切です。

正五角形の1辺の長さとお角線の長さの比が黄金比になっていることは、飛び入学を目指す学生なら知っていておかしくないでしょうし、また、試験中に閲覧可能な資料から得られると想定しています。仮に、いずれでもない場合でも、枝問の流れから「カン」で気づいて欲しいところですし、先進科学プログラムとしてはそういう勘の良い学生を採用したいと思います。

平成 27 年度

千葉大学先進科学プログラム入学者選考課題

課題 II-D 解答例

H27

解答例

問題全体において、限られた条件の下でできるだけ適切な観測を行うことの観察力と、そのための工夫と知識を組み合わせることへの柔軟性、創造力を問う。

観察する力：観察力

工夫する力：創造力，柔軟性

制限された中での厳密性：研究力

得られた結果に対する考察力：分析力および洞察力

問 1 乾電池の位置と転がりやすさ

－慣性モーメント（転がりにくさ）に気づかせる

準備物品の「かたい板」と消しゴムを用いて下図のような実験装置を作成する（図 1）。[S4. E4. N4. W4]，[S3. E3. N3. W3]，[S2. E2. N2. W2]，[S1. E1. N1. W1]それぞれを，斜面上の一定の高さの位置で S を下向きに静止させ，初速度 0 で斜面を転がす。この時，静止時から斜面下端に到達する時間を測定する。それぞれの乾電池配置において 3 回の試行を行いその平均値を求める（表 1）。その結果，[S4. E4. N4. W4]では 1 秒 54.6，[S3. E3. N3. W3]では 1 秒 47.3，[S2. E2. N2. W2]では 1 秒 39.6，[S1. E1. N1. W1]では 1 秒 30.0 を得，わずかな差ではあるが，乾電池が内側に配置されるほど早く転がり下端に達していることが確認できる。この原因は，乾電池が内側にあるほど円筒は回転しやすく，外側に配置されるほど回転しにくくなる傾向にあることを示唆している。

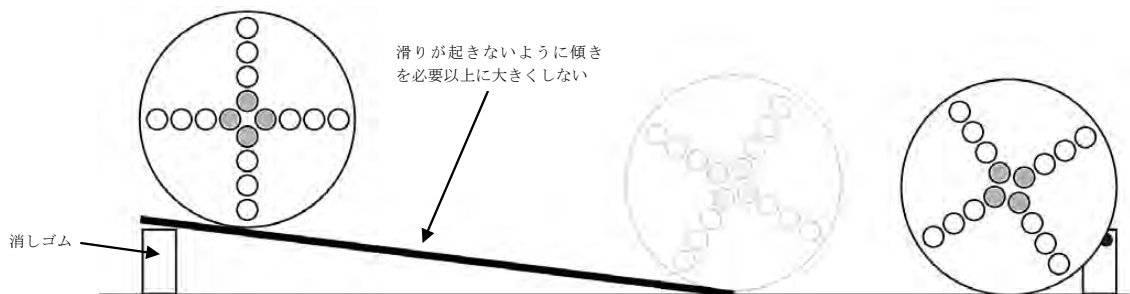


図 1 実験装置の模式図

表 1 斜面下端までの到達時間

乾電池位置	[S4. E4. N4. W4]	[S3. E3. N3. W3]	[S2. E2. N2. W2]	[S1. E1. N1. W1]
下端到達時間	1" 49	1" 53	1" 38	1" 30
	1" 59	1" 44	1" 41	1" 26
	1" 56	1" 45	1" 40	1" 34
平均時間	1" 54.6	1" 47.3	1" 39.6	1" 30.0

問 2 円筒の転がりやすさと周期運動

－重心位置が同じ円筒の周期運動に対する慣性モーメント（転がりにくさ）の影響について考えさせる

「かたい板」と「座金」と「水準器」をもちいて円筒の周期運動のための水平なステージを作る。図 2 に示すように S 列から円筒中心（黒丸）を基準にして 45 度のところに赤線を引き、それを目印に周期運動を開始させる。[S]の外周付近にシールを貼り、測定のための基準とする。事前の観測より 5 往復までは明確な周期運動が観察されたので、[S4. E4. W4]，[S4. E3. W3]，[S4. E2. W2]，[S4. E1. W1]それぞれが 5 往復の周期運動をするのに要した時間を測定した（表 2）。測定にあたっては、45° ラインを鉛直方向に合わせた状態を初期状態とし、測定開始と同時に静かに離し、[S]外周付近シール点が最下端に達した時を“0”と無言で呼称し、このシール点が最下点を通る度に、“1”，“2”と呼称し、“5”の時の時間を測定した。ここで、[E, W]に関しては黒丸を基準とした時、その乾電池の配置が対称であるので、[E, W]に配置されている乾電池の重心位置は黒丸と一致することがわかる。さらに、すべての乾電池配置において[S4]は一定であるので、[S4. E4. W4]，[S4. E3. W3]，[S4. E2. W2]，[S4. E1. W1]のすべての重心位置は同一であることが理解できる。図 2 の赤丸はこの重心位置を示す。表 2 の結果より、[E, W]が内側に配置されるほど周期が短くなっていることがわかる。これは問 1 の時に観察された、円筒の転がりやすさ、回転しやすさと同じ傾向を示すものであると理解することができる。

表 2 [S, E, W]円筒の 5 往復周期運動に要した時間

乾電池位置	[S4. E4. W4]	[S4. E3. W3]	[S4. E2. W2]	[S4. E1. W1]
5 往復に要した時間	4 秒 65	4 秒 46	4 秒 35	4 秒 21
	4 秒 65	4 秒 52	4 秒 41	4 秒 28
	4 秒 65	4 秒 55	4 秒 33	4 秒 28
	—	4 秒 46	4 秒 34	4 秒 33
	—	—	—	4 秒 21
平均時間	4 秒 65	4 秒 49.8	4 秒 35.8	4 秒 26.2

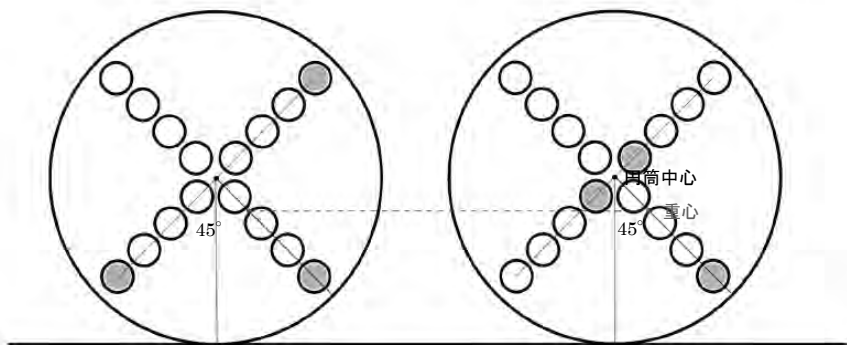


図 2 [S4. E4. W4]と[S4. E1. W1]

問3 重心位置と周期の関係

問2と同様な条件において[S4]，[S3]，[S2]，[S1]円筒の周期運動を観察する。これらの円筒の重心位置は、円筒本体の質量と乾電池一本の質量との関係において定義されるが、[S]の位置が内周に向かうほど、その重心位置も円筒中心に近づくことは容易に理解できる。言い換えると、[S4]，[S3]，[S2]，[S1]の順でこの円筒全体の重心と円筒中心との距離は短くなっていることが分かる。このことと表3に示された結果から、[S]円筒の周期は、重心と円筒中心との距離に強く影響され、その距離が短いほど周期が明確に長くなることがわかる。この理由は、図3に示した[S4]と[S1]との比較において、乾電池の質量を m とする時、[S4]，[S1]のo点まわりのモーメント（円筒をS軸が鉛直方向に静止したつりあい状態に戻そうとする働き）は、それぞれ $mg \cdot l_{s4}$ ， $mg \cdot l_{s1}$ となり、図より $mg \cdot l_{s4} > mg \cdot l_{s1}$ なので、[S4]の方がつりあい状態に戻そうとする働きが強く、結果として相対的に早い周期運動になっていると言うことができる。また、円筒とステージとの間に滑りがないものと考え、ステージとの接地面において円筒にかかる水平方向の摩擦力はNに静止摩擦係数をかけたものであると考えることができ、すべての[S]において同一であることが考えられるので、この周期運動の違いには関与しないものと考えることができる。

表3 [S]円筒の5往復周期運動に要した時間

乾電池位置	[S4]	[S3]	[S2]	[S1]
5往復に要した時間	3秒62	4秒18	5秒20	7秒46
	3秒67	4秒18	5秒17	7秒65
	3秒57	4秒15	5秒17	7秒44
	3秒65	4秒10	5秒25	7秒58
	3秒65	4秒16	5秒23	7秒59
平均時間	3秒63.2	4秒15.4	5秒20.4	7秒54.4

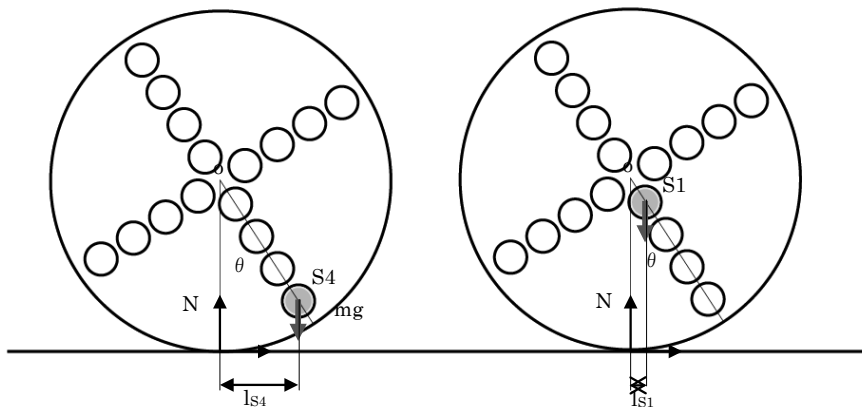


図3 円筒中心周りのモーメント

問 4 まとめ

ー おきあがりこぼし運動を支配する慣性モーメント（回転慣性）と重心位置の影響

問 1, 2 の結果からは, 乾電池は外側にあるほど円筒の動きを遅くすることが予想できる。その一方で, 問 3 の結果からは, 円筒中心と重心位置との距離が近ければ近いほど周期が長くなることが示されている。つまり, 4 本の乾電池はできるだけ外周に近く配置され, そして同時に, 円筒と 4 本の乾電池で構成される重心位置はできるだけ円筒中心に近いことが最長周期の構成を得るためには必要となる。そうすると, [S4. E4. N3. W4] が, 乾電池 4 本使用時の最長周期組み合わせとなることが予想される。この予想を検証するために, [S4. E4. N3. W4] の他に, [N] だけを移動した [S4. E4. N2. W4] と, [S4. E4. N3. W4] と重心位置は同じであるが, やや転がりやすくなることが予想される [S3. E3. N2. W3] に対する周期運動の観察を, 問 2, 3 と同様の方法により実施し, 表 4 を得た。その結果, 予想通り, もっとも転がりにくいことが予想される「できるだけ外周に 4 本の乾電池が配置され, かつ「円筒中心と重心位置が最も近い」という二つの条件を満たす [S4. E4. N3. W4] が, 予想通りに最長周期の円筒であることが確認できた。

表 4 [S. E. N. W] 円筒の 5 往復周期運動に要した時間

乾電池位置	[S4. E4. N3. W4]	[S4. E4. N2. W4]	[S3. E3. N2. W3]
5 往復に要した 時間	9 秒 97	6 秒 94	8 秒 41
	9 秒 87	6 秒 79	8 秒 58
	9 秒 62	6 秒 75	8 秒 92
	10 秒 07	6 秒 78	8 秒 78
	9 秒 88	6 秒 94	8 秒 65
平均時間	9 秒 88	6 秒 84	8 秒 66.8

続・飛び入学の物理

<http://www.cfs.chiba-u.ac.jp/>

平成31年3月25日 初版 第1刷発行

発行者	千葉大学 先進科学センター 〒260-8522 千葉市稲毛区弥生町1-33 TEL 043-290-3521 FAX 043-290-3523
印刷・製本	株式会社 正文社 〒260-0001 千葉市中央区都町1-10-6 TEL 043-233-2235 FAX 043-231-5562
装丁デザイン	田中重昌（千葉大学広報学生ボランティアグループ「クリエイティブ」）
監修	宮崎紀郎（千葉大学名誉教授・グランドフェロー）

