

The background of the entire page is a photograph of a university building with a modern, angular design in shades of brown and tan. In the foreground, there are many cherry blossom branches with light pink flowers. In the lower center, a clock tower is visible, featuring a white clock face with black numbers and hands, and a green sign above it that reads "Science" and "学部" (Faculty).

飛び入学 の物理

飛 び 入 学
の 物 理

はじめに

千葉大学で17歳飛び入学生制度（先進科学プログラム）を開始して、既に17年が経過した。毎年それなりの応募者数があり、定期的に合格者を出している。また、合格者の殆どは大学院博士前期課程に進学し、しかもその約半数が博士後期課程にまで進学している。これは日本の大学としては驚くべき数字である。また、博士号取得後、大学教員2名、国公立研究所研究員2名、企業研究所研究員1名、ポスドク研究員3名等の職を得、第一線の研究者として活躍している。これは、科学技術の最先端を切り開く若手人材の発掘と育成を標榜する先進科学プログラムの正に真骨頂と言える。

ところで、先進科学プログラムでは、非常に手間のかかる独自の入試を実施している。まず、初日には、参考書を持ち込み可で解答時間を6～7時間の筆記試験を課し、記憶に頼らず、本質を理解した上で答えを導こうとする本当の実力を評価する。なお、解答用紙と共に計算用紙も回収し、不正解であっても受験者がどこで誤解したかを見定め、合否判定に利用している。二日目には、筆記試験合格者のみに45分程度とかなり長時間の面接を実施し、研究者への道を邁進しようとする意欲や適性を評価すると共に、答案の不正解部分をチェックし、受験テクニックに囚われない真の学力を見定める。

現在、大学には「教科の知識偏重の入試から意欲・能力・適性等の多面的・総合的な評価へ」の入試改革が要請されている。先進科学プログラムの入試は、大学に要請されている入試改革のさきがけでもある。

本書は過去7年間に出题された先進科学プログラム入試試験で出题された問題のうち、物理並びに応用理工学に関する問題を選出し、その解答例と共に冊子に纏めたものである。見て頂ければおわかりと思うが、長大で、かなり手間を要する問題が多い。ただし、高校での学習範囲を逸脱したものではなく、各小問を一つずつ根気よく解いてゆけば、最後までたどり着ける様に設計されている。また、参考書を持ち込み可であることから判るように、暗記型の学習では対応できない、物理の本質を問う問題となっている。大学教員の立場から言えば、解答時間並びに出題や採点の手間を考えなければ、通常の大学入学試験にこのような問題を課したいのが本音である。

読者が物理並びに応用理工学関連分野を目指しているのであれば、是非ともこれらの問題にアタックし、物理学修得の醍醐味を味わって欲しい。

なお、2008年以前の問題に関しては、「千葉大学飛び入学試験問題」（日本評論社）として出版されているため、本書からは除外している。また、千葉大学先進科学センターのホームページ (<http://www.cfs.chiba-u.jp>) には、物理学系以外のものを含め、これまでの全ての問題とその解答が掲載されている。そちらも参照いただきたい。

ここで掲載している問題の作成・チェックには多くの千葉大学教員が携わった。最後に、彼らの多大な貢献に対して謝意を表したい。また、出題内容については学外の方々にも様々な観点からご意見を頂き、出題内容に反映させて頂いた。こちらについてもお礼申し上げる。最後に先進科学プログラムが滞りなく運営出来るよう、日頃尽力頂いている千葉大学先進科学センターの教員・職員各位にも深謝する。

千葉大学先進科学センター長
橋本 研也

目次

はじめに	1
平成27年度選考課題	5
平成27年度選考課題解答例	15
平成26年度選考課題	33
平成26年度選考課題解答例	51
平成25年度選考課題	77
平成25年度選考課題解答例	97
平成24年度選考課題	111
平成24年度選考課題解答例	123
平成23年度選考課題	139
平成23年度選考課題解答例	151
平成22年度選考課題	165
平成22年度選考課題解答例	173
平成21年度選考課題	191
平成21年度選考課題解答例	201

※平成21年度選考課題には論述問題である課題1が含まれます

平成 27 年度

千葉大学先進科学プログラム入学者選考課題

課題論述

課題[II-A], [II-B], [II-C], [II-D]

(10:00—15:30)

注意事項

課題 II には, [II-A], [II-B], [II-C], [II-D] の 4 題があります。

志望するコースによって, 次を示す問題を解答してください。

- ・物理学コース：
[II-A], [II-B]の 2 題を解答してください。
- ・フロンティアテクノロジーコース：
[II-A], [II-B], [II-C], [II-D] の中から 2 題を選択して解答してください。ただし, [II-A]あるいは[II-B]の少なくとも 1 題は選択すること。

II-A

ケプラーの法則を次のように記そう。

第1法則: それぞれの惑星は、恒星を焦点とする楕円軌道上を運動する。

第2法則: 恒星と惑星とを結ぶ線分(動径)が、単位時間に描く面積(面積速度)は、それぞれの惑星について一定である。

第3法則: 惑星の公転周期 T の2乗と、楕円軌道の半長軸 a の3乗の比は、同じ恒星を回るすべての惑星について同じ値である。

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$$

ただし、 G は万有引力定数、 M は恒星の質量である。

そうするとこの法則は、太陽系に限らず一般の恒星・惑星系で成立する。教科書でケプラーの法則および万有引力の法則について復習したうえで、太陽系外の恒星と惑星に関する以下の問いに答えなさい。またこの問題では、恒星の質量は惑星の質量より十分大きいので、恒星は静止していると見なしてよい。

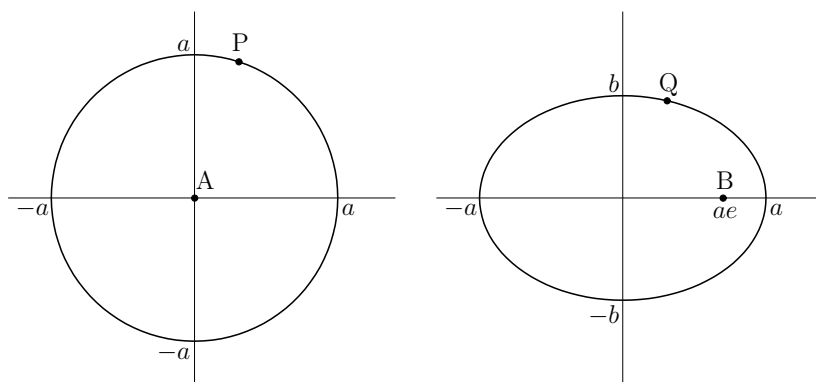


図 1: 円軌道(左)と楕円軌道(右)

問1 図1(左)のように、惑星Pは、半径 a の円軌道を描き、恒星Aの周囲を周期 T_P で公転している。恒星Aの質量 M_A は太陽の質量の何倍か、地球の公転周期 T_0 と半長軸 a_0 、および T_P , a を用いて表しなさい。

問2 図1(右)のように、惑星Qは、半長軸が a で半短軸が $b = a\sqrt{1-e^2}$ の楕円軌道を描き、恒星Bの周囲を周期 T_Q で公転している。ここで e は離心率である。恒星Bの質量 M_B を、 M_A , T_P , T_Q を用いて表しなさい。

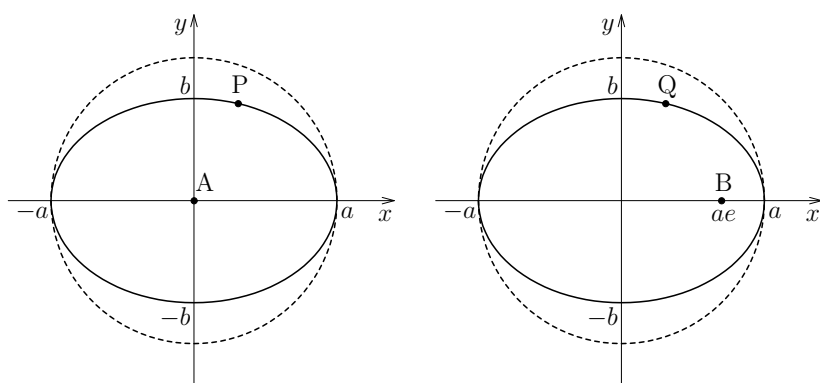


図 2: 円軌道 (左) と楕円軌道 (右)

さて、図2の実線は、地球（観測点）から見た惑星 P と Q の軌道である。惑星 Q の軌道面は地球と恒星 B を結ぶ直線（視線方向、 z 軸）に対して垂直であるのに対して、惑星 P は軌道面が地球からの視線方向に対して傾いている。このため地球から観測すると、どちらも

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2(1-e^2)} = 1$$

という 2 次式で表される同じ大きさの楕円軌道上を反時計回りに運動しているように見える。しかし、恒星 A は楕円の中心 $(x, y) = (0, 0)$ に位置するのに対し、恒星 B は楕円の焦点 $(x, y) = (ae, 0)$ に位置する。

問 3 軌道が長軸と交わる点 $(x, y) = (a, 0)$ での惑星 P と Q の速さを、軌道の大きさを表す a, e , およびそれぞれの公転周期 T_P, T_Q を用いて表しなさい。ただし惑星 P の場合、地球と恒星 A を結ぶ方向の運動は測定できないとして、 xy 平面内の速さを求めなさい。

問 4 惑星 P が長軸と交わる位置 $(x, y) = (a, 0)$ を $t = t_P$ に通過したあと、

$$(x, y) = (0, b), (-a, 0), (0, -b)$$

のそれぞれを最初に通過する時刻を、 t_P と T_P で表しなさい。

問 5 惑星 Q が長軸と交わる位置 $(x, y) = (a, 0)$ を $t = t_Q$ に通過したあと、

$$(x, y) = (0, b), (-a, 0), (0, -b)$$

のそれぞれを最初に通過する時刻を、 t_Q と T_Q で表しなさい。

問 6 惑星 Q の速度の x 成分が最大となる位置を求めなさい。また、惑星 Q の速度の x 成分の最大値を a, e, T_Q を用いて表しなさい。

- 問7 惑星 Q を軌道の長軸方向から観測した場合と、短軸方向から観測した場合のそれぞれについて、速度がどのように変化するか、方眼紙にグラフを描いて説明しなさい。グラフを描く際には離心率を $e = 1/2$ としなさい。横軸は、 $t_Q = 0$ を原点とし、 T_Q を 10 cm として、2 周期分を描くこと。縦軸のスケールは自分で自由に決めてよいが、長軸方向から観測した場合と短軸方向から観測した場合をひとつのグラフにまとめ、比較しやすいようにすること。
- 問8 問7 で求めた速度の時間変化は、惑星 P の速度変化とどのように違うか、その特徴について述べなさい。

II-B

単色の平行光の干渉について考えよう。以下では、単色光の波長を λ 、光速を c とする。

問 1 まず、 x 軸上を正の向きに進行する単色光について考える。光は電場と磁場が振動する横波であり、平面波の進行と同様に考えることができる。ここで、 $x = x_0$ の位置で、光による電場の進行方向に垂直な成分が $E = E_0 \cos \omega t$ と書けるとする。

- (1) ω を λ と c のうち必要な記号を用いて表しなさい。
- (2) $x = x_0 + \ell$ の位置での電場の進行方向に垂直な成分を $E = E_0 \cos(\omega t - k\ell)$ と書くとき、 k を λ と c のうち必要な記号を用いて求めなさい。

問 2 図 1 のように $x = 0$ であらわされる面 (yz 平面) 内に 2 本のスリットのある無限に広い板を置く。ただし、それぞれのスリットは y 軸上の 2 点 ($x = 0, y = -\delta$), ($x = 0, y = \delta$) にあり、 z 軸方向に無限に長く、その幅は δ や λ に比べて十分に小さいとする。この 2 本のスリットに、平行な単色光を入射する。単色光は位相がそろっており、スリットの位置において光は同位相であるとする。 xy 平面内で、原点 O を通り x 軸からの角度が θ で表される向きに距離 L だけ離れた点 P で光の強度を観察する。ただし、 L は δ と比べて十分に大きいとする。

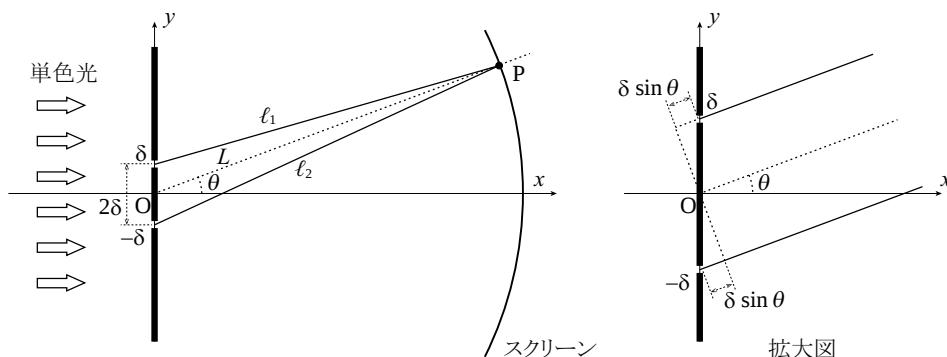


図 1

- (1) $\theta = 0$ の向きで観測された光の強度が極大であった。 θ を増加させていくとき、はじめて強度が極小になる θ を $\theta_{\min}$ とする。 $\sin \theta_{\min}$ を求めなさい。ただし、2 つのスリットから θ の方向へ進む光について、スリットから点 P までの光路長 ℓ がそれぞれ $\ell_1 = L - \delta \sin \theta$, $\ell_2 = L + \delta \sin \theta$ であると考えればよい。

- (2) スリットで回折された光による点 P における電場を考える。 ℓ が λ や δ と比べて十分に大きいとき、電場は一定の平面内を向いており、 $E = E_1 \cos(\omega t - k\ell)$ と書ける。 E_1 はスリットからの距離に依存するが、 ℓ が δ に比べて十分に大きい時には、2つのスリットから回折されてくる光について E_1 は等しいとしてよい。電磁場は重ね合わせができるため、ある点における電場はそれぞれのスリットから回折されてきた光による電場を足し合わせるにより得られる。このことを用いると、点 P における電場 $E(\theta)$ は $E(\theta) = f(\theta) \cos(\omega t - kL)$ と書ける。このとき $f(\theta)$ を求めなさい。
- (3) $F(\theta) = \frac{f(\theta)}{f(0)}$ とするとき、 $F(\theta)$ を求め、 $F(\theta)$ が E_1 によらないことを示しなさい。
- (4) 光強度 I は、電場を2乗したものを1周期にわたって積分した値に比例する。比例係数を A として、光強度 I を θ の関数として求めなさい。また、 $\lambda = 500 \text{ nm}$, $\delta = 5.0 \mu\text{m}$ として、光強度 I を θ の関数として見たときのグラフを $-\frac{1}{10} < \theta < \frac{1}{10}$ の範囲で配布した方眼紙に描きなさい。グラフには極小点の θ の値を明記すること。ただし、グラフを描くときには、 θ は十分に小さいとして、 $\sin \theta$ を θ で近似してよい。

- 問3 次に、図2のように $x = 0$ であらわされる面 (yz 平面) 内に1本のスリットのある無限に広い板を置く。ただし、スリットは y 軸上の線分 $-a < y < a$ 上で光を透過し、 z 軸方向に無限に長いとする。このスリットに、平行な単色光を入射することを考える。単色光は位相がそろっており、スリット内のすべての点において、光は同位相であるとする。 xy 平面内で、原点 O を通り x 軸からの角度が θ で表される向きに距離 L だけ離れた点 P で光の強度を観察する。ただし、 L は a と比べて十分に大きいとする。

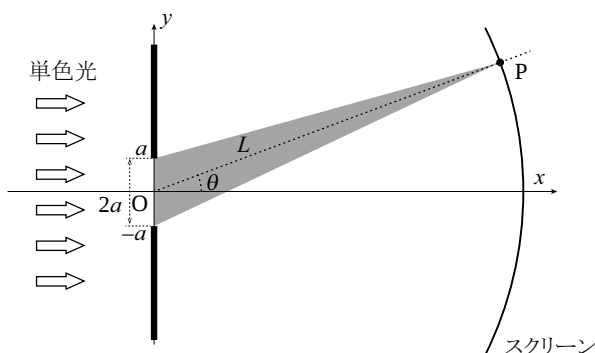


図2

- (1) スリットで回折された光による電場が問2(2)と同様に表されるとき、点 $(x = 0, y = b, z = 0)$ から広がっていく光について、点 P における電場 $E_1(b, \theta)$ を求めなさい。
- (2) (1) で求めた電場 $E_1(b, \theta)$ はスリット内の1点から回折されてきた光によるものである。スリット全体から回折してきた光による電場は b が $-a$ から a までの各点から広がってきた光による電場を積分することにより得られる。すなわち、点 P における電場 $E'(\theta)$ は

$$E'(\theta) = \int_{-a}^a E_1(b, \theta) db$$

と表すことができる。この積分を実行し、変形すると $E'(\theta) = g(\theta) \cos(\omega t - kL)$ となる。この $g(\theta)$ について、 $G(\theta) = \frac{g(\theta)}{g(0)}$ とおくとき、 $G(\theta)$ を求めなさい。ただし、 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ は証明せずに用いてよい。

- (3) 光強度 I は、電場を2乗したものを1周期にわたって積分した値に比例する。比例係数を B として、光強度 I を θ の関数として求めなさい。また、 $\lambda = 500 \text{ nm}$, $a = 5.0 \mu\text{m}$ として、その関数のグラフを $-\frac{1}{10} < \theta < \frac{1}{10}$ の範囲で配布した方眼紙に描きなさい。グラフには極小点の θ の値を明記すること。ただし、グラフを描くときには、 θ は十分に小さいとして、 $\sin \theta$ を θ で近似してよい。
- (4) 単色光の代わりに白色光を入射した場合には、スクリーンにどのような像が映ると予想されるか？ なぜそのように考えたかも含めて答えなさい。

II-C

短辺の長さ $2a$ 、長辺の長さ $2b$ ($a < b$) の長方形がある。3次元直交座標系において、この短辺は X 軸に平行、長辺は Y 軸に平行、 Z 軸が長方形と直交し、かつ、対角線の交点と原点が一致するよう配置されている。

問1 解答用紙の3次元直交座標系に長方形を書き入れなさい。

原点 $(0,0,0)$ と点 $(1,1,1)$ を通る直線の周りの回転を考える。

問2 X 軸上の点 $(c,0,0)$ (ただし $c > 0$) を、直線の周りに 360° 回転するとき、この点が描く軌跡を、解答用紙の3次元直交座標系に書き入れなさい。

問3 もとの長方形を、この直線の周りに 120° および 240° 回転させたときの位置にある長方形を、解答用紙の3次元直交座標系に書き入れなさい。

もとの長方形を A 、上の回転移動後の位置にある長方形の一方を B 、他方を C とする。 A の各頂点から B および C の頂点のうち最も近い距離にあるすべての頂点を線分で結ぶ。同様に B から C および A に対して、 C から A および B に対して、それぞれ線分で結ぶ。

問4 線分は全部で何本あるか答えなさい。ただし、両端点一致する線分は合わせて1本と数えること。

上の問題で求めた線分と長方形 A 、 B 、 C の短辺をあわせたものは、ある多面体の辺になっている。

問5 面は全部でいくつあるか答えなさい。

問6 多面体が正多面体となるとき $\frac{b}{a}$ の値を求めなさい。答えだけでなく計算の過程も示すこと。

上の問題の正多面体の各辺を三等分する内分点について考える。

問 7 正多面体のある頂点に関して、この頂点を端点とする各線分の内分点のうち、この頂点に近い方の内分点すべてを通過する平面に対して、この頂点から下ろした垂線の長さを、 a を用いた式で表しなさい。答えだけでなく計算の過程も示すこと。

正多面体の全ての頂点に関して、問 7 で考察した平面で頂点側を切り落としたときにできる立体を考える。

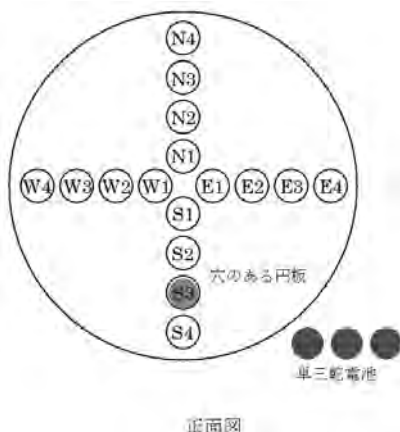
問 8 面は全部でいくつあるか答えなさい。

問 9 身近にあるものでこの多面体の構造を利用しているものを示しなさい。

II-D

準備された物品を使用して実験を行い、下記の問いに答えなさい。

[準備物品] 穴のある円筒、乾電池4本、ものさし、分度器、ストップウォッチ、消しゴム、マジック、シール・マーカー、かたい板、厚紙、水準器、はさみ、テープ(小)、テープ(大)、ボールペン赤青黒、方眼紙、座金、はかり(共通物品)



上図の円筒は、乾電池4本を適宜任意の穴に入れることにより自由にその重心位置を変えることができる。この円筒の運動について考える。この4本の乾電池はいずれの穴にも入れることができ、一つの穴には乾電池一本のみ入れられる。以下では乾電池を入れる穴を上図のアルファベットと数字で示す。例えば、S1とE1の穴に乾電池を入れるときは[S1.E1]と記述する。上図の例では、[S3]となる。また、この円筒は鉛直方向に自立することができる、安定して転がることことができる。

- 問1 [S4.E4.N4.W4], [S3.E3.N3.W3], [S2.E2.N2.W2], [S1.E1.N1.W1] が斜面を転がる時の運動の様子を観察し、その違いを定量的に検討しなさい。また、その違いが生まれる原因を考察しなさい。実験にあたっては、準備されている物品のみを使用し、その実験装置の構成を図解するとともに、実験の手順および留意点を記しなさい。
- 問2 [S4.E4.W4], [S4.E3.W3], [S4.E2.W2], [S4.E1.W1] の水平面における周期運動(起き上がり小法師運動)を観察し、それらの周期を測定しなさい。測定された周期の相違について考察し、その現象について図および文章を用いて説明しなさい。周期の測定においては、初期の振れ角が45度になるように調整しなさい。また図中に、それぞれの円筒の重心位置も明示しなさい。
- 問3 問2と同じ条件で、[S4], [S3], [S2], [S1]の周期を測り、その違いが生まれる原因を考察しなさい。
- 問4 問2と問3の結果から、どのような場合に振動の周期が長くなると考えられるか。乾電池を4本穴に入れた場合で最も振動の周期が長くなる配置を述べなさい。またそのように考えた理由も述べなさい。

平成 27 年度

千葉大学先進科学プログラム入学者選考課題

課題 II-A 解答例

II-A

解答例

問1 ケプラーの第3法則

$$\frac{T_P^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM_A} \quad (1)$$

$$\frac{T_0^2}{a_0^3} = \frac{4\pi^2}{GM_\odot} \quad (2)$$

を利用すると、

$$M_A = \left(\frac{T_0}{T_P}\right)^2 \left(\frac{a}{a_0}\right)^3 M_\odot \quad (3)$$

である。従って、 M_A は太陽の質量 $M_\odot$ の

$$\left(\frac{T_0}{T_P}\right)^2 \left(\frac{a}{a_0}\right)^3 \text{ 倍} \quad (4)$$

である。遠心力が aT^{-2} に比例するのに対して重力が $M_A a^{-2}$ に比例することからも同じ結論が得られる。

問2 ケプラーの第3法則を利用すると

$$M_B = \left(\frac{T_P}{T_Q}\right)^2 M_A \quad (5)$$

惑星の周期は軌道離心率に依らないことを認識してもらうのが出題の意図。

問3 惑星 P は一定の速度 $v = 2\pi a/T_P$ で回転しているが、 y 方向の速度は $b/a = \sqrt{1-e^2}$ 倍になり、

$$v = \frac{2\pi b}{T_P} = \sqrt{1-e^2} \frac{2\pi a}{T_P} \quad (6)$$

である。惑星 Q の速度は、面積速度一定の法則を使えば求まる。楕円の面積は $S = \pi ab$ であることと、点 $(x, y) = (a, 0)$ での恒星 B からの距離は $a(1-e)$ であることを考えると、

$$\frac{a(1-e)v}{2} = \frac{\pi ab}{T_Q} \quad (7)$$

より

$$v = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \frac{2\pi a}{T_Q} \quad (8)$$

問4 惑星 P は円軌道を一定の角速度で回転しているので、 $t = t_P + T_P/4, t_P + T_P/2, t_P + 3T_P/4$ の時刻に、それぞれ $(x, y) = (0, b), (-a, 0), (0, -b)$ を通過する。さらに、これらの時刻から 周期 T_P の整数倍だけ時間が経過したときにも通過する。

問5 惑星が $(x, y) = (a, 0)$ から $(0, b)$ までの運動によりできた図形の面積 S_1 は

$$S_1 = \frac{\pi ab}{4} - \frac{(ae)b}{2} \quad (9)$$

である。従って面積速度一定の法則により、時刻

$$t_1 = t_Q + \frac{S_1}{\pi ab} T_Q = t_Q + \left(\frac{1}{4} - \frac{e}{2\pi} \right) T_Q \quad (10)$$

に $(x, y) = (0, b)$ を通過する。同様に、時刻

$$t_2 = t_Q + \frac{T_Q}{2}, \quad t_3 = t_Q + \left(\frac{3}{4} + \frac{e}{2\pi} \right) T_Q \quad (11)$$

に、それぞれ $(x, y) = (-a, 0), (0, -b)$ を通過する。

問6 速度は、恒星 B と惑星 Q の間の重力により変化するので、加速度ベクトルは惑星 Q から恒星 B へ方向を向く。従って、 $x = ae$ の場所で $dv_x/dt = 0$ であることが分かる。回転の向きを考えると、 v_x が最大となるのは $(x, y) = (ae, -b\sqrt{1-e^2})$ の場所である。面積速度一定の法則を使うと、

$$\frac{b\sqrt{1-e^2}v_{x,\max}}{2} = \frac{\pi ab}{T_Q} \quad (12)$$

なので

$$v_{x,\max} = \frac{2\pi a}{\sqrt{1-e^2}T_Q} \quad (13)$$

である。

表 1: 惑星 Q の速度。単位は $2\pi a/T_Q$ 。

$(t - t_Q)/T_Q$	v_x	v_y
0 = 0.000	0 = 0.000	$\sqrt{3}$ = 1.732
$1/6 - \sqrt{3}/(8\pi)$ = 0.098	$-2\sqrt{3}/3$ = -1.155	— —
$1/4 - 1/(4\pi)$ = 0.170	-1 = -1.000	0 = 0.000
$1/2$ = 0.500	0 = 0.000	$-\sqrt{3}/3$ = -0.577
$3/4 + 1/(4\pi)$ = 0.830	1 = 1.000	0 = 0.000
$5/6 + \sqrt{3}/(8\pi)$ = 0.902	$2\sqrt{3}/3$ = 1.155	— —

問 7 設問 3, 5, 6 で求めた惑星 Q の速度は以下の表 1 のようにまとめられる。これらの点は極大と極小および 0 となる点をすべて含むので、滑らかに結ぶとグラフの概形が求められる。

なお、上記の点を滑らかにつないだグラフで十分であるが、次のような媒介変数表示を用いれば、より精密なグラフが作成できる。

$$(x, y) = (a \cos \varphi, a \sqrt{1-e^2} \sin \varphi) \quad (14)$$

を使うと、媒介変数が $\varphi = 0$ から φ' まで変化したとき、恒星 B と惑星 Q を結ぶ線分の描く面積は

$$S = \frac{a^2 \sqrt{1-e^2}}{2} (\varphi' - e \sin \varphi') \quad (15)$$

である。これを利用すると

$$t = t_Q + \frac{T_Q}{2\pi} (\varphi - e \sin \varphi) \quad (16)$$

$$v_x = -\frac{2\pi a}{T_Q} \sin \varphi (1 - e \cos \varphi)^{-1} \quad (17)$$

$$v_y = \frac{2\pi a}{T_Q} \sqrt{1-e^2} \cos \varphi (1 - e \cos \varphi)^{-1} \quad (18)$$

である。媒介変数表示を使うと図 3 が得られる。

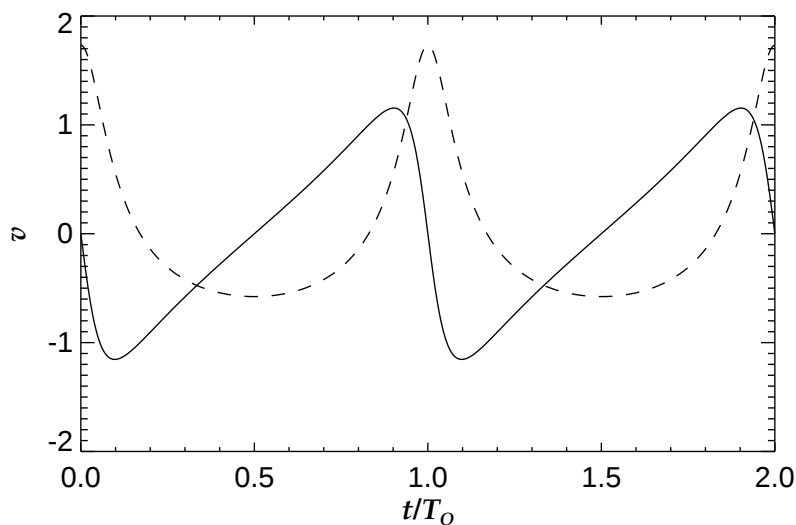


図 3: 惑星 Q の速度の時間変化。実線は v_x (短軸方向から見た場合の速度), 破線は v_y (長軸方向から見た場合の速度) を表す。

問 8 次のような特徴を記すことが期待される。

1. 惑星 Q の速度変化は単純な三角関数では表せない。
2. 速度 v_x が最大から最小に変化するの速いが、最小から最大への変化は遅い。
離心率 $e = 0.5$ の場合、前者は 周期の 20 % 弱である。
3. 速度 v_y の最大値は、最小値の絶対値より大きい。
4. 速度 v_y が正である期間は、負である期間より短い。
5. 速度の絶対値で比べると最大値は $\max |v_x| > \max |v_y|$ である。

出題の意図と解説

ケプラーの法則を用いて楕円運動する惑星の速度と位置を求める問題です。問 1 と問 2 では、第 3 法則を用いると惑星の運動から恒星の質量を導けることを狙っています。問 3, 4, 6, 7 では幾何学の知識と第 2 法則を組み合わせて、軌道上のいくつかの点を通過する時刻とそこでの速度を求める力を試しています。第 2 法則は角運動量保存則と等価ですが、幾何学的に惑星の位置を推定することにも使えることを示した問題です。問 5 は加速度と力の関係をきちんと理解しているかどうかを問うています。問 8 は加速度変化から軌道の離心率 e が原理的に求められることを認識してもらうための問題です。問 3 から 7 は問 8 を論じるための導入にもなっていて、問 8 でグラフから特徴を読み取る力を試す問題になっています。全体として質点の力学と楕円の性質についての理解度および三角関数の演算能力を試す問題となっています。

この問題では理解しやすくするため、惑星の動きを望遠鏡で直接見ることができました。しかし実際の惑星はもともと暗い上に、近くに明るい星がそばにいるため、直接その位置を測ることは困難です。昼間は太陽のために星が見えなかったり、満月の周りでは暗い星が見えづらくなるのと事情は似ています。ようやく数年前に太陽系の他の惑星のうち、親星から比較的遠いところにあるものが見つかるようになったばかりです。これらの軌道周期は 100 年よりも長いので、まだその運動を見ることはできません。

しかし 20 年前の 1995 年にスイスジュネーブ天文台のミッシェル・メイヨール (Michel Mayor) とディディエ・ケロス (Didier Queloz) はペガサス座 51 番星の周囲をわずか 4.2 日で公転する惑星を発見しました。正確に言うと、惑星本体ではなくペガサス座 51 番星が 4.2 日で私たちに近づいたり遠ざかったりするのを、光のドップラー効果を使って測定したのです。これは惑星の引力に引かれてペガサス座 51 番星も惑星と同じ周期でゆっくり回転します。惑星は軽いので、ペガサス座 51 番星のうごきはゆっくりで、この速度変化を追うためには高精度の測定が必要です。

惑星の軌道が楕円だと、問題文にあるように速度は三角関数とは違った変化を示します。この効果を使うことにより、直接は見えない惑星の軌道離心率を知ることができます。今回の問題をきっかけに、直接は見えない惑星でも、運動が楕円になっていることが検出できることを理解していただければ幸いです。

平成 27 年度

千葉大学先進科学プログラム入学者選考課題

課題 II-B 解答例

II-B 解答

光の干渉に関しては、高等学校の教科書では光路差が波長の整数倍か半整数倍かにより明るくなったり暗くなったりすると学びます。それでは、多くの光が重なり合う時はどうなるでしょうか？ その場合、単純に二つの光路の光路差だけでは議論できません。そこで、光が電磁波であることを思い起こし、波であれば（厳密にいうと線形波であれば）、重ね合わせの原理が成り立つことを用いて考えなければいけません。光は各点から伝播してきた電磁波の重ね合わせですので、それぞれの点から出てきた光を足し合わせればよいことになります。問2では、高校の教科書でも扱う複スリットによる回折を電磁波の重ね合わせの観点から考えてみます。そして、問3では、高校では扱われない単スリットによる回折を電磁波の重ね合わせの概念を用いて解いていきます。そのとき重要なのは、単スリットの場合、スリットの中の各点から伝播してきた光の重ね合わせとして考えないといけないということです。この場合、光路は無限にあるので、積分として考える必要があります。そうすると、単スリットでも光が回折されること、また、波長によって光の回折され具合が異なるので、単スリットを通った光も虹色に見えることがわかります。

問1 (1) $c = f\lambda$, $\omega = 2\pi f$ より, $\omega = \frac{2\pi c}{\lambda}$

(2) 速度 c で進行する波と考えると

$$E = E_0 \cos\left(\omega\left(t - \frac{\ell}{c}\right)\right) = E_0 \cos\left(\frac{2\pi c}{\lambda}\left(t - \frac{\ell}{c}\right)\right) = E_0 \cos\left(\frac{2\pi c}{\lambda}t - \frac{2\pi \ell}{\lambda}\right).$$

よって, $k = \frac{2\pi}{\lambda}$

問2 (1) 光路差は $2\delta \sin \theta$ であるので, $2\delta \sin \theta_{\min} = \frac{\lambda}{2}$. これより, $\sin \theta_{\min} = \frac{\lambda}{4\delta}$

(2) 2つのスリットからの電場を足し合わせればよいので,

$$E = E_1 \cos(\omega t - k(L - \delta \sin \theta)) + E_1 \cos(\omega t - k(L + \delta \sin \theta)).$$

三角関数の和を積にする公式を用いて

$$E = 2E_1 \cos(\omega t - kL) \cos(k\delta \sin \theta)$$

よって $f(\theta) = 2E_1 \cos(k\delta \sin \theta)$

(3) $f(0) = 2E_1$ である。これより

$$F(\theta) = \cos(k\delta \sin \theta)$$

(4) 強度 I は

$$I = A \int_0^{2\pi} 4E_1^2 \cos^2(\omega t - kL) \cos^2(k\delta \sin \theta) dt = \frac{4\pi A E_1^2}{\omega} \cos^2\left(\frac{2\pi\delta}{\lambda} \sin \theta\right)$$

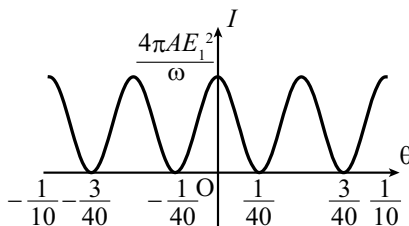
よって, $I = \frac{4\pi A E_1^2}{\omega} \cos^2(k\delta \sin \theta)$

参考までに、一般的には周期で割った平均をとるので、平均も示しておく。この電場の周期は $\frac{2\pi}{\omega}$ であるので、平均は $2A E_1^2 \cos^2(k\delta \sin \theta)$ となる。

$\sin \theta \sim \theta$ とすると $I = \frac{4\pi A E_1^2}{\omega} \cos^2(k\delta \theta)$ となる。

$k = \frac{2\pi}{\lambda}$ より値を入れると, $I = \frac{4\pi A E_1^2}{\omega} \cos^2(20\pi\theta)$

グラフを描くと図のようになる。



問 3 (1) 問 1 と同様に考えると, $E = E_1 \cos(\omega t - k(L - b \sin \theta))$

(2) 題意より比例定数を E_2 とすると

$$\begin{aligned} E'(\theta) &= \int_{-a}^a E_2 \cos(\omega t - k(L - b \sin \theta)) db \\ &= \frac{E_2}{k \sin \theta} [\sin(\omega t - k(L - b \sin \theta))]_{b=-a}^{b=a} \\ &= \frac{E_2}{k \sin \theta} [\sin(\omega t - k(L - a \sin \theta)) - \sin(\omega t - k(L + a \sin \theta))] \\ &= \frac{E_2}{k \sin \theta} \cos(\omega t - kL) \sin(ka \sin \theta) \end{aligned}$$

よって, $g(\theta) = \frac{E_2}{k \sin \theta} \sin(ka \sin \theta)$ 。

ここで, $g(0) = \lim_{\theta \rightarrow 0} g(\theta) = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{E_2}{k} \frac{ka \sin \theta}{\sin \theta} \frac{\sin(ka \sin \theta)}{ka \sin \theta} = E_2 a$ よって、

$$G(\theta) = \frac{\sin(ka \sin \theta)}{ka \sin \theta}$$

(3) 強度 I は

$$\begin{aligned} I &= B \int_0^{2\pi} \left(\frac{E_1}{k \sin \theta} \right)^2 \cos^2(\omega t - kL) \sin^2(ka \sin \theta) dt \\ &= \frac{\pi B}{\omega} \left(\frac{E_1}{k \sin \theta} \right)^2 \sin^2(ka \sin \theta) \end{aligned}$$

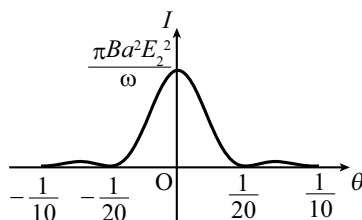
よって, $I = \frac{\pi B}{\omega} \left(\frac{E_1}{k \sin \theta} \right)^2 \sin^2(ka \sin \theta)$

問 2 と同様に平均をとると, 周期は $\frac{2\pi}{\omega}$ であるので, 平均は $\frac{B}{2} \left(\frac{E_1}{k \sin \theta} \right)^2 \sin^2(ka \sin \theta)$

$\sin \theta \sim \theta$ とすると, $I = \frac{\pi B}{\omega} \left(\frac{E_1}{k\theta} \right)^2 \sin^2(ka\theta)$ となる。

値を入れると, $I = \frac{\pi B a^2 E_2^2}{\omega} \left(\frac{1}{20\pi\theta} \right)^2 \sin^2(20\pi\theta)$

グラフを描くと図のようになる。



(4) (3) のグラフより暗線に相当する角は波長が長いほど外側に来る。つまり、波長が長くなればなるほど外側に回折するようになる。これを考慮すると、波長が長い赤色の光は外側に、波長の短い紫色の光は内側に見えるはずである。よって、中央の光はほぼ白色のままだが、回折した光は虹色に見えて外側が赤色、内側が紫色に見えると考えられる。

平成 27 年度

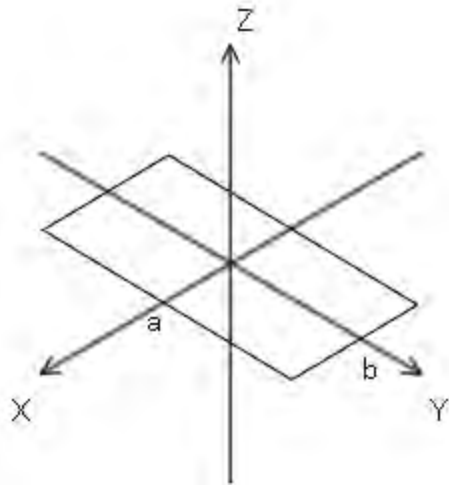
千葉大学先進科学プログラム入学者選考課題

課題 II-C 解答例

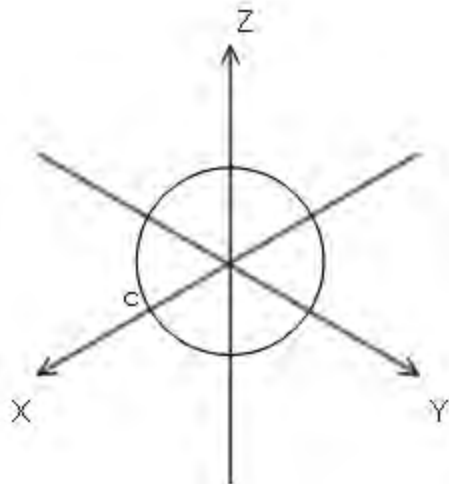
II-C

解答例

問1 以下のような図が書かれていれば正解。(短辺長辺の向きが逆の場合この問題では1/2部分点を与える。)

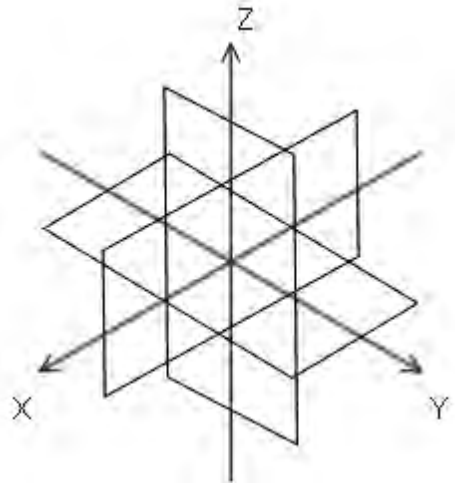


問2 円が描かれていれば正解



問3 次のような図が書かれていれば正解。
(もとの長方形の記入の有無は採点対象外。
問1で長短の向きが異なっている場合を引

き継いだ場合は減点しない。)



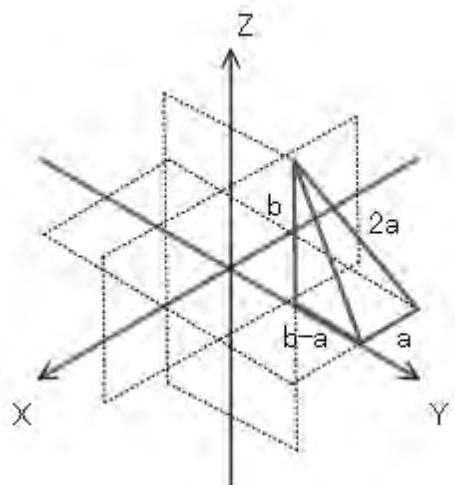
問4 24本 ($12 \times 4 \div 2 = 24$)

問5 20面 (図から数えられる)

あるいは、オイラーの多面体公式をつかう。頂点の数12, 辺の数30($24 + 6$)から、面の数 n は

$$12 - 30 + n = 2$$

を満たす。



問6 上図で

$$b^2 + (b-a)^2 = (2a)^2 - a^2$$

この式を変形すると

$$b^2 - ab - a^2 = 0$$

となり,

$$x = \frac{b}{a}$$

とすると

$$x^2 - x - 1 = 0$$

これを解いて

$$x = \frac{b}{a} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

($\frac{b}{a} > 0$ なので, $1 \pm \sqrt{5}$ とした場合は減点。)

問7 正五角錐の高さを求める。正五角形の一辺の長さとお対角線の長さの比は問6で求めた値(黄金比)になっている。これを用いた解答例を示す。

底面の正五角形の一辺の長さを l ($= \frac{2a}{3}$), 問6で求めた(黄金)比を g とすると, 底面の外接円の半径 r について, 以下の方程式が得られる。

$$l^2 = r^2 + r^2 - 2rr \cos \theta$$

$$(gl)^2 = r^2 + r^2 - 2rr \cos 2\theta$$

ここで

$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = 2\cos^2 \theta - 1$$

を利用して, 正五角錐の高さ h について解くと,

$$h = \sqrt{l^2 - r^2} = \frac{2}{3}a \sqrt{\frac{6 - 2\sqrt{5}}{10 - 2\sqrt{5}}}$$

(a の位置は前後にズレていても減点しない。二重根号部分を整理した場合, 解答例と異なる可能性があるが, その値を計算したとき0.525731112(以下省略)になる

はずなので, 一致するならもちろん正解。可能性としては

$$\frac{2}{3} \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{10}} a$$

などが考えられる。)

問8 32面(12個の頂点を切り落とすことで新たに12面増える。 $20 + 12 = 32$)。

問9 サッカーボール(ボール, でも正解)。あるいはフラードームやレーダードームなど、建築物の屋根を答えてもよい。

出題意図

空間認識能力の高い学生を選抜できればと思い作問しました。問1, 問2では, 座標系を $(1, 1, 1) \rightarrow (0, 0, 0)$ でみたぐらいに初めから用意してあげる(解答用紙にあらかじめ書いておく)と正解が得られやすいと思います。

問7では, 内分点を結んでできる面が正五角形であることを答えさせないまま, 正五角錐の高さを要求しています。まず正五角形であることに気付くことが大切です。

正五角形の1辺の長さとお対角線の長さの比が黄金比になっていることは, 飛び入学を目指す学生なら知っていておかしくないでしょうし, また, 試験中に閲覧可能な資料から得られると想定しています。仮に, いずれでもない場合でも, 枝間の流れから「カン」で気づいて欲しいところですし, 先進科学プログラムとしてはそういう勘の良い学生を採用したいと思います。

平成 27 年度

千葉大学先進科学プログラム入学者選考課題

課題 II-D 解答例

問題全体において、限られた条件の下でできるだけ適切な観測を行うことの観察力と、
そのための工夫と知識を組み合わせることへの柔軟性、創造力を問う。

観察する力：観察力

工夫する力：創造力、柔軟性

制限された中での厳密性：研究力

得られた結果に対する考察力：分析力および洞察力

問 1 乾電池の位置と転がりやすさ

一慣性モーメント（転がりにくさ）に気づかせる

準備物品の「かたい板」と消しゴムを用いて下図のような実験装置を作成する（図 1）。[S4. E4. N4. W4]，[S3. E3. N3. W3]，[S2. E2. N2. W2]，[S1. E1. N1. W1]それぞれを、斜面上の一定の高さの位置で S を下向きに静止させ、初速度 0 で斜面を転がす。この時、静止時から斜面下端に到達する時間を測定する。それぞれの乾電池配置において 3 回の試行を行いその平均値を求める（表 1）。その結果，[S4. E4. N4. W4]では 1 秒 54.6，[S3. E3. N3. W3]では 1 秒 47.3，[S2. E2. N2. W2]では 1 秒 39.6，[S1. E1. N1. W1]では 1 秒 30.0 を得、わずかな差ではあるが、乾電池が内側に配置されるほど早く転がり下端に達していることが確認できる。この原因は、乾電池が内側にあるほど円筒は回転しやすく、外側に配置されるほど回転しにくくなる傾向にあることを示唆している。

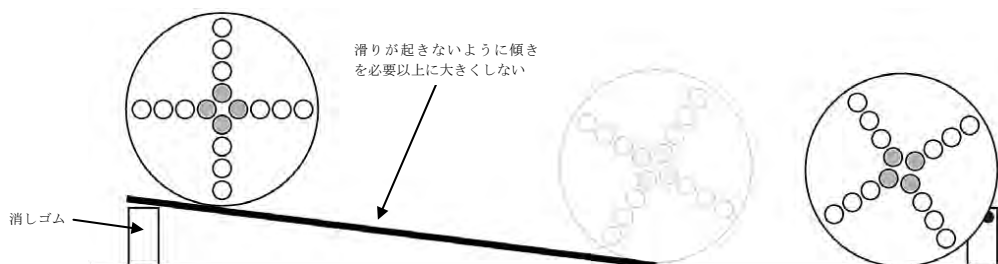


図 1 実験装置の模式図

表 1 斜面下端までの到達時間

乾電池位置	[S4. E4. N4. W4]	[S3. E3. N3. W3]	[S2. E2. N2. W2]	[S1. E1. N1. W1]
下端到達時間	1" 49	1" 53	1" 38	1" 30
	1" 59	1" 44	1" 41	1" 26
	1" 56	1" 45	1" 40	1" 34
平均時間	1" 54.6	1" 47.3	1" 39.6	1" 30.0

問 2 円筒の転がりやすさと周期運動

ー重心位置が同じ円筒の周期運動に対する慣性モーメント（転がりにくさ）の影響について考えさせる

「かたい板」と「座金」と「水準器」をもちいて円筒の周期運動のための水平なステージを作る。図 2 に示すように S 列から円筒中心（黒丸）を基準にして 45 度のところに赤線を引き、それを目印に周期運動を開始させる。[S]の外周付近にシールを貼り、測定のための基準とする。事前の観測より 5 往復までは明確な周期運動が観察されたので、[S4. E4. W4]，[S4. E3. W3]，[S4. E2. W2]，[S4. E1. W1]それぞれが 5 往復の周期運動をするのに要した時間を測定した（表 2）。測定にあたっては、45°ラインを鉛直方向に合わせた状態を初期状態とし、測定開始と同時に静かに離し、[S]外周付近シール点が最下端に達した時を“0”と無言で呼称し、このシール点が最下点を通る度に、“1”，“2”と呼称し、“5”の時の時間を測定した。ここで、[E, W]に関しては黒丸を基準とした時、その乾電池の配置が対称であるので、[E, W]に配置されている乾電池の重心位置は黒丸と一致することがわかる。さらに、すべての乾電池配置において[S4]は一定であるので、[S4. E4. W4]，[S4. E3. W3]，[S4. E2. W2]，[S4. E1. W1]のすべての重心位置は同一であることが理解できる。図 2 の赤丸はこの重心位置を示す。表 2 の結果より、[E, W]が内側に配置されるほど周期が短くなっていることがわかる。これは問 1 の時に観察された、円筒の転がりやすさ、回転しやすさと同じ傾向を示すものであると理解することができる。

表 2 [S, E, W]円筒の 5 往復周期運動に要した時間

乾電池位置	[S4. E4. W4]	[S4. E3. W3]	[S4. E2. W2]	[S4. E1. W1]
5 往復に要した時間	4 秒 65	4 秒 46	4 秒 35	4 秒 21
	4 秒 65	4 秒 52	4 秒 41	4 秒 28
	4 秒 65	4 秒 55	4 秒 33	4 秒 28
	—	4 秒 46	4 秒 34	4 秒 33
	—	—	—	4 秒 21
平均時間	4 秒 65	4 秒 49.8	4 秒 35.8	4 秒 26.2

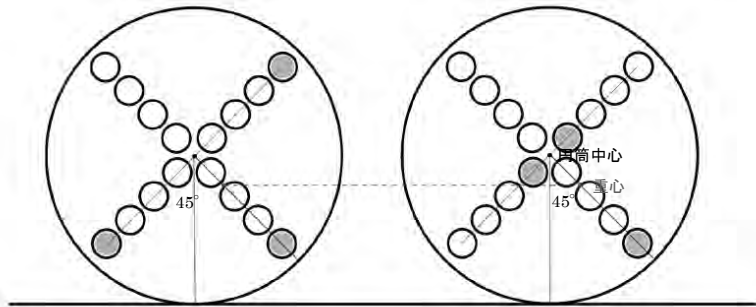


図 2 [S4. E4. W4]と[S4. E1. W1]

問 3 重心位置と周期の関係

問 2 と同様な条件において [S4], [S3], [S2], [S1] 円筒の周期運動を観察する。これらの円筒の重心位置は、円筒本体の質量と乾電池一本の質量との関係において定義されるが、[S] の位置が内周に向かうほど、その重心位置も円筒中心に近づくことは容易に理解できる。言い換えると、[S4], [S3], [S2], [S1] の順でこの円筒全体の重心と円筒中心との距離は短くなっていることが分かる。このことと表 3 に示された結果から、[S] 円筒の周期は、重心と円筒中心との距離に強く影響され、その距離が短いほど周期が明確に長くなることがわかる。この理由は、図 3 に示した [S4] と [S1] との比較において、乾電池の質量を m とする時、[S4], [S1] の $\circ$ 点まわりのモーメント（円筒を S 軸が鉛直方向に静止したつりあい状態に戻そうとする働き）は、それぞれ $mg \cdot l_{S4}$, $mg \cdot l_{S1}$ となり、図より $mg \cdot l_{S4} > mg \cdot l_{S1}$ なので、[S4] の方がつりあい状態に戻そうとする働きが強く、結果として相対的に早い周期運動になっていると言うことができる。また、円筒とステージとの間に滑りがないものと考え、ステージとの接地面において円筒にかかる水平方向の摩擦力は N に静止摩擦係数をかけたものであると考えることができ、すべての [S] において同一であることが考えられるので、この周期運動の違いには関与しないものと考えることができる。

表 3 [S] 円筒の 5 往復周期運動に要した時間

乾電池位置	[S4]	[S3]	[S2]	[S1]
5 往復に要した時間	3 秒 62	4 秒 18	5 秒 20	7 秒 46
	3 秒 67	4 秒 18	5 秒 17	7 秒 65
	3 秒 57	4 秒 15	5 秒 17	7 秒 44
	3 秒 65	4 秒 10	5 秒 25	7 秒 58
	3 秒 65	4 秒 16	5 秒 23	7 秒 59
平均時間	3 秒 63.2	4 秒 15.4	5 秒 20.4	7 秒 54.4

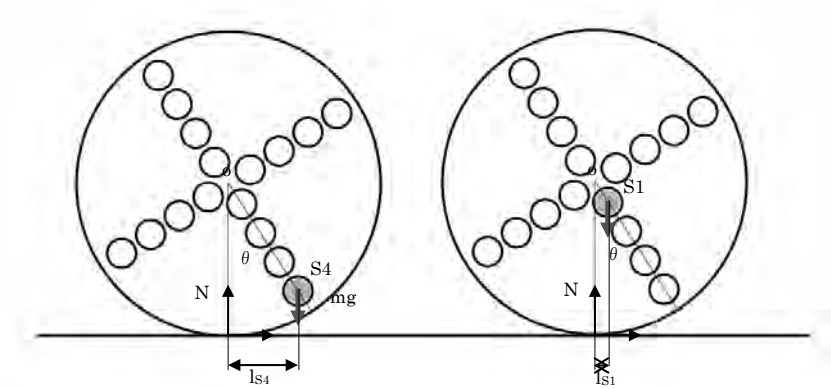


図 3 円筒中心周りのモーメント

問 4 まとめ

ー おきあがりこぼし運動を支配する慣性モーメント（回転慣性）と重心位置の影響

問 1, 2 の結果からは, 乾電池は外側にあるほど円筒の動きを遅くすることが予想できる。その一方で, 問 3 の結果からは, 円筒中心と重心位置との距離が近ければ近いほど周期が長くなることが示されている。つまり, 4 本の乾電池はできるだけ外周に近く配置され, そして同時に, 円筒と 4 本の乾電池で構成される重心位置はできるだけ円筒中心に近いことが最長周期の構成を得るためには必要となる。そうすると, [S4. E4. N3. W4] が, 乾電池 4 本使用時の最長周期組み合わせとなることが予想される。この予想を検証するために, [S4. E4. N3. W4] の他に, [N] だけを移動した [S4. E4. N2. W4] と, [S4. E4. N3. W4] と重心位置は同じであるが, やや転がりやすくなることが予想される [S3. E3. N2. W3] に対する周期運動の観察を, 問 2, 3 と同様の方法により実施し, 表 4 を得た。その結果, 予想通り, もっとも転がりにくいことが予想される「できるだけ外周に 4 本の乾電池が配置され, かつ「円筒中心と重心位置が最も近い」という二つの条件を満たす [S4. E4. N3. W4] が, 予想通りに最長周期の円筒であることが確認できた。

表 4 [S. E. N. W]円筒の 5 往復周期運動に要した時間

乾電池位置	[S4. E4. N3. W4]	[S4. E4. N2. W4]	[S3. E3. N2. W3]
5 往復に要した 時間	9 秒 97	6 秒 94	8 秒 41
	9 秒 87	6 秒 79	8 秒 58
	9 秒 62	6 秒 75	8 秒 92
	10 秒 07	6 秒 78	8 秒 78
	9 秒 88	6 秒 94	8 秒 65
平均時間	9 秒 88	6 秒 84	8 秒 66. 8

平成 26 年度

千葉大学先進科学プログラム入学者選考課題

課題論述

課題[II-A], [II-B], [II-C]

(10:00－15:30)

H26
—
課題

注意事項

課題 II には、[II-A]、[II-B]、[II-C]の 3 題があります。

志望するコースによって、次に示す問題を解答してください。

- ・ 物理学コース：
[II-A]、[II-B]の 2 題を解答してください。
- ・ フロンティアテクノロジーコース：
[II-A]、[II-B]、[II-C]の中から 2 題を選択して解答してください。

II-A

問 1 質量 m の小球 A, B が、長さ 2ℓ の軽くて細い伸び縮みしないひもで結ばれている。図 1 のように、水平でなめらかな机の上面の右端から距離 ℓ の位置に小球 B を固定し、小球 A を右上端から鉛直下方向につるした。机の右上端には、図 2 のように、大きさの無視できる小さなパイプが取り付けられていて、ひもや小球 B はパイプの内側をパイプに沿ってなめらかに動いて方向を変える。時刻 $t = 0$ に、小球 B の固定を静かにはずすと、2つの小球はひもが張ったまま動き始めた。重力加速度の大きさを g として、以下の問いに答えなさい。

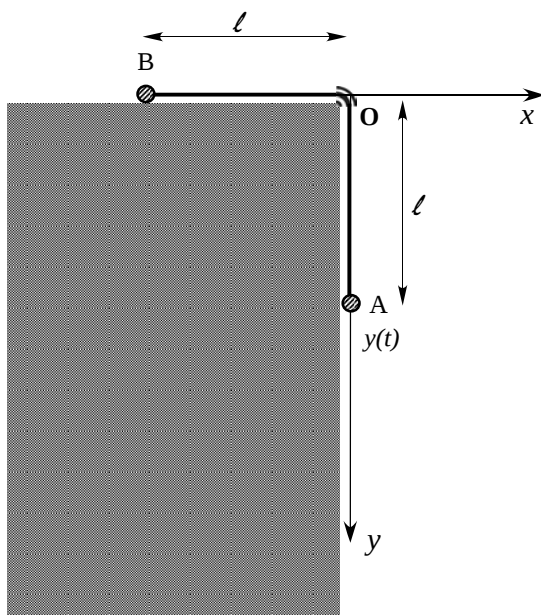
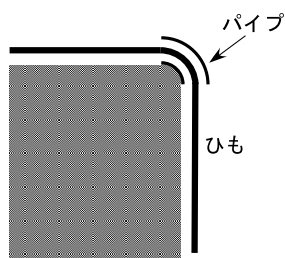


図 1



机の右上端近くの様子

図 2

まず、小球 B が動き始めてから机の右上端に到着するまでの運動を考えよう。机の右上端を原点 O とし、図 1 のように、 x , y 軸を取る（それぞれ右方向、鉛直下方向を正の方向とする）。この時、小球 A は y 方向、小球 B は x 方向に運動する。

- (1) ひもの張力の大きさを T とした時、小球 A の y 方向の加速度 a_A 、および小球 B の x 方向の加速度 a_B を、 T 、 m 、 g の内から必要な記号を用いて表しなさい。
- (2) 小球 A と B は異なる方向に運動するが、ひものは張ったままなので、その速さや加速度の大きさは等しい。 $a_A = a_B$ に注意すると、小球 A の y 方向の加速度 a_A は、 g の何倍になるか。
- (3) 時刻 t における小球 A の速さ $v(t)$ と位置 (y 座標のこと) $y(t)$ を求めなさい。

以下では、小球 A、B とひものをまとめて「全系」と呼ぶことにする。 $y = 0$ を、小球 A、B の重力による位置エネルギーの基準とする。

- (4) 時刻 t における全系の力学的エネルギー $E(t)$ を、 $y(t)$ および $v(t)$ を用いて表しなさい。また、この $E(t)$ は、 $t = 0$ での全系の力学的エネルギー $E(t = 0)$ と一致することを示しなさい。
- (5) 小球 B が机の右上端に到着する時刻 t_1 、およびその時の小球 B の速さ v_1 を求めなさい。

次に、小球 B が机の右上端に到着した後の運動を考えよう。時刻 t_1 以後も、ひものは張ったままで、小球 B も机の右上端から鉛直下方向に運動した。

- (6) t_1 以後の時刻 t における小球 A の位置 (つまり y 座標) $y(t)$ を、 t 、 t_1 、 v_1 、 ℓ 、 g を用いて表しなさい。

以上の結果をもとに、小球 B の固定がはずれる前 ($t < 0$) から、小球 B が机の右上端を通過し鉛直下方向に運動した後まで ($t > t_1$) の、小球 A の位置やひもの張力を考えよう。

- (7) 小球 A の位置 $y(t)$ を、時刻 t の関数としてグラフに描きなさい。特に、時刻 $t = 0$ および $t = t_1$ の前後における変化を説明しなさい。
- (8) 小球 B の固定が外れる前 ($t < 0$) のひもの張力の大きさを T_0 、小球 B の固定が外れた後の時刻 $0 < t < t_1$ 、 $t_1 < t$ におけるひもの張力の大きさをそれぞれ T_1 、 T_2 とする。 T_0 、 T_1 、 T_2 を求めなさい。特に、 T_1 、 T_2 が T_0 と異なる値になる理由を説明しなさい。
- (9) 机の右上端にあるパイプが全系から受ける力の x 成分 $F_x(t)$ 、 y 成分 $F_y(t)$ を、時刻 t の関数としてグラフに描きなさい。特に、小球 B は短い時間間隔 Δt でパイプを通過するとして、その時の力も記入すること。

問 2 次に、ひもは細くて伸び縮みしないが、その質量が無視できない場合、問 1 で調べた運動がどのように変化するかを考えよう。ひもの単位長さあたりの質量 (線密度) を ρ とする。また、ひもは机の上面でたわまないとする。

特に以下では、固定がはずれて小球 B が動き始めてから机の右上端に到着するまでの運動を考える。この場合も、小球 A と B の運動する方向は異なるが、ひもは張ったままなので、小球 A と B の速さや加速度の大きさは等しい。以下の問いに答えなさい。

まず、質量が無視できる場合と無視できない場合のどちらの場合に、小球 A が速く落下するかを考えよう。

- (1) $y = 0$ を、小球 A, B およびひもの重力による位置エネルギーの基準とする。小球 A の位置が $y = Y$ の時のひもの重力による位置エネルギーを、 ρ, g, Y を用いて表しなさい。
- (2) 全系の力学的エネルギーが保存されることを用いて、小球 A が位置 $y = Y$ を通過する時の速さ V を求めなさい。
- (3) 小球 A が位置 $y = Y$ を通過する時の速さは、ひもの質量が無視できる場合と無視できない場合のどちらの場合が大きいかを説明しなさい。また、この結果から、どちらの場合に小球 A が速く落下するかを説明しなさい。

小球 A の位置 $y(t)$ を時刻 t の関数として求めるためには、全系の運動方程式を考えるとよい。ひもは張ったまま運動するので、時刻 t における加速度の大きさは、小球 A, B およびひものいずれの部分でも同じで、微分 $\frac{d^2}{dt^2}y(t)$ で与えられるので、全系の運動方程式は、

$$(2m + 2\rho\ell) \cdot \frac{d^2}{dt^2}y(t) = mg + \rho y(t)g \cdots \cdots *$$

と書くことができる。

- (4) * 式の各項の意味を説明しなさい。
- (5) * 式の解は、 $y(t) = C_1 e^{\lambda t} + C_2 e^{-\lambda t} + C_3$ と書けることが知られている。ここで、 λ, C_1, C_2, C_3 は定数である。この解が任意の時刻において運動方程式を満たすことに注意して、 λ および C_3 を求めなさい。
- (6) さらに、上問 (5) の解が満たすべき $t = 0$ での小球 A の位置と速度を考えて、 C_1 および C_2 を求めなさい。

ひもの質量が無視できない場合、ひもの張力は時刻やひもの場所に依存して変化する。時刻 t における、ひもに沿って小球 A から距離 z ($0 < z < 2l$) 離れた位置のひもの張力の大きさを $T(t, z)$ とする。

- (7) 上問 (5), (6) の答から時刻 t における小球 A やひもの加速度が分かるので、ひもを仮想的に z の位置で切って、小球 A と z 以下のひもの部分の運動方程式を考えることで、ひもの張力の大きさ $T(t, z)$ を求めることができる。 $z < y(t)$ および $z > y(t)$ に場合分けして、 $T(t, z)$ を求めなさい。また、この $T(t, z)$ を位置 z の関数としてグラフに描きなさい。

このグラフから、ひもの運動中に、ひものどの部分に大きな張力が働くか、その大きさは時刻 t と共にどのように変化するかなどが分かることになる。

II-B

十分に長い直線状の導線に、定常電流 I を流す。これを以下では直線電流と呼ぶ。直線電流のまわりに発生する、磁場の強さ（以下、磁場と呼ぶ）について考えよう。

問 1 まず、1本の直線電流を考えよう。直線電流は、原点 O を通り、 z 軸の正の方向に流れている。

- (1) z 軸から距離 r 離れた位置における磁場の大きさ H_1 を、 I 、 r を用いて表しなさい。
- (2) $r = 0.300$ m, $I = 4.00 \times 10^2$ A のときの磁場の大きさを考える。 H_1 の値に真空の透磁率 μ_0 をかけた数値を電卓を利用して計算しなさい。ただし、 $\mu_0 = 1.257 \times 10^{-6}$ N/A² であり、最終的な数値の単位は、磁束密度の単位 [T] と一致する。

次に、2本の直線電流を考えよう。2本の直線電流は、 xy 平面の点 $A(a, 0)$ 、点 $B(-a, 0)$ ($a > 0$) をそれぞれ通り、ともに z 軸の正の方向に流れている。2本の直線電流によって、 xy 平面の点 A 、 B 以外の点 $P(x, y)$ に作られる磁場 H_2 は、ベクトル $\vec{H}_2$ を用いて表される。

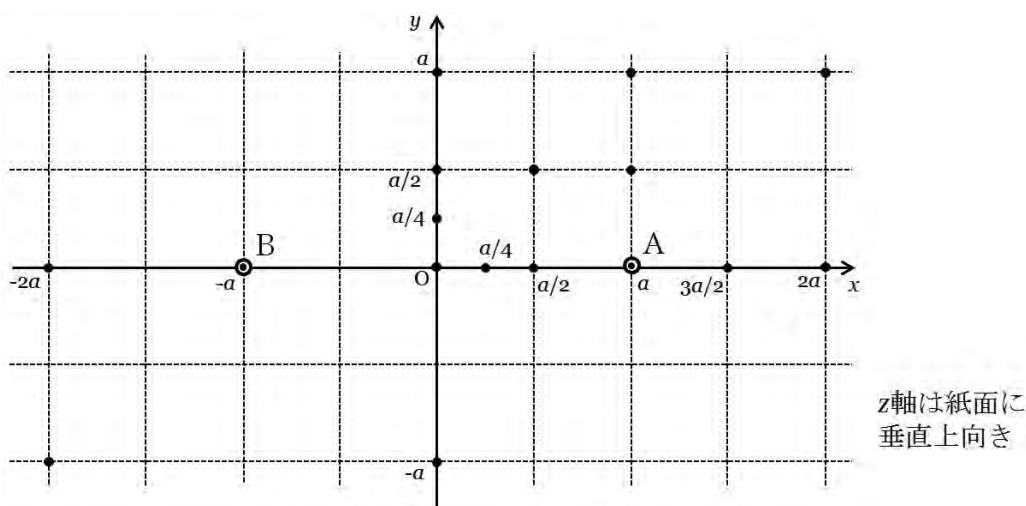


図 1：2本の直線電流による磁場（ z 軸は紙面に垂直上向き）

- (3) 図 1 に指示された点 A 、 B 以外の各点（黒丸点）における、点 A を通る直線電流によって作られる磁場 $\vec{H}_{2A}$ を、向きを矢印の向きで、大きさを矢印の長さで表すことにより、専用の解答用紙（1 目盛り = 2.5 cm）に図示しなさい。解答用紙には、矢印の記入例として、 $\vec{H}_{2A}$ の原点 O での磁場を基準（矢印の長さ = 2.0 cm）として示してあるので、この点に関しては解答しなくてよい。また、矢印の向きや長さに、多少の誤差があってもよい。

- (4) 次に、図1に指示された点 A, B 以外の各点（黒丸点）における、点 B を通る直線電流によって作られる磁場 $\vec{H}_{2B}$ を、(3) と同様に専用の解答用紙に図示しなさい。
- (5) (3), (4) で描画した磁場 $\vec{H}_{2A}$ と $\vec{H}_{2B}$ を、重ね合わせの原理により合成することで、2本の直線電流による磁場は、 $\vec{H}_2 = \vec{H}_{2A} + \vec{H}_{2B}$ と求めることができる。図1に指示された点 A, B 以外の各点（黒丸点）における、 $\vec{H}_2$ を、専用の解答用紙に図示しなさい。ただし、磁場がゼロとなる点に関しては矢印を示す必要はない。また、矢印の向きと長さに、多少の誤差があってもよい。必要があればトレーシングペーパーを利用してよいが、最終的な解答は解答用紙に図示しなさい。
- (6) (5) の結果を参考にして、点 A, B を通る直線電流のまわりに発生する、 xy 平面内における磁力線の概略を専用の解答用紙に図示しなさい。

以上により、2本の平行な直線電流による磁場の概要が理解できた。

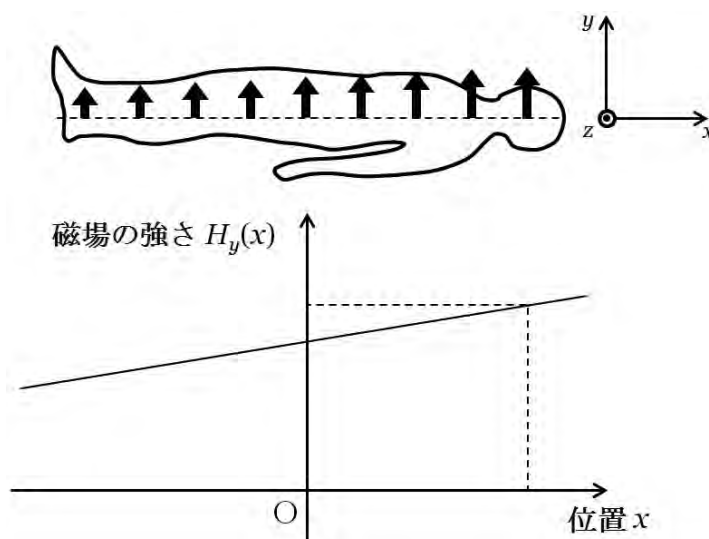


図2：MRIに用いられる一定の勾配をもつ磁場

医療の現場で利用されている磁気共鳴画像（Magnetic Resonance Imaging: MRI）においては、空間的に一定の勾配をもつ（1次関数的な）磁場（図2）と時間的に変動する交流磁場を組み合わせることで、人体の断層画像を得ている。以下では、 x 軸上で、磁場の y 成分が一定の勾配をもつ場合を考えよう。

一定の勾配をもつ磁場とは、原点 O 付近で x 軸上の磁場の y 成分 $H_y(x)$ を、

$$H_y(x) = h_0 + h_1x + h_2x^2 + h_3x^3 + h_4x^4 + h_5x^5 + \dots \quad (h_n \text{ は定数, ただし, } n = 0, 1, 2, \dots) \quad (1)$$

と表すことができ、 h_0 と h_1 以外のすべての係数 h_n がゼロになるような磁場である。しかし、これは厳密な定義であり、実際にこのような磁場を作ることは困難である。ゼロ

でない h_0 の項だけの磁場を作ることと、 h_1 の項だけの磁場を作るとは分離して考えることができるため、以下では $h_0 = 0$ とする。その上で、本問では、「 $H_y(x)$ が奇関数 ($H_y(x) = -H_y(-x)$, すなわち $h_{2n} = 0$), かつ $h_3 = 0$ 」となる場合の磁場を実用上一定の勾配をもつ磁場とみなして、これを一定の勾配をもつ磁場と呼ぶことにする。

直線電流が 1 本の場合でも、2 本の場合でも、装置を人体と比べて大きくして、電流間の距離を遠ざければ磁場の変化はゆるやかになるが、それだけで勾配を一定 ($h_3 = 0$) にすることはできない。勾配を一定にするためには、最低 4 本の直線電流が必要である。そこで、次のような配置の直線電流を考えよう。

問 2 4 本の直線電流が、 xy 平面の点 $A(a, b)$, 点 $B(-a, b)$, 点 $C(a, -b)$, 点 $D(-a, -b)$ ($a \geq b > 0$) をそれぞれ通り、すべて z 軸の正の方向に流れている。

- (1) 点 A を通る直線電流によって、 xy 平面の点 A, B, C, D 以外の点 $P(x, y)$ に作られる磁場 $\vec{H}_A$ の x 成分と y 成分を、 I, x, y, a, b を用いてそれぞれ表しなさい。ただし、 $\vec{H}_A$ が、ベクトル $(x-a, y-b)$ に直交することに注意しなさい。
- (2) 4 本の直線導線によって、 xy 平面の x 軸上に作られる磁場 $\vec{H}_4$ の x 成分と y 成分を、 I, x, a, b を用いてそれぞれ表しなさい。
- (3) (2) の $\vec{H}_4$ の y 成分を、 $H_{4y}(x)$ とする。 $H_{4y}(x)$ が奇関数であることを示しなさい。

- (4) ある変数 α に対して、 $|\alpha| \ll 1$ のときに成り立つ近似式

$$\frac{1}{1 + p\alpha + \alpha^2} \simeq 1 - p\alpha + (p^2 - 1)\alpha^2 - p(p^2 - 2)\alpha^3 \quad (p \text{ は定数})$$

を用いて、 $H_{4y}(x)$ について、 $|x| \ll \sqrt{a^2 + b^2}$ のときの近似式を $\frac{x}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ の 3 次の項まで求めなさい。ここで「 $\frac{x}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ の 3 次の項まで求める」とは、 $H_{4y}(x)$ の近似式を、 $\frac{x}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ の 4 次以上の項を無視したうえで、

$$H_{4y}(x) \simeq h'_0 + h'_1 \left(\frac{x}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right) + h'_2 \left(\frac{x}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 + h'_3 \left(\frac{x}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^3$$

の形で表し、各係数 h'_0, h'_1, h'_2, h'_3 を決定する、という意味である。

- (5) この電流配置において、 $|x| \ll \sqrt{a^2 + b^2}$ の領域で一定の勾配を得るには、比 a/b がある値と等しい必要がある。 $a \geq b$ であることと、(4) の結果を利用して、この比の値を求めなさい。
- (6) $b = 0.300 \text{ m}$, a を (5) で求めた比で決めた長さとし、 $I = 4.00 \times 10^2 \text{ A}$ の電流を流したとき、 $x = b \text{ [m]}$ の位置で得られる磁場の大きさを考えよう。(2) の近似を用いない $H_{4y}(b)$ に真空の透磁率 μ_0 をかけた数値と、(5) で求めた近似式 $H_{4y}(b)$ に μ_0 をかけた数値を、ともに電卓を適宜用いて計算しなさい。

問 3 最後に、問 2 とは異なる電流の向きもしくは配置で、直線電流を複数本配置して、問 2 と同様に、ある軸に沿って一定の勾配をもった磁場を作ること考えよう。直線電流の本数と配置、電流の向きは自由に設定できるものとし（必ずしも本数と配置を変更する必要はない）、直線電流どうしがある一点で交わっても、それぞれの電流

は元から流れていた導線に流れ続けるものとして、目的の磁場を作るための配置を提案しなさい。例えば、問2では、 x 軸方向に進むと y 方向の磁場が一定の勾配をもつ場合を考えたが、 x 軸方向に進んで x 方向の磁場が一定の勾配をもつ場合が考えられるだろうか。解答においては、必要があればどのような配置になるか図示しなさい。また、磁場の勾配の様子がわかるように数式を用いて説明しなさい。

以上のような直線電流の配置により、空間的に一定の勾配をもつとみなせる磁場を作ることができる。本問では、単純な配置の定常電流によって一定の勾配をもつ磁場を作る方法を考えた。現実の MRI でも、本問で見てきた電流配置が用いられることがある。しかし実際には、十分に長い導線を用意することは難しいので、そのような問題を解決し、改良した導線設計による、一定の勾配をもつ磁場（勾配磁場）が利用されている。また、本問では考えなかった式 (1) の h_0 の項に対応する空間的に一様な磁場（均一磁場）に関しては、永久磁石や超伝導線を利用したソレノイドコイルが用いられている。ソレノイドコイルによる均一磁場が数 T の大きさなのに対して、問2の最後で求めた勾配磁場の大きさは、MRI の測定が可能な範囲で十分小さいものであり、大きな均一磁場と小さな勾配磁場を組み合わせることにより、精密な磁気共鳴画像を得ている。

II-C

4つの席がある円卓に4人の客が着席する場合の数の性質を考えてみよう。図1に示すように、4つの席に1,2,3,4と番号を付け、客をA, B, C, Dとすれば

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ A & B & C & D \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ D & A & B & C \end{bmatrix}$$

のような、座席と客の対応表ができる。しかし、図1に示すようにこの2つの配置は円卓の回転を考えると同じ配置になる。このように配置が幾何学的な構造を持つとき、1列に並べた配列の総数と異なった性質が現れる。

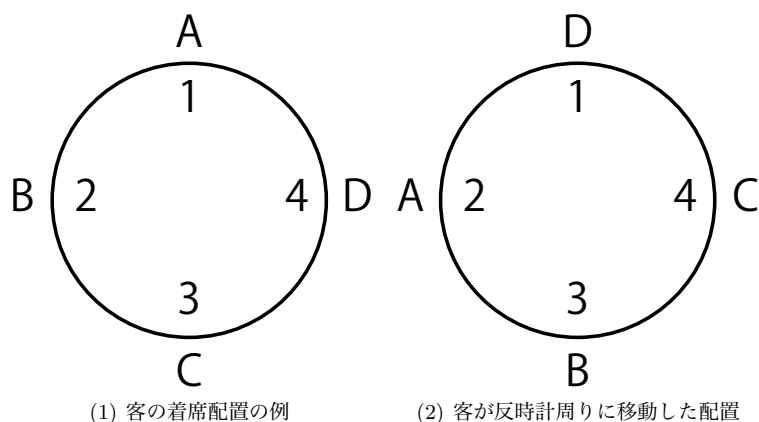


図 1: 円卓への客の配置の例

そこで、直線に並んだ順列と、円環に並んだ配置の関係を調べてみよう。円環配列の例として、数珠の玉の配置を考えることにする。

問 1

- 白黒2色の玉が多数混ざって入った袋から、合計4個の玉を取り出し、1列に並べる場合にできる配列の総数を求めなさい。
- 白黒2色の玉が多数混ざって入った袋から、合計4個の玉を取り出してできる数珠の玉の配置の総数を、配置を図で列挙して求めなさい。数珠の玉の配置は、数珠を裏返しても同じであることに注意しなさい。

- (c) 白 1 個, 黒 1 個, 黄 2 個, 合計 4 個の玉で数珠を作る。この数珠の配置の総数を, 配置を図で列挙することで求めなさい。
- (d) 白 1 個, 黒 1 個, 黄 1 個, 赤 1 個, 合計 4 個の玉で数珠を作る。この数珠の配置の総数と, 円卓に 4 人が席に付く配置の総数との関係を説明しなさい。

以下では, 数珠に白, 黒, 黄, 3 種類で, 合計 6 個の玉を使い, 白黒を合計 3 個しか利用しない場合の数珠の玉の配置の総数を数え上げることを考える。そのためにまず, 白, 黒, 黄, 3 種類の玉を 1 列に並べる場合の数の計算法を, 次の 2 項定理の性質を利用して求めることから始める。

2 項定理

$(x + y)^n$ を展開したときの $x^k y^{n-k}$ の係数が, 黒が k 個, そして残り $(n - k)$ 個の白が 1 列に並んだ配列の総数である。

2 項係数の関係を利用して次の問いに答えなさい。

問 2

- (a) $(x + y + z)^n$ を展開した $x^i y^j z^k$ ($i + j + k = n$) の係数が, 黒を i 個, 白を j 個, 黄を k 個, 合計 n 個の玉を 1 列に並べる場合の配列の総数であることを示しなさい。
- (b) また, その係数を i, j, k, n の式で表しなさい。

白, 黒, 黄 3 種類の玉を合計 6 個使い, 白玉と黒玉を合計 3 個しか利用しない場合の数珠の玉の配置の総数を数え上げる問題は, 次のように有機化学の問題と関係がある。

炭素 6 個と水素 6 個とからなる物質の化学式は C_6H_6 である。この化学式を持つ物質としてよく知られているのはベンゼンである。ベンゼンは 6 個の炭素が平面上で正六角形になるように並び, 各頂点の炭素に水素が 1 個ずつ結合している。その状態を図 2 (1) のような記号で表現する。

さて, ベンゼンの水素は塩素原子 Cl やメチル基 CH_3 に置き換わることが知られている。例えば, 3 つの頂点の水素が塩素原子 Cl に置換すると化学式 $C_6H_3Cl_3$ のトリクロロベンゼンとなる。図 2(1) に示すように, 通常六角形の頂点に存在する水素は省略して表記される。

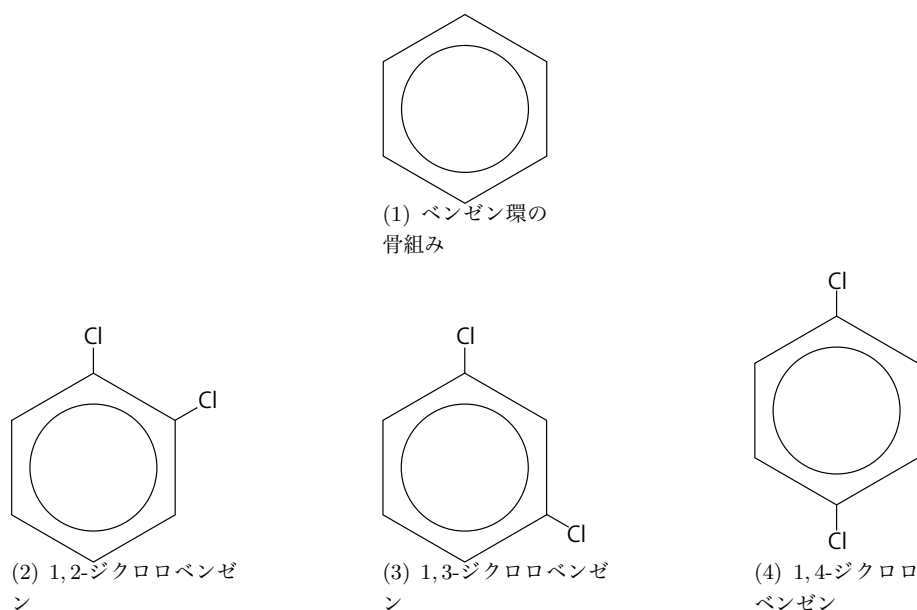


図 2: 有機物の構造:ベンゼン環の骨組みとジクロロベンゼン $C_6H_4Cl_2$ の 3 つの構造

問 3 図 2 (2) (3) (4) に示すジクロロベンゼンの幾何学構造を参考に、トリクロロベンゼン $C_6H_3Cl_3$ の全ての構造を図で列挙しなさい。

次に、ベンゼンの六角形の頂点に存在する水素 H のうち、2 個の水素が X に置き換わり、さらに 1 個の水素が Y に置き換わった物質 $C_6H_3X_2Y$ の異なる幾何構造の個数を数え上げる手法を構成しよう。

ベンゼン環の骨組みは 3 次元空間に浮かんだ透明な板の上に描いた六角形と考えることができる。この六角形を上から見ても、下から見ても同じ形である。上下や左右の裏返しを鏡像という。

ベンゼンの正六角形の頂点の置換を考えるために、正六角形の頂点に付けた番号を並べ替えることを考える。正六角形の 6 つの頂点に反時計回りに番号を付ける。この図形に回転と鏡像を組み合わせて作用させ、頂点の番号を付け替えることを考える。例えば図 3(1) の配置を反時計回りに 60 度回転すると図 3(2) の配置を得る。

これは、 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ からそれ自身への変換

$$1 \rightarrow 6, 2 \rightarrow 1, 3 \rightarrow 2, 4 \rightarrow 3, 5 \rightarrow 4, 6 \rightarrow 5$$

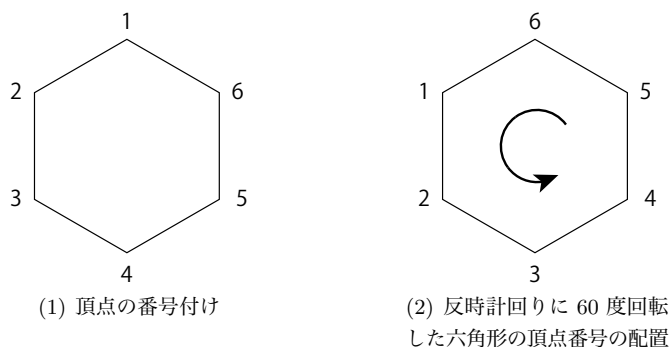


図 3: 正六角形の回転: (1) 正六角形の 6 つの頂点に反時計回りに番号を付ける。(2) 反時計回りに 60 度回転した配置を得る。

を決めたことに相当する。この変換 $\mathbf{F}_{60}$ を表を使って

$$\mathbf{F}_{60} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

と書くことにする。すなわち変換の定義域 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ を上の行に, 対応する値 $\{6, 1, 2, 3, 4, 5\}$ を下の行に記述することにする。

問 4 正六角形の頂点の番号を回転と鏡像だけで変換するすべての変換を表

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a & b & c & d & e & f \end{bmatrix}$$

の形式で書き下しなさい。

図 4(1) に示す変換 $\mathbf{F}_{240}$ は表

$$\mathbf{F}_{240} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

によって定義される。この変換を 3 回適用すると

$$\begin{aligned} 1 &\rightarrow 3 \rightarrow 5 \rightarrow 1 \\ 2 &\rightarrow 4 \rightarrow 6 \rightarrow 2 \\ 3 &\rightarrow 5 \rightarrow 1 \rightarrow 3 \\ 4 &\rightarrow 6 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \\ 5 &\rightarrow 1 \rightarrow 3 \rightarrow 5 \\ 6 &\rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 6 \end{aligned}$$

のように番号は次々と変換され変換を3回操作すると、図4(2)に示すように配置は元にもどる。しかも、 $\{1, 3, 5\}$, $\{2, 4, 6\}$ だけで変換が閉じており、それぞれの組で対応が

$$1 \rightarrow 3 \rightarrow 5 \rightarrow 1$$

$$2 \rightarrow 4 \rightarrow 6 \rightarrow 2$$

のように巡回して元に戻ることがわかる。そこで、変換 $\mathbf{F}_{240}$ のこの関係を

$$(\mathbf{F}_{240}) = (135)(246)$$

と表し、変換 $\mathbf{F}_{240}$ の巡回表現と呼ぶ。

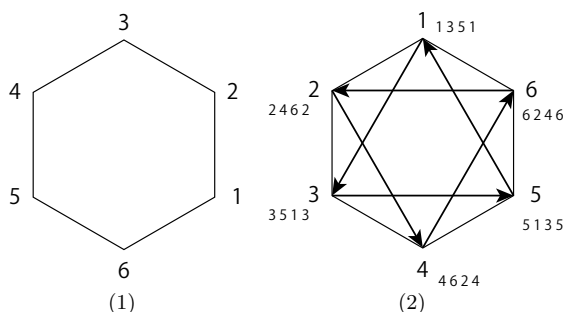


図 4: 正六角形の回転: (1) 正六角形の6つの頂点に反時計回りに番号を付ける。(2) 巡回表現 $(135)(246)$ による変換

問 5 問 4 で求めた表をすべて巡回表現で表しなさい。

6 個の要素に作用する変換

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & b_1 & b_2 & b_3 \\ a_2 & a_3 & a_1 & b_2 & b_3 & b_1 \end{bmatrix}$$

を3回作用させると

$$a_1 \rightarrow a_2 \rightarrow a_3 \rightarrow a_1, \quad b_1 \rightarrow b_2 \rightarrow b_3 \rightarrow b_1$$

のように2つの集合 $\{a_1, a_2, a_3\}$ と集合 $\{b_1, b_2, b_3\}$ のそれぞれの中で巡回的な変換が行われている。すなわち、要素6個の集合 $\{a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3\}$ が2つの閉じた巡回的な対応に分かれることが分かる。

またさらに,

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & b_1 & b_2 & c_1 & c_2 \\ a_2 & a_1 & b_2 & b_1 & c_2 & c_1 \end{bmatrix}$$

を2回作用させると

$$a_1 \rightarrow a_2 \rightarrow a_1, \quad b_1 \rightarrow b_2 \rightarrow b_1, \quad c_1 \rightarrow c_2 \rightarrow c_1$$

の様に, 集合 $\{a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2\}$ を巡回的な変換がなされる3つの部分集合 $\{a_1, a_2\}$, $\{b_1, b_2\}$, $\{c_1, c_2\}$ に分割できる. 従って, $\mathbf{F}$, $\mathbf{G}$ の巡回表現はそれぞれ, $(\mathbf{F}) = (a_1 a_2 a_3)(b_1 b_2 b_3)$, $(\mathbf{G}) = (a_1 a_2)(b_1 b_2)(c_1 c_2)$ となる.

巡回表現の要素の個数を考慮して, 要素の数が3個である $(a_1 a_2 a_3)$ と $(b_1 b_2 b_3)$ に f_3 を対応させ, $\mathbf{F}$ に $f_3^2 = f_3 f_3$ を対応付けることにする. また, 要素の数が2個である $(a_1 a_2)$, $(b_1 b_2)$, $(c_1 c_2)$ に f_2 を対応させ, $\mathbf{G}$ に $f_2^3 = f_2 f_2 f_2$ を対応付けることにする. f_3^2 や f_2^3 を $\mathbf{F}$, $\mathbf{G}$ の巡回数と呼ぶ. 例えば, $(1)(2)(3)(4)(5)(6)$ の巡回数は $f_1^6 = f_1 f_1 f_1 f_1 f_1 f_1$ であり, $(123)(456)$ の巡回数は $f_3^2 = f_3 f_3$ である. このように変換に対応して1つの整式を決めることができる.

問6

- (a) 正六角形の頂点番号付替えの巡回数を f_k^l とすると k, l は $k \times l = 6$ を満たす正の整数であることを説明しなさい.
- (b) 正六角形の頂点番号付替えの巡回数が $f_k^l f_m^n$ となる場合に k, l, m, n の間に成り立つ関係を導きなさい.

図形の頂点番号付替えに関して, 同じ巡回数が複数あるときはその数を重みとして巡回数に掛けることにする. そして, 図形の頂点番号付替えに関する巡回数の総和を, 変換の総数で割った整式を巡回指標と呼ぶ.

正方形の頂点番号付替えについて, 巡回指標を求めてみる. 正方形の回転と鏡像による頂点の番号の付け替えは, 図5に示す8種類である. 図5より, 番号の付け替えの巡回表現は

$$\begin{array}{cccc} (1)(2)(3)(4) & (1)(3)(24) & (12)(34) & (1234) \\ & (2)(4)(13) & (13)(24) & (1432) \\ & & (14)(23) & \end{array}$$

の8種類である.

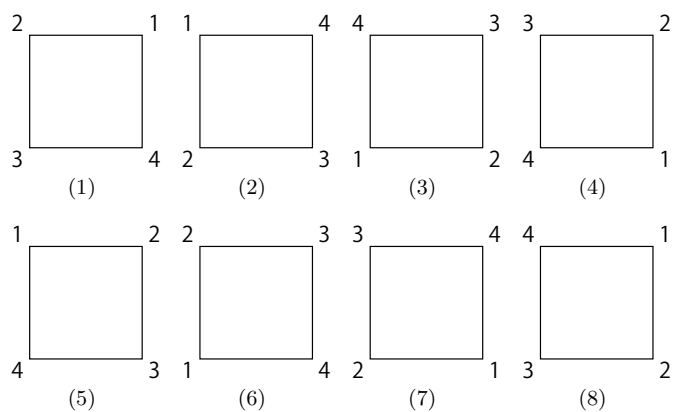


図 5: 正方形の頂点の番号の付け替え

問 7 正方形の頂点の番号付替えに関して, f_1^4 が 1 種類, $f_1^2 f_2$ が 2 種類, f_2^2 が 3 種類, f_4 が 2 種類, 合計 8 種類ある。巡回指標 σ_4 を求めなさい。

問 8 正六角形の頂点の番号付替えに関する並べ替えの総数を計算し, 巡回指標 σ_6 を求めなさい。

巡回指標を利用すると, 正 n 角形の n 個の頂点に色を塗り分ける場合の数を計算できる。このことに関して以下の定理が知られている。

定理

正 n 角形の n 個の頂点番号付替えに関して、巡回指標の中の f_k に $x^k + y^k + z^k$ を代入する。そして、巡回指標を x, y, z の整式に展開する。

$i + j + k = n$ であるとき、単項式 $x^i y^j z^k$ の係数が、 x 色の頂点が i 個、 y 色の頂点 j 個、 z 色の頂点が k 個になる場合の数である

問 9

- (a) σ_4 の f_k に $x^k + y^k$ を代入し、

$$\sigma_4(x, y) = B_1 x^4 + B_2 x^3 y + B_3 x^2 y^2 + B_4 x y^3 + B_5 y^4 + R(x, y)$$

ただし、 $R(x, y)$ は $x^4, x^3 y, 2x^2 y^2, x y^3, y^4$ を含まない $x^i y^j$ ($i + j = 4$) の整式とする。 B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 を計算しなさい。

(ヒント:2項定理を利用して必要な項だけ計算することができる。)

- (b) $(B_1 + B_2 + B_3 + B_4 + B_5)$ の値が問 1(b) の解と一致することを説明しなさい。

- (c) σ_4 の f_k に $x^k + y^k + z^k$ を代入し、

$$\sigma_4(x, y, z) = C_1 x^2 y z + C_2 x y^2 z + C_3 x y z^2 + Q(x, y, z)$$

ただし、 $Q(x, y, z)$ は $x^2 y z, x y^2 z, x y z^2$ を含まない $x^i y^j z^k$ ($i + j + k = 4$) の整式とする。 C_1, C_2, C_3 を計算することによって $C_1 = C_2 = C_3$ が成立することを示しなさい。

(ヒント:問 2(b) の結果を利用すると必要な項だけ計算することができる。)

- (d) 問 1(c) の結果を参考に、 $C_1 = C_2 = C_3$ が成立する理由を説明しなさい。

さて、正方形の場合を参考にベンゼン環の場合を計算してみよう。

問 10

- (a) 6 個の玉からなる数珠の 3 つの玉を無色に、それ以外の 3 玉を黒 2 個、白 1 個で塗り分ける場合の数を求めなさい。
- (b) (a) の答えがベンゼンの六角形の頂点に存在する水素 H のうち、2 個の水素が X に置き換わり、さらに 1 個の水素が Y に置き換わった物質 $C_6 H_3 X_2 Y$ の配置の総数になっていることを説明しなさい。

シクロプロパンの化学式は C_3H_6 であり, 図 6(1) に示すように 3 つの炭素が平面上で正三角形に配置し, 正三角形の 3 つの頂点にそれぞれ水素が 2 個ずつ結合している。6 個の水素は正三角形柱の頂点に配置している。

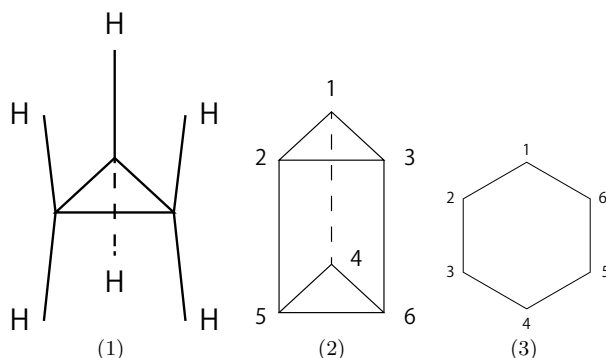


図 6: 有機物の立体構造 (1) シクロプロパンの立体構造: 水素は正三角形柱の頂点に位置している。 (2) 正三角柱の頂点の番号付け (3) 六角形の頂点の番号付け

シクロプロパン C_3H_6 のなす正三角柱の頂点の水素を 3 個を X, Y, Z 各 1 個ずつで置換した物質 C_3H_3XYZ の総数を計算するためには, ベンゼンの場合と同様に変換の表示を求める。次いで, 巡回表現, 巡回数, 巡回指標を順に求める。さらに, 巡回指標に $f_k = x^k + y^k + z^k$ を代入し, xyz の項の係数を求めればよい。ベンゼンとシクロプロパンの巡回指標が一致することが知られている。このことから, 図 6 (2) (3) に示すように幾何学的な構造が異なるが, 頂点の番号の付け替えの性質が等しくなる物質が存在することがわかる。正三角柱の巡回指数は正六角形の巡回指数と等しくなり, 幾何学的な構造を区別するためには, 数え上げだけではなく物理化学的な計測が必要となる。

平成 26 年度

千葉大学先進科学プログラム入学者選考課題

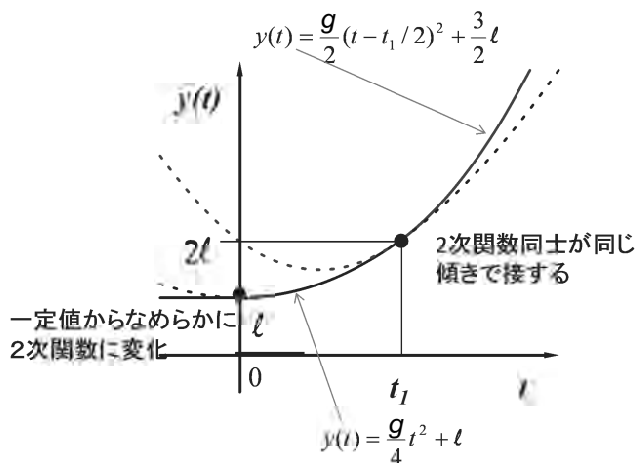
課題 II-A 解答例

II-A 解答例

出題意図： 軽いひもにつながれた2つの小球の落下運動を題材に、慣性質量と加速度、運動の軌道、エネルギー、張力、運動量と力積などの、物理の基本的理解を問う。また、ひもに質量がある場合を考え、エネルギー保存、微分などの数学基礎、力に関する発展的な理解度を問う。

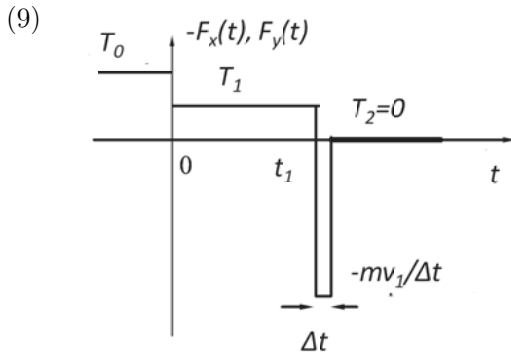
問 1

- (1) 小球 A: $a_A = g - T/m$, 小球 B: $a_B = T/m$ 。
- (2) $a_A = a_B$ なので, $a_A = g/2$ 。運動させる重力は mg , 慣性質量は $2m$ なので。
- (3) $v(t) = \frac{g}{2}t$, $y(t) = \frac{g}{4}t^2 + \ell$ 。
- (4) $E(t) = 2 \times \frac{m}{2}v^2(t) - mgy(t) = \cdots = -mg\ell = E(0)$
- (5) $y(t_1) = \frac{g}{4}t_1^2 + \ell = 2\ell$ より, $t_1 = 2\sqrt{\frac{\ell}{g}}$ 。 $v_1 = \dot{y}(t_1) = \frac{g}{2}t_1 = \sqrt{g\ell}$ 。
- (6) 小球 A: $m\ddot{y}(t) = mg - T$, 小球 B: $m\ddot{y}(t) = mg + T$, ゆえに一緒に落ちてい
る時は, 同じ加速度 g で, $T = 0$ 。この時, $y(t) = \frac{g}{2}(t - t_1)^2 + v_1(t - t_1) + 2\ell$
($= \cdots = \frac{g}{2}(t - \sqrt{\ell/g})^2 + \frac{3}{2}\ell = \frac{g}{2}(t - t_1/2)^2 + \frac{3}{2}\ell$)
- (7)



- (8) $t < 0$: $T_0 = mg$ 。
 $0 < t < t_1$: $T_1 = mg - m\ddot{y}(t) = mg/2$ 。小球 A は加速度 $g/2$ で落下している
ので, 重力 $T_0 = mg$ より小さくなる。

$t_1 < t$: 問(4)より $T_2 = 0$ 。小球 A, B は同じ加速度になるので張力はなくなる。



力×時間＝運動量変化から、小球 B による撃力を求める。

問 2

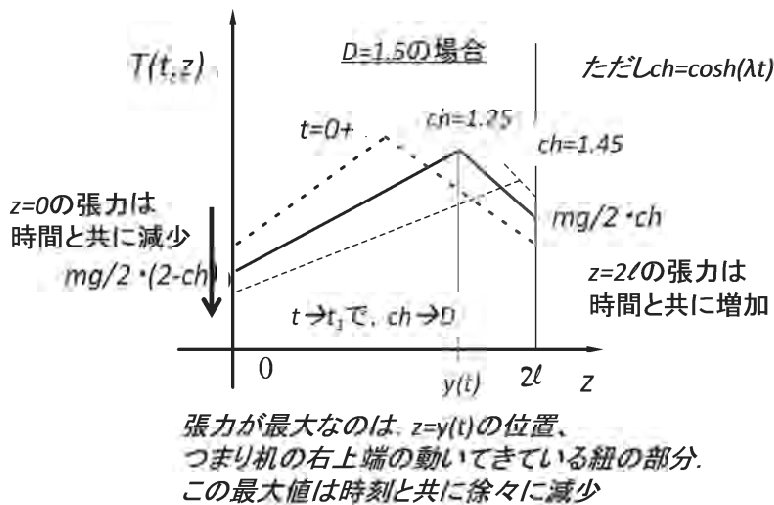
- (1) 質量 $\cdot g \cdot$ 平均高さ下降 $= -(\rho Y)g \cdot \frac{Y}{2}$
- (2) $E(t) = \frac{(2m+2\rho\ell)}{2}V^2 - (\rho Y)g \cdot \frac{Y}{2} - mgY = 0 - \rho\ell g \cdot \frac{\ell}{2} - mg\ell = E(0)$ から,
 $V^2 = \frac{1}{m+\rho\ell}(\frac{\rho g}{2}(Y^2 - \ell^2) + mg(Y - \ell))$ 。
 ちなみにひもの重さがなければ, $\rho = 0$ として, $V'^2 = g(Y - \ell)$ 。
- (3) $V^2/V'^2 = \frac{m+\rho\frac{Y+\ell}{2}}{m+\rho\ell}$ 。ここで, $\frac{Y+\ell}{2} > \ell$ なので, $V > V'$ 。つまり, 質量を無視できない場合の方が速さが大きい。ところで, 同じ Y に到達した時の速さが速ければ, 到達するまでの時間は短い。だから, 質量を無視できない場合の方が速く落下する。
- (4) $(2m + 2\rho\ell)$ は全系の慣性質量。 $\frac{d^2}{dt^2}y(t)$ は加速度, 小球 A, B およびひもで同じため。 mg は小球 A への重力, $\rho y(t)g$ は垂れているひも部分に働く重力。
- (5) $y(t)$, $\ddot{y}(t)$ を代入して, $2(m + \rho\ell)(C_1\lambda^2 e^{\lambda t} + C_2\lambda^2 e^{-\lambda t}) = (m + \rho C_1 e^{\lambda t} + \rho C_2 e^{-\lambda t} + \rho C_3)g$ より, $C_3 = -m/\rho$, $\lambda^2 = \rho g/(2(m + \rho\ell))$ 。
- (6) 初期条件 $y(0) = C_1 + C_2 + C_3 = l$, $\dot{y}(0) = \lambda(C_1 - C_2) = 0$ より, $C_1 = C_2 = (l + m/\rho)/2$ 。
 結局, $y(t) = A \cosh(\lambda t) - m/\rho$, ただし $A \equiv l + m/\rho$, $\cosh(\lambda t) = (e^{\lambda t} + e^{-\lambda t})/2$ 。

(7) $z < y(t)$: $(m + \rho z)\ddot{y} = (m + \rho z)g - T(t, z)$ に $y(t)$ 代入して,
 $T(t, z) = \dots = \frac{(m + \rho z)g}{2}(2 - \cosh(\lambda t))$ 。

$z > y(t)$: $(m + \rho z)\ddot{y} = (m + \rho y)g - T(t, z)$ に $y(t)$ 代入して,
 $T(t, z) = \dots = \frac{(m + \rho(2\ell - z))g}{2} \cosh(\lambda t)$ 。

これから両式は z の一次関数。もちろん $z = y(t)$ で両式は一致する。

小球が右上端に到達する時刻 t_1 は, $y(t_1) = 2\ell$ より $\cosh(\lambda t_1) = D \equiv \frac{m + 2\rho\ell}{m + \rho\ell} < 2$ と求まる。故に, 時刻 t における上記式の $\cosh(\lambda t)$ は $\cosh(\lambda t) < D < 2$ を満たす。



平成 26 年度

千葉大学先進科学プログラム入学者選考課題

課題 II-B 解答例

II-B 解答例

出題意図

直線電流を題材に、重ね合わせの原理を用いてどのような磁場が形成されるかについて理解できているか、を問う。これらの理解のために必要なベクトルの扱いおよびそれに伴う煩雑な計算を適切に行う能力があるのかについても問う。基本的には方針が理解できれば大きく変わった計算を行う必要はないが、方針に従ってしつこく計算を進めることができる能力は、大学に進学した場合、大いに役に立つので、その能力を問いたい。

問 1.

(1)

$$H_1 = \frac{I}{2\pi r}$$

(2)

(1) より,

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} = 2.67 \times 10^{-4} \text{ [T]}$$

となる。

(3), (4)

まず、点 A を通る直線電流を考える。 $|\vec{H}_{2A}(0,0)| = H_{2A}(a) = \frac{I}{2\pi a} \equiv H_2 = 2$ とおく。すると、

$$H_{2A}(a/2) = 2H_2 = 4, \quad H_{2A}(\sqrt{2}a/2) = \sqrt{2}H_2 \simeq 2.8, \quad H_{2A}(3a/4) = \frac{4H_2}{3} \simeq 2.7, \\ H_{2A}(\sqrt{17}a/4) = \frac{4H_2}{\sqrt{17}} \simeq 1.9, \quad H_{2A}(\sqrt{5}a/2) = \frac{2H_2}{\sqrt{5}} \simeq 1.8, \quad H_{2A}(\sqrt{2}a) = \frac{H_2}{\sqrt{2}} \simeq 1.4,$$

$$H_{2A}(3a) = \frac{H_2}{3} \simeq 0.7, \quad H_{2A}(\sqrt{10}a) = \frac{H_2}{\sqrt{10}} \simeq 0.6$$

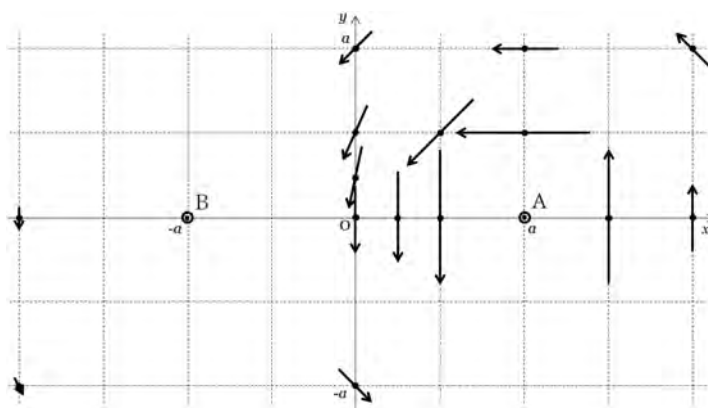
となる。磁場の向きは、電流の向きに右ねじの進む向きをあわせるとき、右ねじのまわる向きに等しいので、原点 A (もしくは B) を中心にして、反時計回りの渦を巻き、原点 A (もしくは B) と磁場を求める点を結んだ直線に垂直である。したがって、図のように矢印を描けばよい。

H_{2B} については、磁場の大きさに関しては、

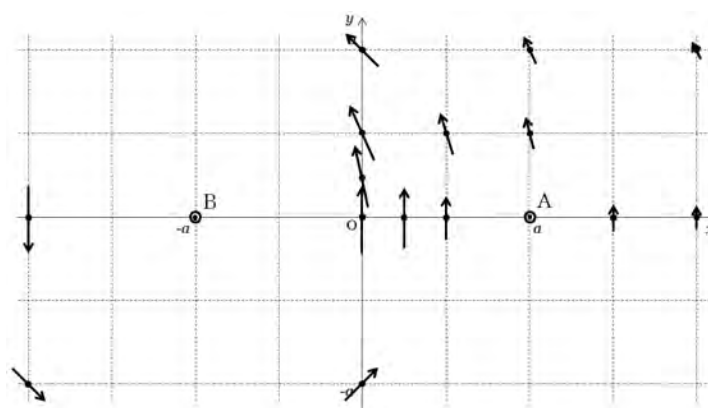
$$H_{2B}(5a/4) = \frac{4H_2}{5} = 1.6, \quad H_{2B}(3a/2) = \frac{2H_2}{3} \simeq 1.3, \quad H_{2B}(\sqrt{10}a/2) = \frac{\sqrt{10}H_2}{5} \simeq 1.3,$$

$$H_{2B}(5a/2) = \frac{2H_2}{5} = 0.8, \quad H_{2B}(\sqrt{17}a/2) = \frac{2H_2}{\sqrt{17}} \simeq 1.0, \quad H_{2B}(\sqrt{5}a) = \frac{H_2}{\sqrt{5}} \simeq 0.9$$

を追加して、矢印を描けばよい。



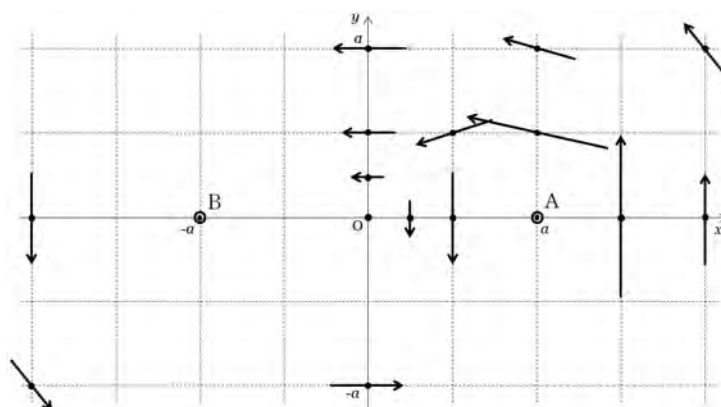
図：問 1(3) 解答例



図：問 1(4) 解答例

(5)

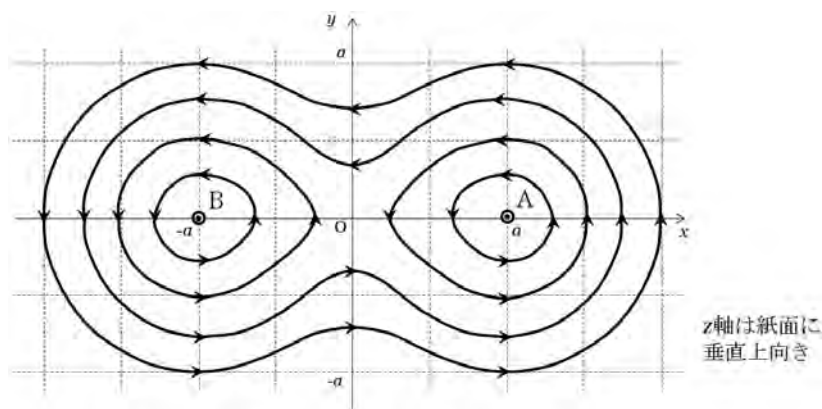
(3), (4) の結果を重ね合わせると、図のようになる。原点 O 付近で磁場の大きさが線形に変化しているように見える。



図：問1(5) 解答例

(6)

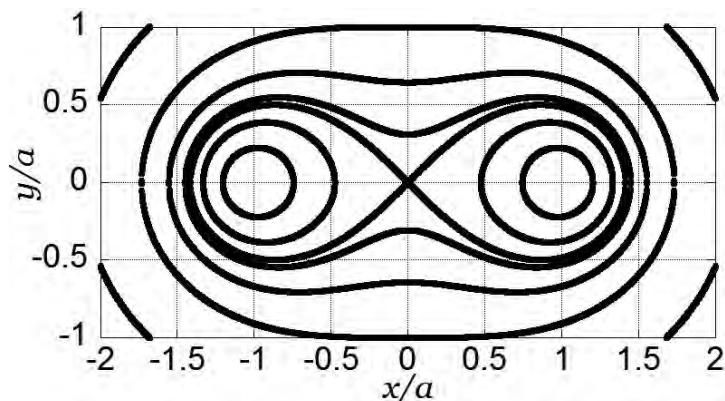
(5) の結果を参考にすると、図のようになる。 x 軸、 y 軸に直交している様子が描けていることが重要。原点 O 付近では、 $y = \pm x$ の直線を漸近線として、磁束線の向きが変わるが、その部分は必ずしも重要視しない（これを示すためには、展開を行わなければならないため）。また、 $x = \pm a$ 付近での磁力線の向きは、実際には (5) のように角度をもっているが、概形が描けていれば正答とする。



図：問1(6) 解答例

さらに正確な図としてはその次の図になるが、これを描くにはベクトルポテンシャル

ルの絶対値が等しい点を集めた曲線を描く必要があり、これは解答者に対しては求めている。



図：問1(6)の解答の正確な図

H26
解答例

問2.

(1)

$$H_A = \frac{I}{2\pi\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}}$$

である。 $\vec{H}_A$ の方向を表す単位ベクトルを $\vec{e}_A(x, y)$ とすると、 $\vec{e}_A(x, y)$ は、ベクトル $(x-a, y-b)$ と直交する単位ベクトルである。したがって、符号を右ねじの法則にあわせると、

$$\vec{e}_A(x, y) = \left(\frac{-(y-b)}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}}, \frac{x-a}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}} \right)$$

であるから、

$$\vec{H}_A(x, y) = H_A \vec{e}_A(x, y) = \left(\frac{-I(y-b)}{2\pi\{(x-a)^2 + (y-b)^2\}}, \frac{I(x-a)}{2\pi\{(x-a)^2 + (y-b)^2\}} \right)$$

である。

(2)

$$\begin{aligned} \vec{H}_A(x, 0) &= \left(\frac{I}{2\pi\sqrt{(x-a)^2 + b^2}} \cdot \frac{b}{\sqrt{(x-a)^2 + b^2}}, \frac{I}{2\pi\sqrt{(x-a)^2 + b^2}} \cdot \frac{(x-a)}{\sqrt{(x-a)^2 + b^2}} \right) \\ &= \left(\frac{Ib}{2\pi\{(x-a)^2 + b^2\}}, \frac{I(x-a)}{2\pi\{(x-a)^2 + b^2\}} \right) \end{aligned}$$

である。同様にして、

$$\begin{aligned} \vec{H}_B(x, 0) &= \left(\frac{Ib}{2\pi\{(x+a)^2 + b^2\}}, \frac{I(x+a)}{2\pi\{(x+a)^2 + b^2\}} \right) \\ \vec{H}_C(x, 0) &= \left(\frac{-Ib}{2\pi\{(x-a)^2 + b^2\}}, \frac{I(x-a)}{2\pi\{(x-a)^2 + b^2\}} \right) \end{aligned}$$

$$\vec{H}_D(x, 0) = \left(\frac{-Ib}{2\pi\{(x+a)^2 + b^2\}}, \frac{I(x+a)}{2\pi\{(x+a)^2 + b^2\}} \right)$$

となるので、すべてを足すと、

$$\begin{aligned} \vec{H}_4(x, 0) &= \vec{H}_A(x, 0) + \vec{H}_B(x, 0) + \vec{H}_C(x, 0) + \vec{H}_D(x, 0) \\ &= \left(0, \frac{I}{\pi} \left\{ \frac{x-a}{(x-a)^2 + b^2} + \frac{x+a}{(x+a)^2 + b^2} \right\} \right) \end{aligned}$$

となる。

(3)

$$(2) \text{ より, } H_{4y}(x) = \frac{I}{\pi} \left\{ \frac{x-a}{(x-a)^2 + b^2} + \frac{x+a}{(x+a)^2 + b^2} \right\}$$

である。したがって、

$$H_{4y}(-x) = \frac{I}{\pi} \left\{ -\frac{x+a}{(x+a)^2 + b^2} - \frac{x-a}{(x-a)^2 + b^2} \right\} = -H_{4y}(x)$$

であるので、 $H_{4y}(x)$ は奇関数である。

(4)

$H_{4y}(x)$ は奇関数なので、近似式も偶数次の項は存在しない。つまり、1次と3次の項のみを考えればよい。したがって、

$$\begin{aligned} H_{4y}(x) &= \frac{I}{\pi} \left(\frac{x-a}{a^2 + b^2 - 2ax + x^2} + \frac{x+a}{a^2 + b^2 + 2ax + x^2} \right) \\ &= \frac{I}{\pi(a^2 + b^2)} \left[(x-a) \left\{ 1 - \frac{2a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cdot \frac{x}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \left(\frac{x}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 \right\}^{-1} \right. \\ &\quad \left. + (x+a) \left\{ 1 + \frac{2a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cdot \frac{x}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \left(\frac{x}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 \right\}^{-1} \right] \\ &\simeq \frac{I}{\pi(a^2 + b^2)} \left[(x-a) \left\{ 1 + \frac{2a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cdot \frac{x}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \left(\frac{4a^2}{a^2 + b^2} - 1 \right) \cdot \frac{x^2}{a^2 + b^2} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 2a \left(\frac{4a^2}{a^2 + b^2} - 2 \right) \cdot \frac{x^3}{(a^2 + b^2)^2} \right\} \right. \\ &\quad \left. + (x+a) \left\{ 1 - \frac{2a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cdot \frac{x}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \left(\frac{4a^2}{a^2 + b^2} - 1 \right) \cdot \frac{x^2}{a^2 + b^2} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 2a \left(\frac{4a^2}{a^2 + b^2} - 2 \right) \cdot \frac{x^3}{(a^2 + b^2)^2} \right\} \right] \\ &= \frac{I}{\pi(a^2 + b^2)} \left(2x - \frac{4a^2x}{a^2 + b^2} \right) + \frac{I}{\pi(a^2 + b^2)} \left\{ \frac{2(3a^2 - b^2)x^3}{(a^2 + b^2)^2} - \frac{8a^2(a^2 - b^2)x^3}{(a^2 + b^2)^3} \right\} \\ &= -\frac{2I(a^2 - b^2)x}{\pi(a^2 + b^2)^2} - \frac{2I\{a^2 - (3 + 2\sqrt{2})b^2\}\{a^2 - (3 - 2\sqrt{2})b^2\}x^3}{\pi(a^2 + b^2)^4} \end{aligned}$$

である。

(5)

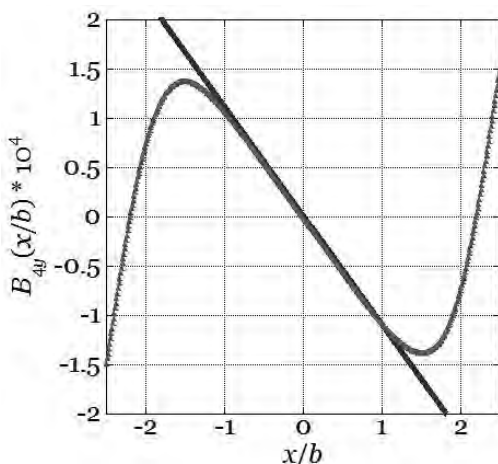
(4) より、 x の3次の項が存在しなければ、一定の勾配をもつ磁場が得ることができる。したがって、 $a \geq b$ なので、

$$\frac{a}{b} = \sqrt{3 + 2\sqrt{2}} = \sqrt{(\sqrt{2} + 1)^2} = \sqrt{2} + 1$$

である。

(6)

(2) の近似を用いない式から計算すると、



図：平行4本線の磁場（曲線）とその近似（直線）による磁場

$$B_{4y}(b) = \mu_0 H_{4y}(b) = \frac{\mu_0 I}{\pi} \left\{ \frac{-\sqrt{2}b}{2b^2 + b^2} + \frac{(\sqrt{2} + 2)b}{(\sqrt{2} + 2)^2 b^2 + b^2} \right\} = -\frac{(20\sqrt{2} - 18)\mu_0 I}{51\pi b}$$

$$= -1.08 \times 10^{-4} \text{ [T]}$$

となる。また、(4) の近似式から計算すると、

$$B_{4y}(b) = \mu_0 H_{4y}(b) = -\frac{2\mu_0 I((3 + 2\sqrt{2})b^2 - b^2)b}{\pi((3 + 2\sqrt{2})b^2 + b^2)^2} = -\frac{(\sqrt{2} - 1)\mu_0 I}{2\pi b} = -1.10 \times 10^{-4} \text{ [T]}$$

である。 b は $\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4 + 2\sqrt{2}}b$ に対して十分小さいとは言えないが、有効数字3桁の範囲では、この程度の距離まで約2%の誤差で近似が成り立っていることがわかる。

問3.

最も簡単な例。

問2.において、点Bと点Cについて電流の向きを逆にする（ a と b の関係はあとから決めるものとする）。このとき、4本の直線導線を流れる電流によって、 xy 平

面の x 軸上に作られる磁場 $\vec{H}_4(x, 0)$ は,

$$\vec{H}_A(x, 0) = \left(\frac{Ib}{2\pi\{(x-a)^2 + b^2\}}, \frac{I(x-a)}{2\pi\{(x-a)^2 + b^2\}} \right)$$

$$\vec{H}_B(x, 0) = \left(\frac{-Ib}{2\pi\{(x+a)^2 + b^2\}}, \frac{-I(x+a)}{2\pi\{(x+a)^2 + b^2\}} \right)$$

$$\vec{H}_C(x, 0) = \left(\frac{Ib}{2\pi\{(x-a)^2 + b^2\}}, \frac{-I(x-a)}{2\pi\{(x-a)^2 + b^2\}} \right)$$

$$\vec{H}_D(x, 0) = \left(\frac{-Ib}{2\pi\{(x+a)^2 + b^2\}}, \frac{I(x+a)}{2\pi\{(x+a)^2 + b^2\}} \right)$$

となるので, すべてを足すと,

$$\begin{aligned} \vec{H}_4(x, 0) &= \vec{H}_A(x, 0) + \vec{H}_B(x, 0) + \vec{H}_C(x, 0) + \vec{H}_D(x, 0) \\ &= \left(\frac{Ib}{\pi} \left\{ \frac{1}{(x-a)^2 + b^2} - \frac{1}{(x+a)^2 + b^2} \right\}, 0 \right) \end{aligned}$$

となる。そこで, $\vec{H}_4$ の x 成分 H_{4x} を $|x| \ll \sqrt{a^2 + b^2}$ の領域で近似すると,

$$\begin{aligned} H_{4x}(x) &= \frac{Ib}{\pi} \left(\frac{1}{a^2 + b^2 - 2ax + x^2} - \frac{1}{a^2 + b^2 + 2ax + x^2} \right) \\ &= \frac{Ib}{\pi(a^2 + b^2)} \left\{ \left(1 - \frac{2a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \frac{x}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \left(\frac{x}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 \right)^{-1} \right. \\ &\quad \left. - \left(1 + \frac{2a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \frac{x}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \left(\frac{x}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 \right)^{-1} \right\} \\ &\simeq \frac{Ib}{\pi(a^2 + b^2)} \left\{ \left(1 + \frac{2a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \frac{x}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \left(\frac{4a^2}{a^2 + b^2} - 1 \right) \left(\frac{x}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 2a \left(\frac{4a^2}{a^2 + b^2} - 2 \right) \frac{x^3}{(a^2 + b^2)^2} \right) \right. \\ &\quad \left. - \left(1 - \frac{2a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \frac{x}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \left(\frac{4a^2}{a^2 + b^2} - 1 \right) \left(\frac{x}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 2a \left(\frac{4a^2}{a^2 + b^2} - 2 \right) \frac{x^3}{(a^2 + b^2)^2} \right) \right\} \\ &= \frac{4Iabx}{\pi(a^2 + b^2)^2} + \frac{8Iab(a^2 - b^2)x^3}{\pi(a^2 + b^2)^4} \end{aligned}$$

となる。つまり, $b = a$ と選べば, 3次の項が消えるので, 一定の勾配が得られることがわかる。これ以外の配置でも, 同様のことが示すことができれば正答とするが, 結局のところこの平行4本線の亜流にしかならないと思われる。

ちなみに, 電流の向きを変える点を, 点Cと点Dとして, a と b の関係を定めると x の2次の項が消えて, 均一な磁場を得ることができる。これはヘルムホルツコイルをある断面で切ったものと等価であると見なすことができる。

平成 26 年度

千葉大学先進科学プログラム入学者選考課題

課題 II-C 解答例

II-C 解答例

問 1

(a) $\sum_{k=0}^4 \begin{bmatrix} 4 \\ k \end{bmatrix} = 2^4$ より $2^4 = 16$ である.

(b) 6 種類

配置は以下の通りである. ただし, $\circ$ は白, $\diamond$ は黒である.

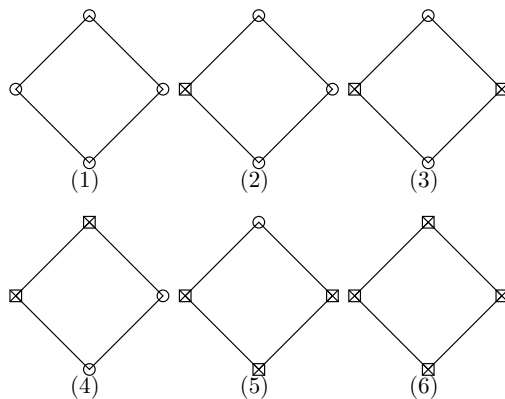


図 1:

(c) 2 種類

配置は以下のとおりである. ただし, $\circ$ は黄, $\diamond$ は黒, $\triangle$ は白である.

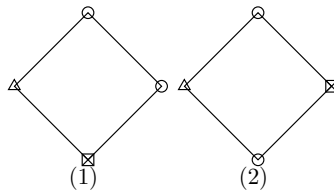


図 2:

(d) 数珠は裏返しても同じ配置なので, 客の数と玉の数が同じであれば, 円卓に着席する配置の総数は, 数珠の玉の配置の総数の 2 倍になる.

問 2

(a) 二項定理と二項係数の性質

$(x+z)^n$ を展開したときの $x^p z^{n-p}$ の係数は黒を p 個 黄を $(n-p)$ 個一列に並べる場合の総数である.

を利用する. ここでさらに, p 個の黒玉の内 l 個を白に変えると $x^l y^{p-l} z^{n-p}$ の係数が黒 l 個, 白 $k-l$ 個, 黄 $n-k$ 個に塗り分ける場合の数になる. ここで, $i=l$ $j=p-l$ $k=n-p$ と置き換えると黒を i 個, 白を j 個, 黄を k 個並べる配列の総数となる.

(b) (a) に基づき計算すると,

$$\frac{n!}{i!j!k!}$$

を得る.

H26

解答例

問 3

以下の 3 種類である.

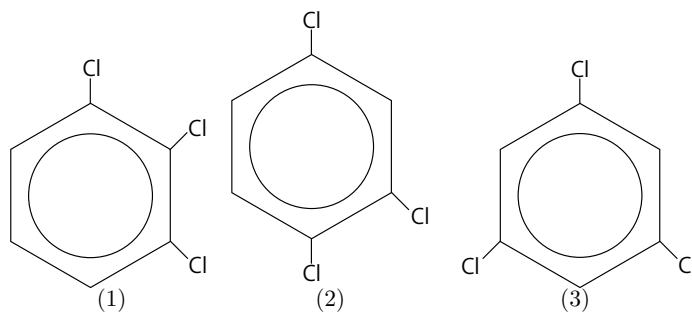


図 3: トリクロロベンゼンの 3 つの構造

問 4,5 回転と鏡像による正六角形の頂点の番号の付け替えは図 4 に示す 12 種類である. 個の図より, 図 5 に示す変換, 巡回表現, 巡回数を得る. 一般に, 回転と鏡像による正 n 角形の頂点番号の付け替えは $2n$ 種類存在する.

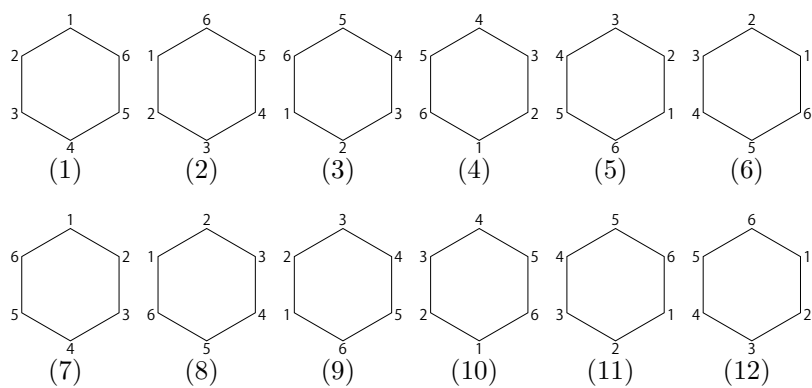


図 4: 正六角形の回転と鏡像

問 4	問 5	巡回数
$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$	$(1)(2)(3)(4)(5)(6)$	f_1^6
$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 \end{bmatrix}$	$(1, 2, 3, 4, 5, 6)$	f_6
$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$	$(1, 6, 5, 4, 3, 2)$	f_6
$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 1 & 2 \end{bmatrix}$	$(1, 3, 5)(2, 4, 6)$	f_3^2
$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$	$(1, 5, 3)(2, 6, 4)$	f_3^2
$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$	$(1, 4)(2, 5)(3, 6)$	f_2^3
$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}$	$(1)(2, 6)(3, 5)(4)$	$f_1^2 f_2^2$
$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 1 & 6 & 5 & 4 \end{bmatrix}$	$(2)(1, 3)(4, 6)(5)$	$f_1^2 f_2^2$
$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 6 \end{bmatrix}$	$(3)(2, 4)(1, 5)(6)$	$f_1^2 f_2^2$
$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 6 & 5 \end{bmatrix}$	$(1, 4)(2, 3)(5, 6)$	f_2^3
$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$	$(2, 5)(3, 4)(1, 6)$	f_2^3
$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 6 & 5 & 4 & 3 \end{bmatrix}$	$(3, 6)(4, 5)(1, 2)$	f_2^3

H26
解答例

図 5: 問 4, 問 5 の解

問 6

- (a) k 個の要素からなる l 個の集合の要素の総数が 6 であるから, $k \times l = 6$
- (b) k 個の要素からなる l 個の集合の要素と m 個の要素からなる n 個の集合の要素の総数が 6 であるから $k \times l + m \times n = 6$

問 7

問題の図 5 より, 正方形の頂点番号付替えに関する巡回数は $f_1^4, f_1^2 f_2, f_2^2, f_4$ である. さらに, f_1^4 が 1 種類, $f_1^2 f_2$ が 2 種類, f_2^2 が 3 種類, f_4 が 2 種類, 合計 8 種類ある. したがって, 巡回指標は

$$\sigma_4 = \frac{1}{8}(f_1^4 + 2f_1^2 f_2 + 3f_2^2 + 2f_4)$$

である.

問 8

問 4,5 の結果より, 変換は 12 種類あるので,

$$\sigma_6 = \frac{1}{12}(f_1^6 + 2f_6 + 2f_3^2 + 3f_1^2 f_2^2 + 4f_2^3)$$

である.

問 9

- (a) σ_4 の f_k に $x^k + y^k$ を代入すると,

$$\begin{aligned}\sigma_4(x, y) &= \frac{1}{8}\{(x+y)^4 + 2(x+y)^2(x^2+y^2) + 3(x^2+y^2)^2 + 2(x^4+y^4)\} \\ &= x^4 + x^3y + 2x^2y^2 + xy^3 + y^4 + R(x, y)\end{aligned}$$

となる. ここで, $R(x, y)$ は $x^4, x^3y, 2x^2y^2, xy^3, y^4$ を含まない $x^i y^j$ ($i+j=4$) の整式である. 従って, $B_1 = 1, B_2 = 1, B_3 = 2, B_4 = 1, B_5 = 1$ である.

- (b) $i+j=4$ を満たす自然数 i, j に関して $x^i y^j$ の係数は白玉と黒玉を合計 4 個使った数珠の玉の配置の総数である. したがって, $B_1 + B_2 + B_3 + B_4 + B_5$ が問 1(b) の解となる.

(c) σ_4 の f_k に $x^k + y^k + z^k$ を代入すると,

$$\begin{aligned}\sigma_4(x, y, z) &= \frac{1}{4} \{ (x+y+z)^4 + 2(x+y+z)^2(x^2+y^2+z^2) \\ &\quad + 3(x^2+y^2+z^2)^2 + 2(x^4+y^4+z^4) \} \\ &= 2x^2yz + 2xy^2z + 2xyz^2 + Q(x, y, z)\end{aligned}$$

となる. ここで, $Q(x, y, z)$ は x^2yz , xy^2z , xyz^2 を含まない $x^i y^j z^k (i+j+k=4)$ の整式である.

(d) x^2yz の係数は x 色 2 個, y 色 1 個, z 色 1 個合計 4 個の玉からなる数珠の玉の配置の総数である. xy^2z , xyz^2 の係数の性質も同様である.

問 10

(a) 6 種類

解 1 問題の図 2, 問 3 の解をもとに作図し, 数え上げることができる.

X が 2 個置換したベンゼン環は 図に示す 3 種類である. Y をさらに 1 個置換すると図 7 の 6 種類が導かれる.

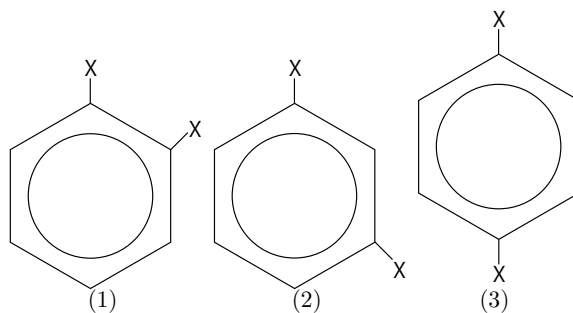


図 6: $C_6H_4X_2$ の配置

解 2 問 8 の結果より, 問 9 を参考として x^2yz^3 の係数を求める.

(b) 6 個の玉からなる数珠の玉のうち 3 個を透明, X 玉と Y 玉の合計を 3 個と考えれば, 数珠の玉の配置は $C_6H_3X_2Y$ の配置と 1 対 1 に対応する.

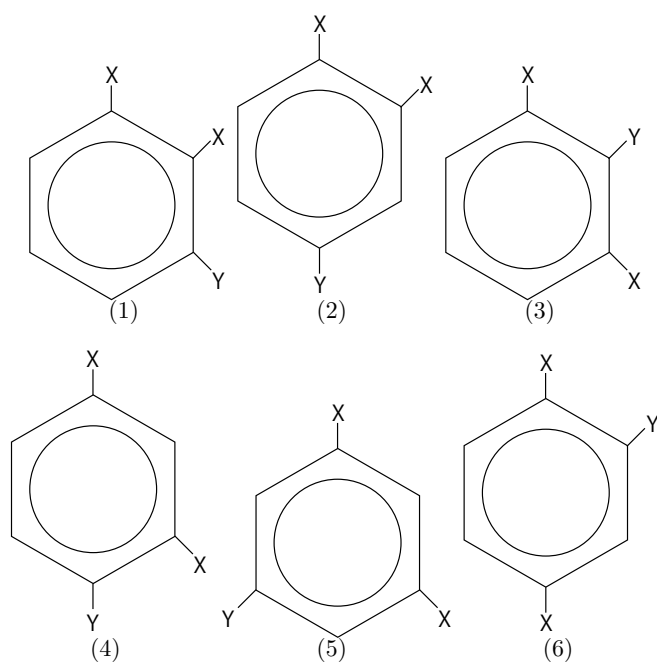


図 7: 図の配置に Y を 1 個置換して得られる $C_6H_3X_2Y$ の配置

参考:シクロプロパンの置換, 巡回表現, 巡回数

3つのラベル (a, b, c) を並べ替える操作は, 並べ替えない操作 (恒等変換) も含めて

$abc \quad bca \quad cab$

$acb \quad cba \quad bac$

の6種類である. 正三角形の3つの頂点に反時計回りに順に記号 a, b, c を割り振る. 頂点に記号の付いた正三角形を回転と鏡像変換とによって変換しときに現れる正三角形は図8に示す6種類である.

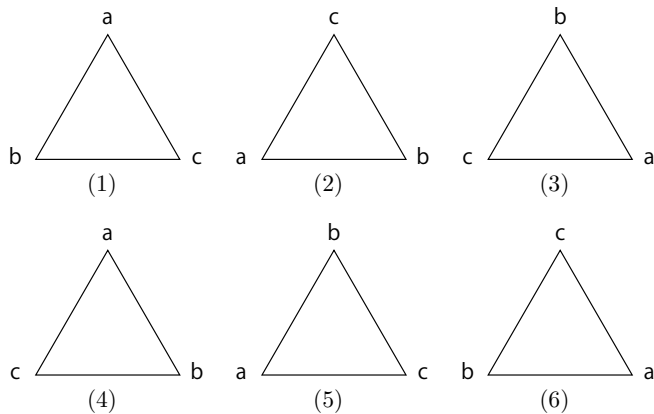


図 8: 正三角形の頂点のラベル付け

次に, 対応

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a & b & c & d & e & f \end{bmatrix}$$

で並替えた結果に, さらに対応

$$\begin{bmatrix} a & b & c & d & e & f \\ u & v & w & x & y & z \end{bmatrix}$$

を適用した合成変換が

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ u & v & w & x & y & z \end{bmatrix}$$

となることを利用すると, 対応

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

を得る. この対応は, 正 3 角柱の上面と下面とを鏡像によってを入れ替える変換である. この変換と, 正 3 角形の頂点のラベルの付け替えを合成すると, 正 3 角柱の頂点のラベルの付け替えについて, 以下の図 9 の表を得る.

H26

解答例

変換	巡回表現	巡回数
$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$	$(1)(2)(3)(4)(5)(6)$	f_1^6
$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 1 & 6 & 4 & 5 \end{bmatrix}$	$(1, 2, 3)(4, 5, 6)$	f_3^2
$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 6 & 4 \end{bmatrix}$	$(1, 2, 3)(4, 5, 6)$	f_3^2
$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 2 & 4 & 6 & 5 \end{bmatrix}$	$(1)(2, 3)(4)(5, 6)$	$f_1^2 f_2^2$
$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & 4 & 6 \end{bmatrix}$	$(3)(1, 2)(6)(4, 5)$	$f_1^2 f_2^2$
$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 1 & 6 & 5 & 4 \end{bmatrix}$	$(2)(1, 3)(5)(4, 6)$	$f_1^2 f_2^2$
$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$	$(1, 4)(2, 5)(3, 6)$	f_2^3
$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 4 & 5 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$	$(1, 2, 3, 4, 5, 6)$	f_6
$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 4 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$	$(5, 6, 4, 2, 3, 1)$	f_6
$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 6 & 5 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$	$(1, 4)(2, 6)(5, 3)$	f_2^3
$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 4 & 6 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$	$(1, 5)(2, 4)(6, 3)$	f_2^3
$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$	$(1, 6)(2, 5)(3, 4)$	f_2^3

図 9: 正3角柱の頂点ラベル付替え表

図9に基づいて正3角柱の巡回指数を求めると

$$\sigma_{3-3} = \frac{1}{12}(f_1^6 + 2f_6 + 2f_3 + 3f_1^2 f_2^2 + 4f_2^3)$$

である. 巡回指標が等しいことから, 正六角形の2つの頂点と正3角柱の2つの頂点を別々の色で塗り分ける場合の数は等しいことがわかる.

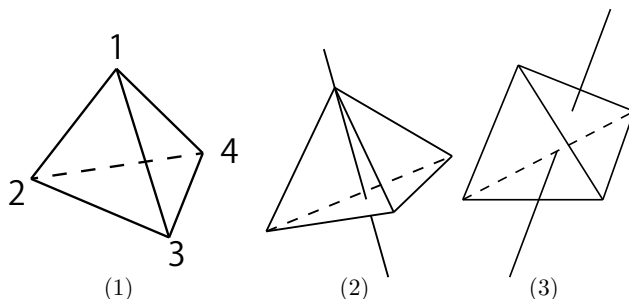


図 10: 正4面体の回転軸

頂点の数が4つである3次元図形として正4面体を考える. 正四面体に回転を施して元の正四面体に重ね合わせる回転の軸を考える. 図10(2)(3)に示すように, 1つの頂点と正四面体の中心を通る直線の周りに, 時計回りと反時計回りに120度回転する変換が散在する. この回転の軸は4本ある. したがって, 合計8種類の頂点のラベルの付け替え変換が存在する. また, ねじれの位置に存在する2つの辺の中点を通る軸の周りに180度回転する変換が存在する. この回転の軸は3本存在し, 対応する頂点番号付け替え変換は3種類存在する. さらに, 何も行わない恒等変換を加えると, 正四面体の頂点のラベルを付け替える回転変換は合計12種類存在することがわかる. 以上の12種類の変換の巡回表現は以下のようになる.

$$\begin{aligned} & (1)(2)(3)(4) \quad (1)(234) \quad (1)(243) \quad (12)(34) \\ & \quad (2)(134) \quad (2)(143) \quad (13)(24) \\ & \quad (3)(124) \quad (3)(142) \quad (14)(23) \\ & \quad (4)(123) \quad (4)(132) \end{aligned}$$

ここで, 巡回表現の定義を考えれば, 正4面体の巡回指標は

$$\sigma_T = \frac{1}{12}(f_1^4 + 8f_1 f_3 + 3f_2^2)$$

となる. 以上より, 頂点の数が同じでもその幾何構造が異なるので, σ_4 と σ_T とが異なる形式になることがわかる.

平成 25 年度

千葉大学先進科学プログラム入学者選考課題

課題論述

課題[II-A], [II-B], [II-C]

(10:00－15:30)

H25
—
課題

注意事項

課題 II には、[II-A]、[II-B]、[II-C]の 3 題があります。

志望するコースによって、次に示す問題を解答してください。

- ・物理学コース：
[II-A]、[II-B]の 2 題を解答してください。
- ・フロンティアテクノロジーコース：
[II-A]、[II-B]、[II-C]の中から 2 題を選択して解答してください。

II-A

質量 m の小球を長さ ℓ の糸でつり下げ振動させる単振り子は、振幅が小さければ、周期

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}} \quad (i)$$

で単振動する。 g は重力加速度の大きさである。しかしこの単振り子は、振幅が大きくなると、周期がこの値からずれてくることが知られている。では、振幅の大きさによらず周期が一定の振り子、すなわち大きく振れても小さく振れても周期が変わらない振り子を作ることは可能だろうか。空気抵抗やまさつは無視できるとして、次の各問いに答えなさい。

(数学公式) 必要なら以下の公式を用いてよい。

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\theta} \cos \theta &= -\sin \theta, & \frac{d}{d\theta} \sin \theta &= \cos \theta \\ \frac{d}{dt} \cos \theta &= -\sin \theta \frac{d\theta}{dt}, & \frac{d}{dt} \sin \theta &= \cos \theta \frac{d\theta}{dt} \end{aligned}$$

$|\theta|$ が十分小さいとき、次の近似式が成り立つ。

$$\sin \theta \doteq \theta - \frac{1}{3!}\theta^3, \quad \cos \theta \doteq 1 - \frac{1}{2!}\theta^2 + \frac{1}{4!}\theta^4$$

問 1 まず、フックの法則に従う理想的なばねを考えよう。図 1 のように、ばね定数 k 、自然長 ℓ_0 の軽いばねをなめらかな水平面上に置き、その一端を壁につなぎ、他端を質量 m の小球につなぐ。小球を水平面上で引っ張り、ばねを自然長から A だけ伸ばして静かに手を離すときの小球の運動を考える。

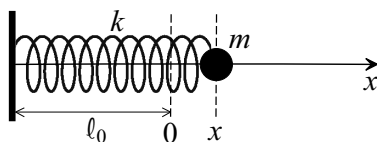


図 1: 水平面上方から見たばねの振動

- (1) ばねが自然長のときの小球の位置を原点として、小球の位置を x 、速度を $v = \frac{dx}{dt}$ 、加速度を $a = \frac{d^2x}{dt^2}$ とするとき、小球の運動方程式を書きなさい。
- (2) x, v, a を時刻 t の関数として表しなさい。手を離す瞬間を $t = 0$ とする。
- (3) ばねと小球についての力学的エネルギー保存を表す式を求めなさい。
- (4) 小球の振動の周期 T を求め、それが振幅 A に依存しないことを示しなさい。

このように、運動方程式が上問 (1) の結果の式のように書ける場合、あるいはエネルギー保存の式が上問 (3) の結果の式のように書ける場合、振動の周期は振幅に依存しないことが分かる。

問 2 現実のばねは、伸びが大きくなるとフックの法則には従わなくなる。ばねの伸び x の 3 乗に比例する小さな補正項が加わり、弾性力が

$$f = -kx - px^3 \quad (p: \text{正または負の定数}) \quad (\text{ii})$$

と表されるばねを考えよう。このばねを用いて図 1 と同様のばね振り子を作り、前問 1 と同じ振幅 A で振動させる。ただし、補正項は十分小さく、ばねの振動が不安定化することはない。

(1) フックの法則に従うばねが x だけ伸びたとき、ばねの位置エネルギー（弾性エネルギー）は

$$U = \frac{1}{2}kx^2 \quad (\text{iii})$$

と与えられる。式 (ii) のばねの位置エネルギー U を x の関数として求めなさい。

(2) ばねの位置エネルギー U を、横軸を x として図に描きなさい。補正項がない場合、 $p > 0$ の補正項がある場合、 $p < 0$ の補正項がある場合について、その差が分かるように描くこと。

(3) 補正項が加わると、ばねの振動の周期は増えるか減るか、理由を付して答えなさい。ただし振幅は、問 1 と同じ A とする。また、このばね振り子の周期は振幅の大きさに依存するが、その理由を簡単に説明しなさい。

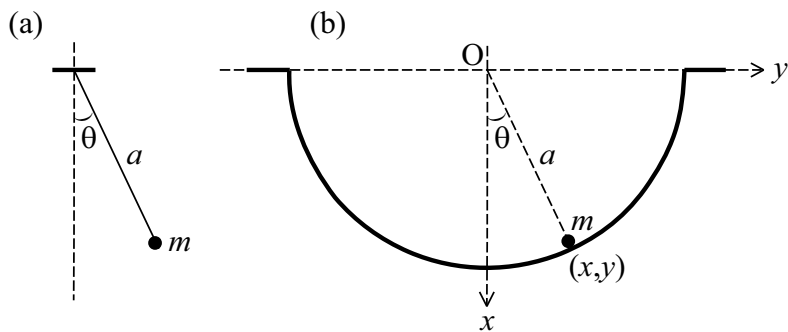


図 2: (a) 単振り子と (b) 半円に束縛された小球

問 3 図 2(a) のような、小球の質量 m 、糸の長さ a の単振り子は、図 2(b) のような、鉛直面内のなめらかな半円（半径 a ）に質量 m の小球が束縛され、振動している系と等価である。媒介変数 θ ($-\pi/2 < \theta < \pi/2$) を導入すると、小球の位置は $(x, y) = (a \cos \theta, a \sin \theta)$ と表される。

- (1) 小球の速度 (v_x, v_y) を, θ とその時間微分 $\frac{d\theta}{dt}$ を用いて表しなさい。
- (2) 小球の運動エネルギー K を求め, それを $\frac{d\theta}{dt}$ を用いて表しなさい。
- (3) 小球の位置エネルギー U を求め, それを θ を用いて表しなさい。半円の最下点を位置エネルギーの原点とする。
- (4) 振り子が最大に振れたときの角度 θ を θ_m として, 力学的エネルギーの保存を表す式を求めなさい。
- (5) 振幅が十分小さいとき, 力学的エネルギー保存の法則の近似式を導き, 振動の周期 T を求めなさい。
- (6) 振幅が大きくなると振動の周期は長くなるか短くなるか答えなさい。またそう考える理由を, 問2を参考にして, θ の関数として U の図を描き説明しなさい。

問4 図3のように, θ ($-\pi/2 < \theta < \pi/2$) を媒介変数として式

$$\begin{aligned} x &= a(2\theta + \sin 2\theta) \\ y &= a(1 - \cos 2\theta) \end{aligned} \quad (\text{iv})$$

で定義されるサイクロイド曲線に, 質量 m の小球が束縛され, 振動している。 θ は, 点 $P(x, y)$ におけるサイクロイド曲線の接線が x 軸となす角であり, a は正の定数である。

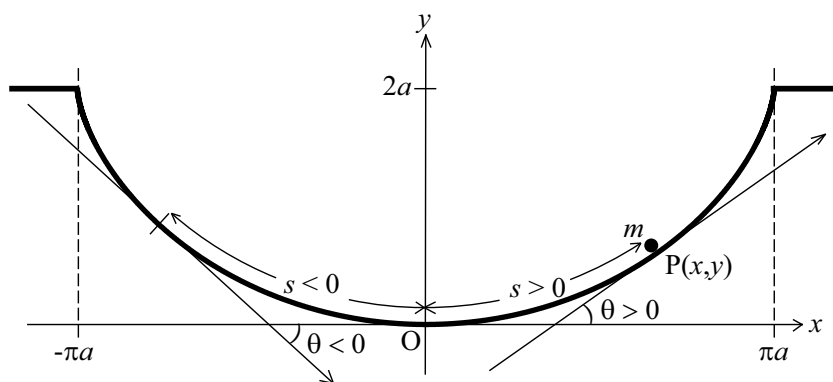


図3: サイクロイド曲線に束縛された小球

- (1) 小球の速度 (v_x, v_y) を, θ とその時間微分 $\frac{d\theta}{dt}$ を用いて表しなさい。
- (2) 小球の運動エネルギー K を求め, それを θ と $\frac{d\theta}{dt}$ を用いて表しなさい。
- (3) 小球の位置エネルギー U を求め, それを θ を用いて表しなさい。座標軸の原点を位置エネルギーの原点とする。

(4) 原点 O からサイクロイド曲線に沿って測った小球の位置 s は

$$s = 4a \sin \theta \quad (\text{v})$$

と表されることを示しなさい。ただし、媒介変数 θ で表示された曲線の $\theta = \theta_1$ から $\theta = \theta_2$ までの長さ s は

$$s = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2} d\theta \quad (\text{vi})$$

で与えられる。

- (5) 力学的エネルギーの保存を表す式を求め、それを s およびその時間微分 $\frac{ds}{dt}$ を用いて表しなさい。小球の原点からの最大移動距離を s_m とする。
- (6) 振動の周期 T を求め、それが振幅（すなわち s_m ）に依存しないことを示しなさい。

この問題では、曲線に小球を束縛することで周期が振幅に依存しない振り子を実現したが、工夫することにより、小球を糸でつるして振動させるという形でも、これを実現できることが知られている（ホイヘンス振り子）。

II-B

電気と磁気について以下の問いに答えなさい。重力の影響は考えなくて良い。解答では、静電気力に関するクーロンの法則の比例定数を k_e 、磁気力に関するクーロンの法則の比例定数を k_m 、透磁率を μ としなさい。電位の基準点は無限遠にとるものとする。また、必要ならば以下の近似式を用いなさい。

$$|x| \ll 1 \text{ のとき} \quad (1+x)^p \doteq 1+px + \frac{p(p-1)}{2}x^2 \quad (p \text{ は有理数})$$

問 1 導体のそばに置かれた電荷について考える。図 1 のように、接地された十分広い導体板から距離 a だけ離れた点に電荷 $+q$ ($q > 0$) の点電荷を置く。導体板の表面を xy 面にとり (y 軸の正の方向は紙面の表から裏へ向かう方向である)、点電荷の位置の座標を $(0, 0, a)$ とする。このとき導体板の表面には静電誘導によって電荷が現れる。

(1) 導体板に出入りする電気力線は導体板の表面に垂直になる。この理由を説明しなさい。

図 1 の $z > 0$ の領域の電場は、点電荷 $+q$ が作る電場と導体板表面に誘導された電荷が作る電場を重ね合わせたものであるが、その様子は、図 2 のように導体板を取り除いて点 $(0, 0, -a)$ にある大きさの点電荷 X を置くことで完全に再現できる。

(2) 点電荷 X の電荷を答えなさい。

(3) xz 面の $z > 0$ の領域の電気力線の様子を図示しなさい。

(4) 図 1 の点電荷 $+q$ は、導体板表面に誘導された電荷が作る電場から力を受ける。この力の大きさと向きを答えなさい。

電場中に置かれた電荷は静電気力による位置エネルギーをもつが、このエネルギーは電場が空間に蓄えているエネルギー（静電エネルギー）であるとも考えることもできる。点電荷や導体が n 個空間に置かれているとき、 k 番目の点電荷または導体の電荷を q_k 、それが置かれている位置の電

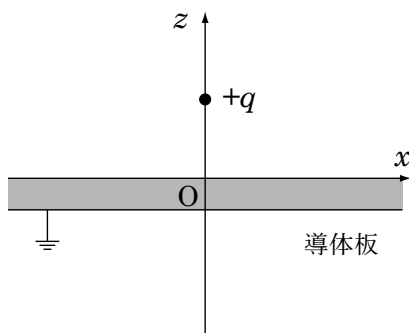


図1

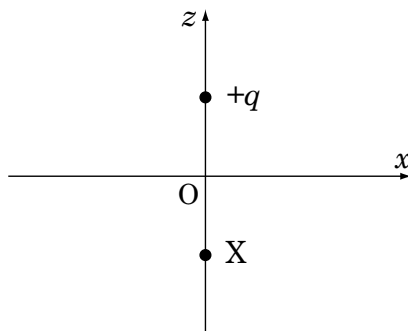


図2

位を V_k とすると、静電エネルギー U は

$$U = \frac{1}{2} (q_1 V_1 + q_2 V_2 + \cdots + q_n V_n)$$

と表される。

- (5) 図1の導体板表面に誘導された電荷が作る電場について、点電荷 $+q$ の位置の電位を答えなさい。また、このとき電場が蓄えている静電エネルギーを答えなさい。

次に、図3のように、電荷 $+q$ と $-q$ の2つの点電荷を長さ d の絶縁体棒の両端に固定し、棒の中心を点 $(0, 0, a)$ に固定する。ただし、 $d \ll a$ である。2つの点電荷は常に xz 面上にあり、棒は xz 面内で回転できる。棒と z 軸のなす角を θ とする。このとき $z > 0$ の領域の電場の様子は、図2と同様に導体板を取り除いて $z < 0$ の領域に点電荷を置くことで完全に再現できる。

- (6) どのように点電荷を置けばよいか答えなさい。
- (7) 導体板表面に誘導された電荷が作る電場について、2つの点電荷の位置の電位を角度 θ の関数としてそれぞれ求めなさい。また、このとき電場が蓄えている静電エネルギーを答えなさい。ただし、2つの点電荷の間に働く電気力による静電エネルギーはつねに一定なので、除いて良い。
- (8) 棒がどの向きに向いているときに(7)の静電エネルギーが最小になるか答えなさい。ここでは、 $d \ll a$ であることを用い、微少量 $\frac{d}{a}$ の2次まで考慮して近似計算しなさい。
- (9) 距離 a を変えたときに(7)の静電エネルギーがどのように変わるかを考え、棒の固定をはずして自由に動けるようにしたときに、棒(と2つの電荷)が導体板に引き寄せられるかそれとも反発されるか、答えなさい。

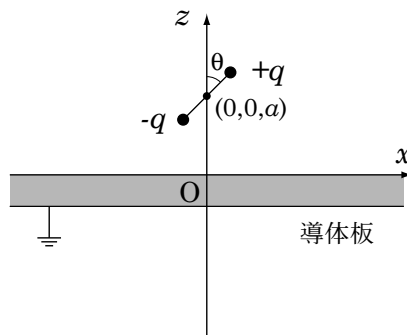


図3

問2 超伝導体のそばに置かれた電流や磁極について考える。磁場中に超伝導体を置くと、超伝導体内部の磁場を打ち消すように超伝導体の表面に電流が流れ、その結果、超伝導体の内部には磁場はなく、磁力線は超伝導体の表面に平行になる。超伝導体のこの性質はマイスナー効果とよばれる。

まず、図4のように、十分広い超伝導体板から距離 a だけ離して直線電流 I を y 軸の正の方向に流す。ここでは、超伝導体板の表面を xy 面にとり (y 軸の正の方向は紙面の表から裏へ向かう方向である)、電流は点 $(0, 0, a)$ を通っているものとする。このとき、 $z > 0$ の領域の磁場は、直線電流 I が作る磁場と超伝導体表面を流れる電流が作る磁場を重ねあわせたものであるが、その様子は、超伝導体板を取り除いて $z < 0$ の領域に別の直線電流を流すことで完全に再現できる。

- (1) 直線電流をどのように流せばよいか答えなさい。
- (2) x 軸上の点 $(x, 0, 0)$ での磁場の x 成分、 y 成分、 z 成分を答えなさい。
- (3) 図4の直線電流に働く力の向きと大きさを答えなさい。

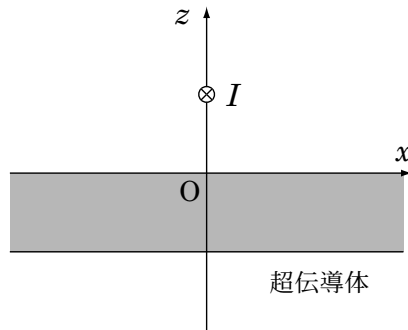


図4

磁気力に関するクーロンの法則は、数式の上では静電気力のクーロンの法則と全く同じ形をしており、静電気力について位置エネルギーを考えたのと同様に磁気力についても位置エネルギーを考えることができる。さらに、この位置エネルギーを磁場が空間に蓄える磁気エネルギーと考えることもできる。

- (4) 2つの磁極 m_1 と m_2 が距離 r だけ隔てて置かれているとき、磁極 m_1 がもつ位置エネルギーを答えなさい。

図5のように、磁極の強さ $\pm m$ ($m > 0$)、長さ d の棒磁石の中心を超伝導体板から距離 a だけ離れた点 $(0, 0, a)$ に固定する。ただし、 $d \ll a$ である。2つの磁極は常に xz 面上にあり、棒磁石は xz 面内で回転できる。棒磁石と z 軸のなす角を θ とする。このとき、 $z > 0$ の領域の磁場は、棒磁石が作る磁場と超伝導体表面を流れる電流が作る磁場を重ねあわせたものであるが、その様子は、超伝導体板を取り除いて $z < 0$ の領域に別の磁極を置くことで完全に再現できる。

- (5) どのように磁極を置けばよいか答えなさい。
- (6) このとき磁場が蓄えている磁気エネルギーを角度 θ の関数として求めなさい。ただし、2つの磁極の間に働く磁気力による磁気エネルギーはつねに一定なので、除いて良い。
- (7) 棒磁石がどの向きに向いているときに (6) の磁気エネルギーが最小になるか答えなさい。ここでは、 $d \ll a$ であることを用い、微量量 $\frac{d}{a}$ の2次まで考慮して近似計算しなさい。
- (8) 距離 a を変えたときに (6) の磁気エネルギーがどのように変わるかを考え、棒磁石の固定をはずして自由に動けるようにしたときに、棒磁石が超伝導体板に引き寄せられるかそれとも反発されるか、答えなさい。

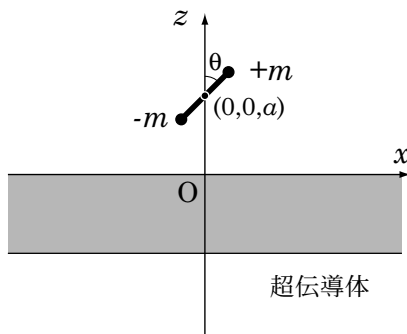


図5

II-C

作図問題とは、直線を引くことのできる定規と、円を描くことができるコンパスだけを有限回適用して描ける図形の性質を調べる問題である。作図問題では長さの目盛がない定規を使用する。作図問題における定規とコンパスの操作は、次の作図公理にまとめることができる。

定規とコンパスによる作図公理

- 平面上の2点に対し、それらを通る直線を引く。
- 既知の1点を中心とし、それ以外の既知の点を通るような円を描く。
- 互いに平行でない既知の2直線から、その交点を得る。
- 既知の円と直線から、その1つまたは2つの交点を得る。
- 既知の2つの円から、その1つまたは2つの交点を得る。

図1に公理aによる作図を示す。

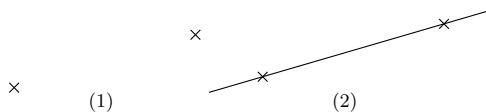


図1: 公理aによる作図: (1)に示す与えられた2点を通る直線を定規を使用して、(2)のように引くことができる。

問1 図1の作図手順を参考に、用意した道具で、作図公理b, c, d, eを図示しなさい。

作図公理を利用して、任意の角の3等分線を引くことができないことはよく知られた結果である。すなわち、次の定理が成立する。

定理 定規とコンパスによる作図操作を有限回適用して、平面上の任意の角を3等分することはできない。

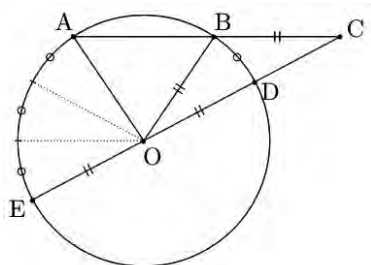


図 2: 角の 3 等分

問 2 図 2 において, ABC および, $EODC$ はそれぞれ一直線に存在し, $EABD$ は O を中心とする円周上に存在する。また, $BO=BC$ である。 $3\angle BOD = \angle AOE$ となっていることを証明しなさい。

問 3 最初に $\angle AOE$ が与えられているとき, 図 2 を定規とコンパスで作図できるとすれば定理に反する。作図公理ではどのような操作ができないために図 2 を作図できないか考察しなさい。

図3に示す(1)から(7)の手順によって任意の角 θ を折り紙で3等分できる。

- (1) 任意の角 θ を折り紙の左下の角につくる。
- (2) 折り紙の天地の辺に平行な直線FGを作る。
- (3) 1つ前で作った平行線の下に地の辺と等間隔になる平行線HIを作る。
- (4) BがHI上に、そしてFがBE上に乗るように折る。
- (5) 1つ上でできた折り線とHIとの交点をJとする。
- (6) 折った状態で、JとHを結ぶ折り線を紙の裏にもつけて元に戻す。
- (7) 折り線に図のように記号をつけると直線BB', BJが角を3等分する2つの直線である。

問4 図3の折り方で、 $\angle B'BO$, $\angle LBB'$, $\angle F'BL$ はいずれも $\angle EBC$ の $1/3$ であることを証明しなさい。

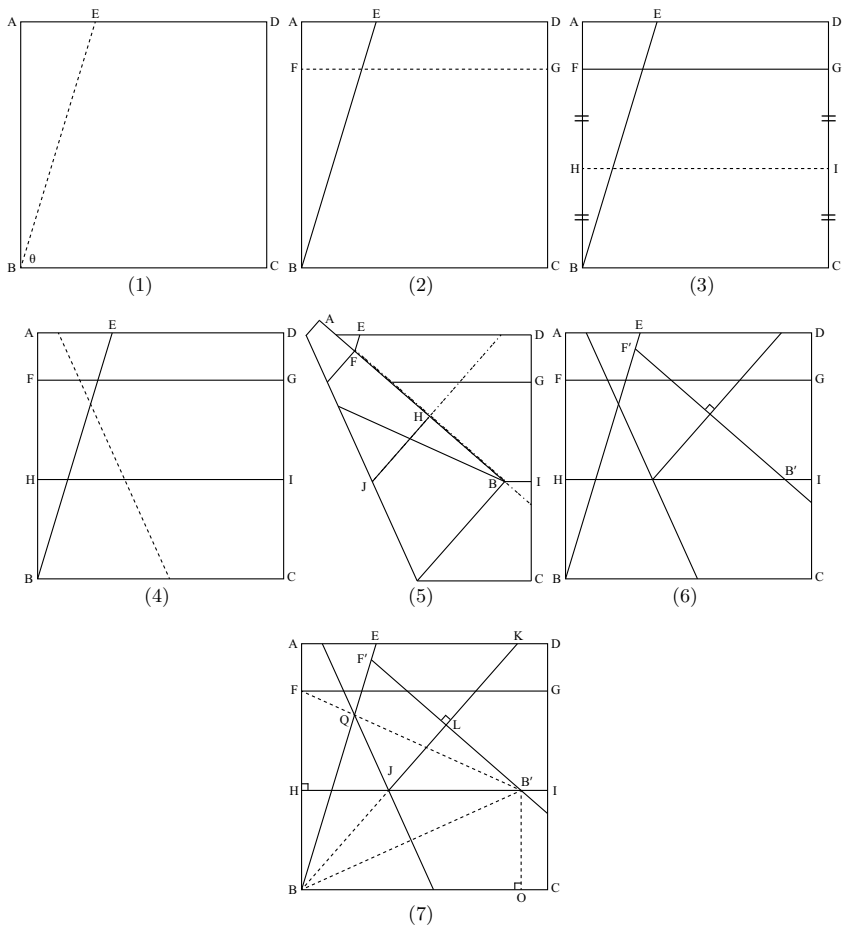


図 3: 折り紙による角の 3 等分: 図中で、点線は折り目を、一点鎖線は折り線を延長した線を示す。

定規とコンパスで2次方程式の解を作図できるが、ここでは、 $a > 0, b > 0$ のとき、2次方程式 $x^2 - 2ax - b = 0$ の折り紙による解法を考えてみる。

- (1) 長さ $1, 2a, b$ を図4のように決め、 $AB = IC = 1$ となるように直線 BCF を折る。また、 $AI = BC = 2a$ となる直線 ICJ を折る。
- (2) BCF に平行に、 $BG = FH = 1$ となるように直線 GH を折る。
- (3) 点 D を通り、点 A が直線 HG 上にくるように折って線 DE を決める。
- (4) (3) で折り出した線分 DE と BF の交点を E としたとき、 BE が求める長さになる。

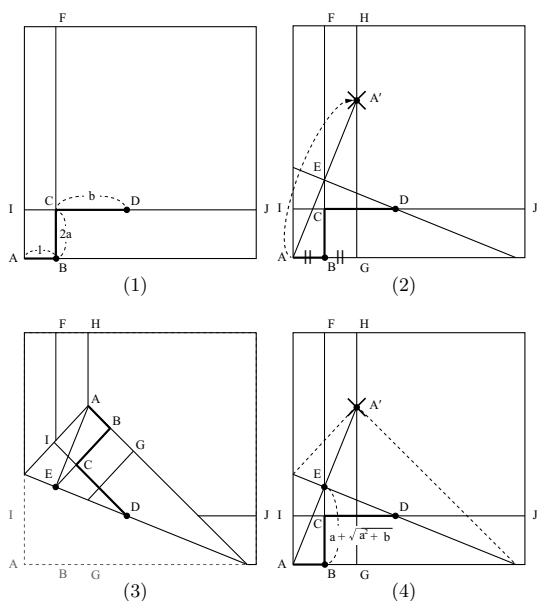


図4: 折り紙による2次方程式の解法

問5 図4の折り方で2次方程式の解を求めることができることを示しなさい。

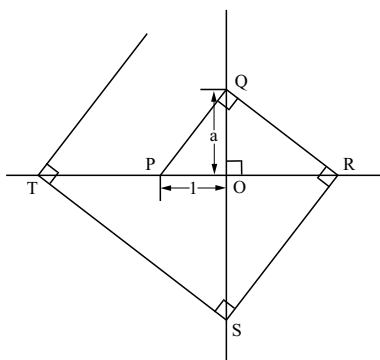


図 5: 螺旋状の折れ線

問 6 図 5 において、直線 TPOR と直線 QOS は互いに直交している。また、 $\angle PQR$, $\angle RST$, $\angle QRS$ はすべて直角である。線分 OP の長さを 1, 線分 OQ の長さを a とするときに線分 OR, OS, OT の長さを求めなさい。

図 6 に示すように

- (1) $BQ = QT = 1$ となる平行線を折る。
- (2) $BJ = JH = n$ となる平行線を折る。
- (3) J を ST 上に, Q を HI 上になるように折る。そして交点を J' , Q' とする。
このときできた折り線と PQ, JK との交点をそれぞれ X, Y とする。
- (4) $OX = \sqrt[3]{n}$ である。

によって整数の 3 乗根を求めることができる。

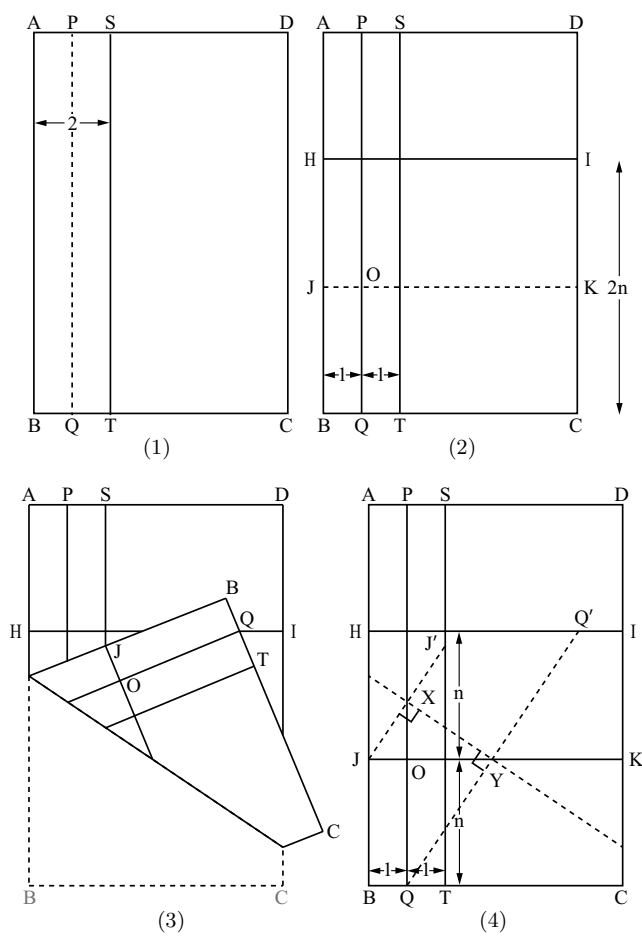


図 6: 折り紙による 3 乗根の計算

問 7 図 6 で $OX = \sqrt[3]{OQ}$ であることを証明しなさい。

問 8 三角関数の余弦の倍角公式と加法定理を利用して，余弦の 3 倍角の公式を導きなさい。

問 9 角の 3 等分を行う操作と，3 次方程式

$$x^3 + px + q = 0$$

を解く操作が同値であることを示しなさい。

以下の操作は、折り紙公理と呼ばれる折り紙の幾何学的操作である。

- O1. 2点 P_1, P_2 が与えられたとき、2点を通るただ1つの折り方がある。
- O2. 2点 P_1, P_2 が与えられたとき、 P_1 を P_2 に重ねるただ1つの折り方がある。
- O3. 2本の直線 l_1, l_2 が与えられたとき、 l_1 を l_2 に重ねるような折り方がある。
- O4. 1点 P_1 と1本の直線 l_1 が与えられたとき、 l_1 に垂直で P_1 を通るただ1つの折り方がある。
- O5. 2点 P_1, P_2 と1本の直線 l_1 が与えられたとき、 P_1 を l_1 上に重ね、 P_2 を通る折り方がある。
- O6. 2点 P_1, P_2 と2本の平行でない直線 l_1, l_2 が与えられたとき、 P_1 を l_1 上に重ね、かつ P_2 を l_2 上に重ねる折り方がある。
- O7. 1点 P と2本の平行でない直線 l_1, l_2 が与えられたとき、 P を l_1 に重ね、かつ折り線が l_2 に垂直な折り方がある。

折り紙公理によって、3次方程式を解いたり、角の3等分ができることがわかる。

問 10 図2の例から、作図公理に、どのような操作を加えれば、角の3等分が作図可能になるか考えなさい。そして、その操作によって図2を作図できることを説明しなさい。

参考:2 次方程式の解の作図

- (1) $AB = 1$, $BC = 2a$, $CD = b$ とする。
- (2) AD を直径とする円を描く。
- (3) この円と BC を上に伸ばし、円と交わった点を E とする。
- (4) BE の長さが $a + \sqrt{a^2 + b}$ となり、これは $x^2 - 2ax - b = 0$ の解である。

以上のように図 4 は定規とコンパスだけで作図可能である。

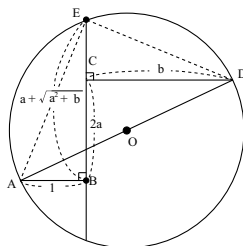


図 7: 2 次方程式の解の作図

平成 25 年度

千葉大学先進科学プログラム入学者選考課題

課題 II-A 解答例

H25
解答例

II-A <解答例>

(出題意図)

- ・ 振子の等時性という基本問題を題材にすることで、無用な複雑さを排除し、力学の基本事項に関する理解度を確認する。
- ・ 物理学（力学）を、数 III レベルの数学を駆使して理解する能力があるかを確認する。

(解答例)

問 1 (1)

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx$$

(2)

$$\begin{aligned} x(t) &= A \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t \\ v(t) &= -A \sqrt{\frac{k}{m}} \sin \sqrt{\frac{k}{m}} t \\ a(t) &= -A \frac{k}{m} \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t \end{aligned}$$

(3)

$$\frac{1}{2} m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} k A^2$$

(4)

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad (A \text{ に依存しない})$$

問 2 (1) 教科書に載っているばねの位置エネルギーを導く方法を参考にして導けばよい。
図を描いて仕事（面積）を求める問題になる。すなわち

$$U = - \int_0^x f(x') dx' = \int_0^x (kx' + px'^3) dx' = \frac{1}{2} kx^2 + \frac{1}{4} px^4$$

(2) 下図のようになる。

(3) $p > 0$ なら周期 T は減少し、 $p < 0$ なら周期 T は増加する。（理由）図を参照しながら説明すればよい。ばねの復元力は、 $p > 0$ なら少し強まり、 $p < 0$ なら少し弱まるから。また、その効果は変位が大きいほど顕著だから、 $p > 0$ なら振幅が大きいほど周期は減少し、 $p < 0$ なら振幅が大きいほど周期は増加する。（理由：別の説明）例えば $p < 0$ なら、振幅を $\alpha > 1$ 倍したとき、原点を通過する速度は増えるが、それは α 倍より小さい。すなわち、振幅の増加より速度の増加が小さいので。

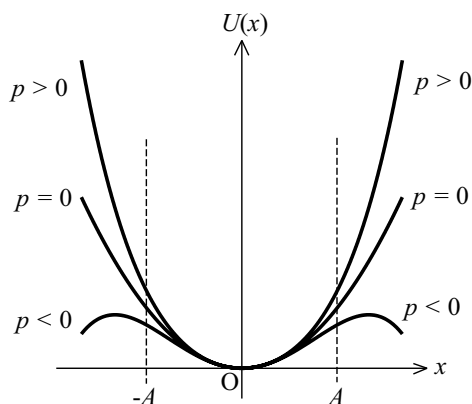


図 1: U の x 依存性

問 3 (1)

$$v_x = \frac{dx}{dt} = -a \sin \theta \frac{d\theta}{dt}$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = a \cos \theta \frac{d\theta}{dt}$$

(2)

$$K = \frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}m\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \frac{1}{2}ma^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$$

(3)

$$U = mg(a - x) = mga(1 - \cos \theta)$$

(4)

$$\frac{1}{2}ma^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + mga(1 - \cos \theta) = mga(1 - \cos \theta_m)$$

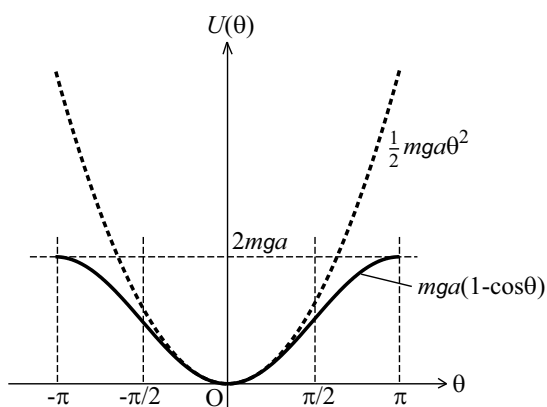


図 2: 単振子の位置エネルギーの θ 依存性

- (5) 上式に $\cos \theta \simeq 1 - \frac{1}{2}\theta^2$, $\cos \theta_m \simeq 1 - \frac{1}{2}\theta_m^2$ を代入してエネルギー保存則を書けば,

$$\frac{1}{2}ma^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}mga\theta^2 = \frac{1}{2}mga\theta_m^2$$

となる。これは、質量 m , ばね定数 mg/a のばね振子のエネルギー保存則と等価だから、その周期は

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{a}{g}}$$

である。

- (6) 周期 T は長くなる。

(理由1) $U(\theta)$ の図を描き、問2と比較する。

図2のように、 $U(\theta)$ の θ^2 の形からのずれは、 θ が大きくなるほど顕著になるから、振幅が大きいほど周期は長くなる。

(理由2) 次の項まで展開してエネルギー保存則を書けば

$$\frac{1}{2}ma^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}mga\theta^2 - \frac{1}{24}mga\theta^4 + \cdots = \text{一定}$$

ここで θ^4 の項は負であり、有効ばね振子のばね定数 k を小さくするように働く。そしてその効果は、 θ が大きくなるほど顕著だから、振幅が大きいほど周期は長くなる。

問4 (1)

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{dx}{dt} = 2a(1 + \cos 2\theta) \frac{d\theta}{dt} \\ v_y &= \frac{dy}{dt} = 2a \sin 2\theta \frac{d\theta}{dt} \end{aligned}$$

- (2)

$$K = \frac{m}{2} \left[\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 \right] = 4ma^2(1 + \cos 2\theta) \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2$$

- (3)

$$U = mgy = mga(1 - \cos 2\theta)$$

- (4) 曲線の長さを公式を用いて計算する。

$$\frac{dx}{d\theta} = 2a(1 + \cos 2\theta), \quad \frac{dy}{d\theta} = 2a \sin 2\theta$$

より

$$\left(\frac{dx}{d\theta} \right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta} \right)^2 = 8a^2(1 + \cos 2\theta) = (4a \cos \theta)^2$$

よって

$$s = \int_0^\theta 4a \cos \theta' d\theta' = 4a \sin \theta$$

となる。

(5) 三角関数の公式

$$1 + \cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta, \quad 1 - \cos 2\theta = 2 \sin^2 \theta$$

を用いて上の K と U を書き換えれば,

$$K = \frac{1}{2}m \left[4a \cos \theta \frac{d\theta}{dt} \right]^2 = \frac{1}{2}m \left(\frac{ds}{dt} \right)^2$$
$$U = 2mga \sin^2 \theta = \frac{mg}{8a} (4a \sin \theta)^2 = \frac{mg}{8a} s^2$$

よってエネルギー保存則は

$$\frac{1}{2}m \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{mg}{4a} s^2 = \frac{1}{2} \frac{mg}{4a} s_m^2$$

と書ける。

- (6) 上式は質量 m , ばね定数 $mg/(4a)$ のばね振子のエネルギー保存則と等価だから, この系では周期は振幅 s_m によらず

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{4a}{g}}$$

である。

H25

解答例

平成 25 年度

千葉大学先進科学プログラム入学者選考課題

課題 II-B 解答例

II-B <解答例>

[解説]

問 1 では、導体のそばに置かれた点電荷と導体表面に現れる誘導電荷がつくる電場の様子、点電荷の電位と誘導電荷から受ける力、静電エネルギーなどを鏡像法の考え方をを用いて求めます。前半は点電荷が 1 つの場合を扱いますが、誘導電荷を点電荷に置き換えて導体表面と直交する電場を再現するという鏡像法の考え方を問題文から読み取り、後半の 2 つの点電荷からなる電気双極子の問題に応用して下さい。

問 2 では、問 1 の鏡像法の考え方を超伝導体のそばに置かれた電流や磁石がつくる磁場の問題に応用します。前半は直線電流の場合について、超伝導体の表面で平行になる磁場の性質を鏡像電流をどのように流せば再現できるか考えます。後半は、棒磁石を 2 つの磁極からなる磁気双極子として扱い、問 1 の後半とほぼ同じ計算によって磁気エネルギーを求めます。

問 1

- (1) 導体内部は等電位なのでその表面は等電位面になる。電気力線は等電位面と直交するので、導体表面と直交することになる。
- (2) 電気力線が導体の表面に垂直になるようにするには、電荷 $-q$ の点電荷をおけばよい。
- (3) 略。
- (4) 誘導電荷が作る電場は図 2 の点電荷 X が作る電場と同じである。

$$\text{大きさ } k_e \frac{q^2}{4a^2} \quad \text{向きは } z \text{ 軸の負の方向}$$

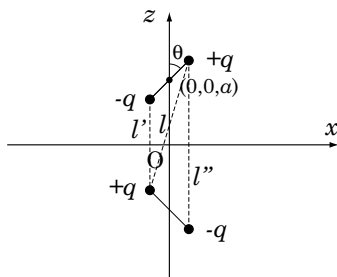
(5)

$$\text{電位 } -k_e \frac{q}{2a} \quad \text{静電エネルギー } -k_e \frac{q^2}{4a}$$

- (6) 2 つの点電荷についてそれぞれ、 xy 面について対称の位置に大きさは同じで逆符号の点電荷をおく。

$$\text{点 } \left(\frac{d}{2} \sin \theta, 0, -a - \frac{d}{2} \cos \theta \right) \text{ に } -q \quad \text{点 } \left(-\frac{d}{2} \sin \theta, 0, -a + \frac{d}{2} \cos \theta \right) \text{ に } +q$$

- (7) 図のように点電荷間の距離を l, l', l'' とおくと



$$l = \sqrt{4a^2 + d^2 \sin^2 \theta} \quad l' = 2a - d \cos \theta \quad l'' = 2a + d \cos \theta$$

$$\text{電荷} +q \quad V_+ = k_e q \left(\frac{1}{l} - \frac{1}{l''} \right) = k_e q \left(\frac{1}{\sqrt{4a^2 + d^2 \sin^2 \theta}} - \frac{1}{2a + d \cos \theta} \right)$$

$$\text{電荷} -q \quad V_- = k_e q \left(-\frac{1}{l} + \frac{1}{l'} \right) = k_e q \left(-\frac{1}{\sqrt{4a^2 + d^2 \sin^2 \theta}} + \frac{1}{2a - d \cos \theta} \right)$$

$$U = \frac{k_e q^2}{2} \left(\frac{2}{l} - \frac{1}{l'} - \frac{1}{l''} \right) = \frac{k_e q^2}{2} \left(\frac{2}{\sqrt{4a^2 + d^2 \sin^2 \theta}} - \frac{1}{2a - d \cos \theta} - \frac{1}{2a + d \cos \theta} \right)$$

(8) 近似式を用いると

$$U \approx -\frac{k_e q^2 d^2}{2(2a)^3} (1 + \cos^2 \theta)$$

となり, $\theta = 0$ のとき最小

(9) 距離 a を増やすときの静電エネルギーの変化量は, 棒に働く力とつり合うような力を加えて棒を動かすときの仕事に等しく, これは正である。したがって, 棒には導体板に引き寄せるような力が働いている。

H25

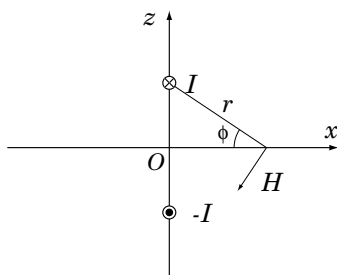
解答例

問 2

(1) 大きさ I の点 $(0, 0, -a)$ を通り y 軸の負の方向

(2) y, z 成分は 0。 x 成分は, 電流 I が作る磁場の x 成分を 2 倍して

$$-2 \frac{I}{2\pi r} \sin \phi = -\frac{I}{\pi} \frac{a}{r^2} = -\frac{I}{\pi} \frac{a}{a^2 + x^2}$$



(3)

$$\text{長さ } l \text{ あたり } \mu \frac{I^2}{4\pi a} l \quad \text{方向は } z \text{ 軸の正の方向}$$

(4)

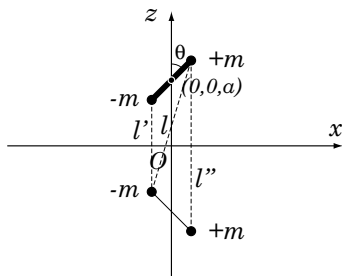
$$k_m \frac{m_1 m_2}{r}$$

(5) 2つの磁極についてそれぞれ, xy 面について対称の位置に大きさは同じで同符号の磁極をおく。

$$\text{点 } \left(\frac{d}{2} \sin \theta, 0, -a - \frac{d}{2} \cos \theta \right) \text{ に } +m \quad \text{点 } \left(-\frac{d}{2} \sin \theta, 0, -a + \frac{d}{2} \cos \theta \right) \text{ に } -m$$

(6) 上問と同様に

$$U = \frac{k_m m^2}{2} \left(-\frac{2}{l} + \frac{1}{l'} + \frac{1}{l''} \right) = \frac{k_m m^2}{2} \left(-\frac{2}{\sqrt{4a^2 + d^2 \sin^2 \theta}} + \frac{1}{2a - d \cos \theta} + \frac{1}{2a + d \cos \theta} \right)$$



(7) 近似式を用いると

$$U \approx \frac{k_m m^2 d^2}{2(2a)^3} (1 + \cos^2 \theta)$$

となり, $\theta = \pi/2$ のとき最小

(8) 距離 a を増やすときの磁気エネルギーの変化量は, 棒磁石に働く力とつり合うような力を加えて棒磁石を動かすときの仕事に等しく, これは負である。したがって, 棒には超伝導体から反発力を受けている。

H25
解答例

平成 25 年度

千葉大学先進科学プログラム入学者選考課題

課題 II-C 解答例

II-C <解答例>

問 1 注：出題に関して、メモリのない定規、コンパス、折り紙を用意する。

問 2

$\angle BCD = \alpha$, $\angle BOC = \alpha$ とおけば、 $\angle OBA = \angle OAB = 2\alpha$ である。さらに
 $\angle AOE = \angle OAB + \angle BCD = 2\alpha + \alpha = 3\angle BOD$

問 3

点 C を EOD の上を移動させながら BC の長さが円の半径に等しくなる
 点 B を決めることができない。
 (印のついた定規が必要)

問 4

$\angle BOB' \equiv \angle BB'L \equiv \angle BLF'$ より、 $\angle OBB' = \angle B'BL = \angle LBF'$ である。

問 5

$BE = x$ とすると、 $\triangle ABE \sim \triangle ECD$ より、 $1 : x = (x - 2a) : b$ を得る。したがって、
 $x(x - 2a) = b$ より、 x は $x^2 - 2ax - b = 0$ を満たす。

問 6

相似な直角三角の辺の比から、 $OR = x$, $OS = y$, $OT = z$ とおくと、 $1 : a = a : x$, $x : a = y : x$, $y : x = y : z$
 したがって、 $x = a^2$, $y = a^3$, $z = a^4$ を得る。

問 7

$OX = x$, $OY = y$ とおくと、 $\triangle XOY \sim \triangle YOQ \sim \triangle JOX$ より、 $1 : x = x : y = y : n$ を得る。したがって、
 $y = x^2$, $x : x^2 = x^2 : n$ より $x^4 = xn$ となり、 $x^3 = n$ を得る。

問 8

$$\cos 3\theta = 4\cos^3 \theta - 3\cos \theta$$

問 9

3 倍角の公式で、 3θ を与えて θ を求めるためには、 $\cos 3\theta = a$, $\cos \theta = x$, とおき 3 次方程式
 $4x^3 - 3x - a = 0$ を解いてから $\theta = \cos^{-1} x$ を解けばよい。

問 10

図 3、図 6 の結果より 3 次方程式が折り紙で解けるのは、二点を直線の上に重ねる折り方ができるからである。これは、図 2 を作図する場合に、長さを保った線分の一つの端点を決められた直線の上で移動させながら、さらに別の端点の動きを制限することになる。定規とコンパスではこのような作図ができない。これは、2 点と 2 直線を同時に扱う操作である。定規とコンパスではこの操作は不可能である。定規に印をつけてずらす操作を加えればよい。これは、O6 に対応する操作を加えればよい。

H25

解答例

平成 24 年度

千葉大学先進科学プログラム入学者選考課題

課題論述

実施時間 [9:00－17:00]

課題 II-A, II-B, II-C

(10:00－15:30)

H24
—
課題

注意事項

課題Ⅱには、[Ⅱ－A]、[Ⅱ－B]、[Ⅱ－C]、[Ⅱ－D]、[Ⅱ－E]の 5 題があります。

志望するコースによって、次に示す問題を解答してください。

- ・物理学コース：
[Ⅱ－A]、[Ⅱ－B]の 2 題を解答してください。
- ・フロンティアテクノロジーコース
[Ⅱ－A]、[Ⅱ－B]、[Ⅱ－C]の中から 2 題を選択して解答してください。
- ・人間探求コース：
[Ⅱ－A]、[Ⅱ－B]、[Ⅱ－C]、[Ⅱ－D]、[Ⅱ－E]の中から 2 題を選択して解答してください。

II-A

図1のような、両端に質量 m の小球 A, B が取り付けられた、軽くて変形しない細い棒（長さ 2ℓ ）の運動を考える。

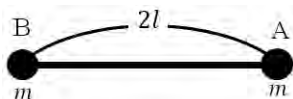


図 1: 両端に小球が取り付けられた棒

問1 この棒がなめらかな水平面上を運動している。外力が働いていないので、棒の重心は等速直線運動し、小球 A と B は、棒の重心から見てその周りに一定角速度 ω で回転運動している。

(1) 棒の重心から見た小球 A の座標 $\vec{r}_A = (x_A, y_A)$ が、時刻 t の関数として

$$x_A = \ell \cos \omega t$$

$$y_A = \ell \sin \omega t$$

と与えられるとき、これらの時刻 t に関する微分を計算し、棒の重心から見た小球 A の速度

$$\vec{v}_A = \left(\frac{dx_A}{dt}, \frac{dy_A}{dt} \right)$$

と加速度

$$\vec{a}_A = \left(\frac{d^2x_A}{dt^2}, \frac{d^2y_A}{dt^2} \right)$$

を、時刻 t の関数として求めなさい。

(2) 2つの小球の回転運動の運動エネルギーを求めなさい。

(3) 水平面上に固定された原点 O から見た棒の重心の速度（一定値）を (V_x, V_y) とするとき、原点 O から見た小球 A の速度と加速度を、時刻 t の関数として表しなさい。

問2 以下では、水平面上に固定された原点 O から見た小球 A, B の速度を、それぞれ $\vec{v}_A, \vec{v}_B$ とする。原点 O から見た棒の重心の速度は $\vec{V} = \frac{1}{2}(\vec{v}_A + \vec{v}_B)$ であり、小球 B から見た小球 A の速度は $\vec{v} = \vec{v}_A - \vec{v}_B$ である。

(1) $\vec{v}_A$ と $\vec{v}_B$ を $\vec{V}$ と $\vec{v}$ で表しなさい。

(2) 2つの小球の運動エネルギーの合計 T は、一般に

$$T = \frac{m}{2} (|\vec{v}_A|^2 + |\vec{v}_B|^2) = \frac{M}{2} |\vec{V}|^2 + \frac{\mu}{2} |\vec{v}|^2$$

と表せる。この等式を証明し、 M と μ を求めなさい。

(3) 棒の回転角速度を ω とすると、

$$|\vec{v}|^2 = 4\omega^2 \ell^2$$

と表されることを示しなさい。

問3 図2のように、なめらかな水平面上にこの棒を静かに置き、時刻 $t = 0$ で小球 A に、棒に垂直方向の初速度 v_0 を与えた。時刻 $t > 0$ における棒の運動について、以下の問いに答えなさい。

- (1) 原点 O から見た棒の重心の座標 (X, Y) を、時刻 t の関数として求めなさい。
- (2) 重心から見た棒の回転の角速度 ω を求めなさい。
- (3) 原点 O から見た小球 A の座標 (x_A, y_A) を、時刻 t の関数として求めなさい。

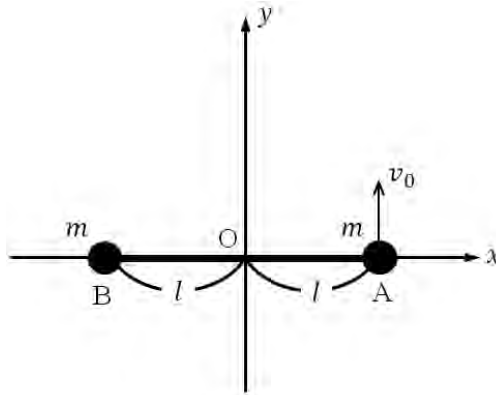


図 2: 棒の水平面での運動

問4 次ページの図3のように、なめらかで水平な床の上で、この棒を、小球 A を上にして床面に垂直に静かに立てる。この棒がわずかにバランスを崩してゆっくり倒れるときの運動を考える。棒は常に (x, z) 面内にあるとする。棒が鉛直上方 (z 軸正方向) となす角 (棒の傾き) が θ のときを考える。重力加速度の大きさを g として、以下の問いに答えなさい。

- (1) 小球 A の座標 (x_A, z_A) と小球 B の座標 (x_B, z_B) を θ を用いて表しなさい。
- (2) 棒の重心はどのような運動をするか答えなさい。
- (3) 小球 A が描く軌跡の式を導きなさい。また、その式はどのような図形を表すか答えなさい。
- (4) 小球 A の位置エネルギーを θ の関数として表しなさい。床面の位置エネルギーを 0 とする。
- (5) 2つの小球の運動エネルギーの合計を、傾きの変化率 (棒の回転角速度) $\frac{d\theta}{dt}$ を用いて表しなさい。

- (6) 棒の傾きが θ となったときの傾きの変化率 $\frac{d\theta}{dt}$ を θ の関数として求めなさい。
- (7) 小球 A が床に衝突する直前の、小球 A の速度を求めなさい。
- (8) 小球 A が床と完全弾性衝突した場合、小球 A はどこまで上昇するか答えなさい。

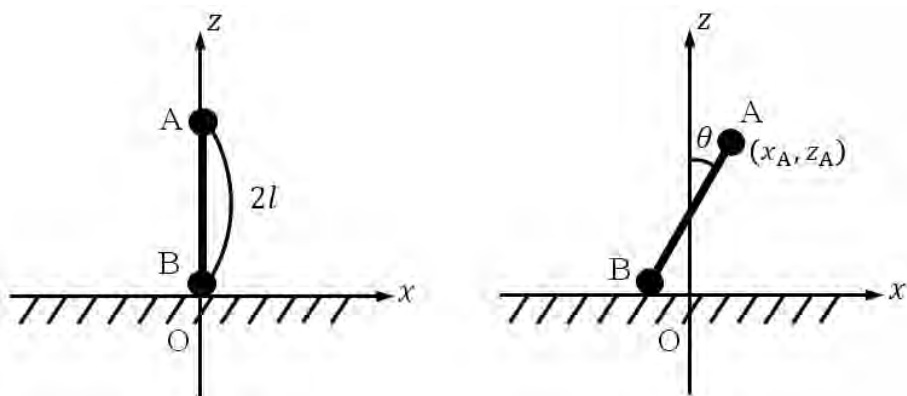


図 3: 直立した棒の転倒

(数学公式) 必要なら以下の公式を用いてよい。

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\theta} \cos \theta &= -\sin \theta, & \frac{d}{d\theta} \sin \theta &= \cos \theta \\ \frac{d}{dt} \cos \theta &= -\sin \theta \frac{d\theta}{dt}, & \frac{d}{dt} \sin \theta &= \cos \theta \frac{d\theta}{dt} \end{aligned}$$

II-B

気圧が低い山の上では水が 100°C よりも低い温度で沸騰するため、通常の方法ではおいしいご飯が炊けない。そこで、空気や水が逃げないように密封した圧力鍋が使われる。水蒸気を含んだ空気中で雲ができたり、雨が降ったりする現象も温度や圧力の変化に伴って起こる。以下では水から水蒸気、水蒸気から水への変化に圧力が及ぼす効果について考えてみよう。

図1のように圧力 $p_0 = 1.013 \times 10^5 \text{Pa}$ (1気圧) の大気中で断面積 $S[\text{m}^2]$ が一定の十分に長い円筒容器中に定積モル比熱 $C_V[\text{J}/(\text{mol} \cdot \text{K})]$ の気体 $n_0[\text{mol}]$ を封入し、 $n_W[\text{mol}]$ の水を入れた。ここで、 $1\text{Pa} = 1\text{N}/\text{m}^2$ である。高さによる圧力の違いは無視できるものとする。封入した気体と水蒸気は理想気体とする。また、封入した気体は水には溶けないものとし、水の密度 $\rho_W[\text{kg}/\text{m}^3]$ は温度によらず一定とする。ピストンの質量は無視でき、円筒容器内をなめらかに運動できる。なお、ピストンおよび壁を通して容器内の気体と外部は熱のやりとりをしないものとする。

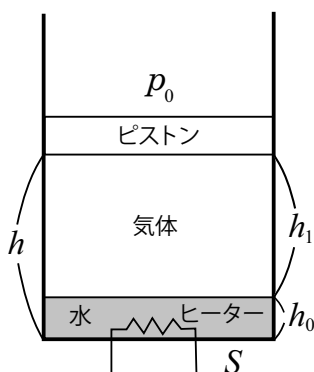


図1

問1 水と気体の温度がいずれも $T_0[\text{K}]$ であり、 T_0 は沸点よりも低く、水は蒸発しないものとする。ピストンがつりあいの位置にあるとき、気体定数を $R[\text{J}/(\text{mol} \cdot \text{K})]$ として以下の問いに答えなさい。

- (1) 水 1mol の質量を $m_W[\text{kg}]$ とする。 m_W の値を有効数字3桁で求めなさい。
- (2) 容器底面から水面までの高さ $h_0[\text{m}]$ を S , ρ_W , n_W , m_W を用いてあらわしなさい。
- (3) 水面からピストン下面までの高さ $h_1[\text{m}]$ を S , p_0 , T_0 , n_0 , R を用いてあらわしなさい。

問2 ヒーターを用いて水を加熱したところ、容器内の気体は水と同じ温度を保ちながら膨張し、ピストンをゆっくりと持ち上げた。時刻 $t = 0$ の水温を $T_0[\text{K}]$ とし、単位時間あたりにヒーターから加えられる熱量は一定で $q[\text{J/s}]$ 、水のモル比熱を $C_W[\text{J}/(\text{mol} \cdot \text{K})]$ とする。水温が沸点より低い場合、水の蒸発を無視して以下の問いに答えなさい。

- (1) 水温が $T_0[\text{K}]$ から $T_1[\text{K}]$ まで上昇する間に気体が外部にした仕事 $W[\text{J}]$ を n_0 , R , T_0 , T_1 を用いてあらわしなさい。
- (2) 水温が $T_0[\text{K}]$ から $T_1[\text{K}]$ まで上昇する間に気体が得た熱量 $Q[\text{J}]$ を n_0 , R , C_V , T_0 , T_1 を用いてあらわしなさい。
- (3) 加熱を始めた後、沸騰する直前までの水温の変化を式で求め、横軸を時刻 $t[\text{s}]$ 、縦軸を水温 $T[\text{K}]$ とするグラフであらわしなさい。
- (4) 水と接している気体の圧力が1気圧のとき、水は $T_B = 373\text{K}$ で沸騰する。水が沸騰する時刻 t_1 を求めなさい。

問3 沸騰中は水、水蒸気、および最初に封入された気体の温度は一定に保たれる。水蒸気の定積モル比熱は封入されている気体と同じで C_V とする。また、ヒーターは容器の底面にあり、その高さは無視できるものとする。

- (1) 水と接している気体の圧力を1気圧に保った状態で水 1mol を蒸発させるのに必要な熱量（蒸発熱）を $L_0[\text{J/mol}]$ とする。容器内にあった $n_W[\text{mol}]$ の水が蒸発し終わる時刻 $t_2[\text{s}]$ を求めなさい。答には t_1 を用いて良い。
- (2) 水が沸騰し始めてから $n_W[\text{mol}]$ の水がすべて水蒸気になるまでの間にピストンがする仕事 $W_B[\text{J}]$ を n_W , m_W , ρ_W , R , T_B , p_0 を用いてあらわしなさい。

問4 水及び水と接する気体の温度 $T[\text{K}]$ が $T < 647\text{K}$ ならば、水と接する気体の圧力が次式で与えられる $p_A[\text{Pa}]$ の時に水は沸騰する。

$$\log_{10} \frac{p_A}{p_0} = -5.80 \left(\frac{T_B}{T} - 1 \right)$$

$T = 0.8T_B$, T_B , $1.2T_B$, $1.4T_B$, $1.6T_B$ の場合の $\log_{10}(T/T_B)$ と $\log_{10}(p_A/p_0)$ を求め、横軸を $\log_{10}(T/T_B)$ 、たて軸を $\log_{10}(p_A/p_0)$ とするグラフを作成しなさい。

問5 次にピストンを容器の底面からピストン下面までの高さが h の位置に固定して問2と同様に水を加熱する場合を考える。以下では $T_0 = 0.8T_B$, $n_W/n_0 = 10$ とする。

- (1) 水の蒸発が無視できるときの h_1/h_0 の値を求めなさい。ただし, $\rho_W = 1.00 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$, $R = 8.314 \text{ J/(mol} \cdot \text{K)}$ とする。
- (2) 水が沸騰していないとき, 水の蒸発は無視できるものとして水と接する気体の温度 $T[\text{K}]$ と圧力 $p[\text{Pa}]$ の関係を式で求め, 問4で作成したグラフに書き加えなさい。
- (3) 水が沸騰しはじめる温度を $T'_B[\text{K}]$ とすると, $\delta T_B = T'_B - T_B$ を1K以下の誤差で求めなさい。 $|x| \ll 1$ のとき, $1/(1+x) \simeq 1-x$, $\log_e(1+x) \simeq x$ と近似できることを用いて良い。ここで e は自然対数の底であり, $\log_e 10 = 2.3026$ である。
- (4) 沸騰を開始するまでに水の一部が蒸発する場合, 水と接する気体の温度と圧力の関係は蒸発が無視できる場合にくらべてどのように変化するか。変化がわかるように, おおよその関係を問4で作成したグラフに点線で書き加え, なぜそのように変化するかを述べなさい。
- (5) 沸騰開始から水が蒸発し終わるまでの間, 水と接する気体の温度と圧力がどのように変化するかを述べなさい。
- (6) 水が蒸発し終わった直後の気体の温度を $T'_2[\text{K}]$, 圧力を $p'_2[\text{Pa}]$ とする。電卓を用いて, T'_2/T_B , $\log_{10}(p'_2/p_0)$ の値を有効数字3桁の数値で求めなさい。

問6 前問ですべての水が蒸発した後も, さらに加熱を続け, 気体の温度が $T' = 1.50T_B$ になった状態で加熱をやめ, ピストンの固定をはずして気体をゆっくりと膨張させた。

- (1) ピストンの固定をはずす直前の気体の圧力を $p'[\text{Pa}]$ とすると, $\log_{10}(p'/p_0)$ の値を求めなさい。
- (2) 気体が断熱変化する場合, 圧力 $p[\text{Pa}]$ と体積 $V[\text{m}^3]$ の間には $pV^\gamma = \text{一定}$ の関係があることを用いて, ピストンの固定を解除した後の気体の圧力 $p[\text{Pa}]$ と温度 $T[\text{K}]$ の関係を式で求め, 問4で作成したグラフに書き加えなさい。 γ は比熱比であり, 封入された気体, 水蒸気ともに $\gamma = 4/3$ とする。また, 封入された気体はつねに気体の状態にあるものとする。
- (3) 水蒸気が水に戻りはじめる温度 T_3 を電卓を用いて5K以下の誤差で求めなさい。

II-C

ロケットは進行方向と反対側に高速で推進剤を噴射し、その反作用により加速する。この噴射によって生じる力は推力と呼ばれる。

ここで、ロケットが短い時間 Δt にわずかな質量 ΔM の推進剤をロケットからみて速さ u で噴射する。この時、ロケットに一定の推力 F が加わり速さが Δv 変化した。この噴射後のロケットの質量を M とし、以下の問いに答えなさい。空気抵抗や重力は無視して考えてよい。

[問1]

- (1) Δv を u , M , ΔM のうち必要なものを用いて答えなさい。
- (2) F を u , ΔM , Δt のうち必要なものを用いて答えなさい。

[問2]

ロケットがわずかな量ずつ燃料を噴射すると考え、以下の方法でロケットの速さをもとめてみよう。推進剤を搭載した状態で全質量 M_0 の静止したロケットが、同じ方向にロケットからみて速さ u で推進剤を n 回噴射する。ここで、 k 回目に噴射される推進剤の質量を $\Delta M_k = M_0(1-s)^{k-1}s$ (ただし、 $0 < s < 1$) とする。

(1) n 回目までに噴射した推進剤の質量を M_0 , s , n のうち、必要なものを用いてもとめなさい。

(2) n 回目の噴射による速さの変化 Δv_n をもとめなさい。

(3) 推進剤を n 回噴射後、最初的全質量 M_0 と比較してロケットの質量が r の割合となったとしよう。すなわち、ロケットの質量は $M_0 \cdot r$ となり、質量 $M_0 \cdot (1-r)$ の推進剤を噴射した。この時の n をもとめなさい。

(4) 推進剤を n 回噴射後のロケットの速さ v を u , r , s のうち必要なものを用いて答えなさい。

(5) (4) で求めた v に対し、 s は十分に小さいと考え $s \rightarrow 0$ とする。このときのロケットの速さ v を u , r のうち必要なものを用いて答えなさい。ただし、 $|x| \ll 1$ のとき、 $\log_e(1-x) \approx -x$ としてよい。

「はやぶさ」などの惑星探査機では、イオンエンジンと呼ばれる推進エンジンを使っている。このイオンエンジンの推力について考えてみよう。

イオンエンジンの概略を図1に示す。キセノンガス（推進剤）をマイクロ波を使ってイオン化し、一価の正イオンにする。このイオンを電極間の静電界をつかって加速する。この電極には幅の小さな隙間（スリット）があいており、このスリットからイオンが噴射され、その反作用で推力をえている¹⁾。

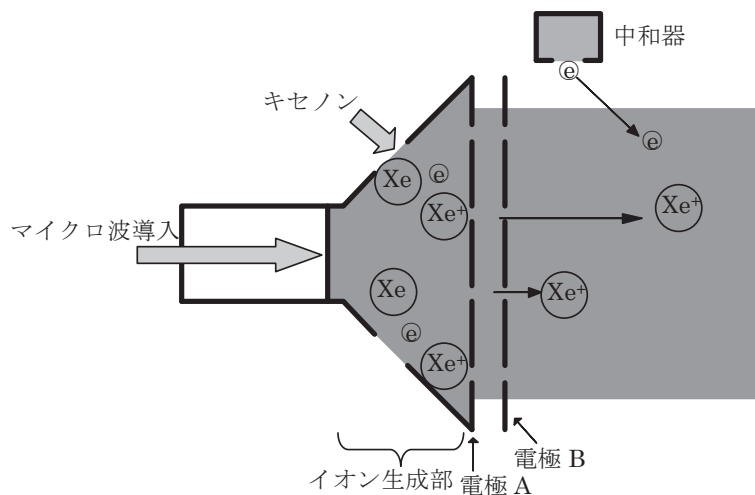


図1

キセノンイオンが加速される様子について考えてみよう。図2のように、キセノンイオンは2枚の電極、電極Aと電極Bによってつくられる電界により加速される。電極A、電極Bにはスリットがあいていて、キセノンイオンは、このスリットの間を自由に通らぬける。電極A、電極Bそれぞれの電圧を V 、0とする。ただし、 $V \geq 0$ 、2枚の電極の間隔を L とする。図2のように y 軸を電極Aと平行にとり、その原点を電極Aのスリットの中心におく。 x 軸は電極の法線方向とする。スリットの中心が点 $(L, 0)$ となるように電極Bがおかれている。電極は紙面と垂直方向に無限に長い。スリット幅は電極の間隔に比べ十分に狭く、電界は電極に対して垂直方向に一様であるとする。電極の厚さは十分に薄く無視できる。1つのキセノンイオンが電極Aのスリットの点 $P(0, y_{A0})$ より入射する。キセノンイオンは点Pを速さ v_0 、 x 軸となす角 θ_0 で通過したと考える。電気素量を e 、キセノンイオン1個の質量を m とする。以下の計算では $|\theta_0| \ll 1$ として $\sin \theta_0 \approx \theta_0$ 、 $\cos \theta_0 \approx 1$ と近似してよい。

¹⁾ 実際には図1に示すように、スリットから噴射したキセノンイオンに中和器から放出した電子を衝突させて、電気的に中性にしている。この衝突による運動量の変化はわずかであるため、無視している。

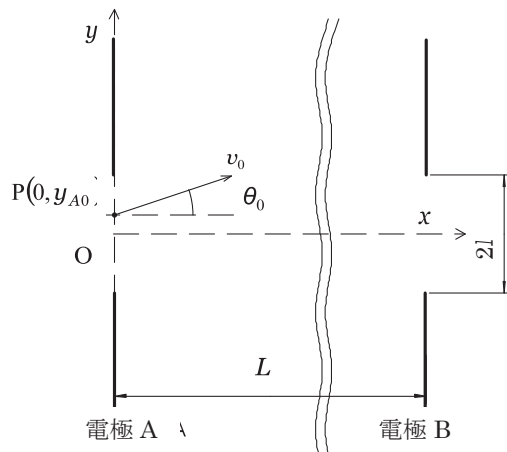


図 2

[問 3]

- (1) キセノンイオンが電極 A と電極 B の間にあるとき、 x 軸方向に生じる加速度 a_x をもとめなさい。
- (2) 点 P を通過した時刻を 0 として、時刻 t におけるキセノンイオンの x 軸方向への速さ v_x 、 y 軸方向への速さ v_y 、位置 (x, y) をそれぞれもとめなさい。
- (3) キセノンイオンが電極 B に到達したときの位置 (L, y_B) をもとめなさい。また、そのときのキセノンイオンの x 軸方向への速さ v_{Bx} をもとめなさい。

図 3 に示すように、多くのキセノンイオンが $|\theta_0| < \theta_1$, $|y_{A0}| < y_{A1}$ の範囲において、角度、位置に関して一様な分布で電極 A のスリットを通過すると考える。キセノンイオンの速さは v_0 で一定とする。この時、キセノンイオンの入射方向、位置によっては電極 B に衝突する。

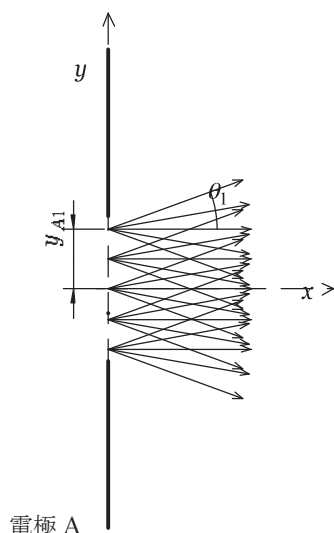


図 3

[問 4]

電極 B に衝突しないで幅 $2l$ のスリットを通るキセノンイオンの割合をもとめなさい。キセノンイオン同士の影響や衝突については無視してよい。ただし、以下の値を用い、小数点以下第 3 位を四捨五入し、第 2 位まで数値でもとめなさい。

$V = 1500\text{V}$, $v_0 = 200\text{m/s}$, $L = 2.0 \times 10^{-2}\text{m}$, $y_{A1} = 2.0 \times 10^{-4}\text{m}$, $l = 2.0 \times 10^{-4}\text{m}$, $e = 1.6 \times 10^{-19}\text{C}$, $m = 2.2 \times 10^{-25}\text{kg}$, $\theta_1 = 0.175\text{rad}$

[問 5]

電極 A のスリットに供給されたキセノンイオンのうち、電極 B にあたらないでスリットから噴射されるキセノンイオンにより推力が生まれる。また、電極 B にあたったキセノンイオンについては推力に影響しないでロケットの外に放出される。これらのキセノンイオンの平均の速さを推進剤の噴射の速さとする。このような仮定で推進力をえるロケットが問 4 までの条件で加速され、加速後の質量が静止していた時の質量の 80% となった。このときのロケットの速さをもとめなさい。解答は問 4 で与えられた数値を用い有効数字 2 桁の数値でもとめなさい。

[問6]

このイオンエンジンは電極 A のスリットに毎秒あたり最大で 0.25mg のキセノンイオンを供給できる。この時の推力をもとめなさい。解答は問4で与えられた数値を用い有効数字2桁の数値でもとめなさい。

[問7]

上記のようなイオンエンジンは、惑星探査機など宇宙空間での推進に使われることがほとんどであり、例えば地上からの打ち上げには利用できない。表を参考にこの理由を述べなさい。

表

	イオンエンジン (はやぶさ)	化学エンジン (HⅡ型ロケットの1 段目エンジン)
ロケット全体の質量	110kg	98000kg
推進剤の質量	65kg	86000kg
最大推力	算出した値を使うこと	1079kN
推進剤の噴射速さ	算出した値を使うこと	約 4km/s

平成 24 年度

千葉大学先進科学プログラム入学者選考課題

課題 II-A 解答例

H24
解答例

II-A 解答例

問 1 (1) 微分すると

$$\begin{aligned}\vec{v}_A &= (-\ell\omega \sin \omega t, \ell\omega \cos \omega t) \\ \vec{a}_A &= (-\ell\omega^2 \cos \omega t, -\ell\omega^2 \sin \omega t) = -\omega^2 \vec{r}_A\end{aligned}$$

(2) 重心から見て $\vec{v}_B = -\vec{v}_A$ であるから

$$\frac{1}{2}m|\vec{v}_A|^2 + \frac{1}{2}m|\vec{v}_B|^2 = m|\vec{v}_A|^2 = m\{(-\ell\omega \sin \omega t)^2 + (\ell\omega \cos \omega t)^2\} = m\ell^2\omega^2$$

(3) 重心の速度を (1) に加える。加速度は (1) と変わらない。

$$\begin{aligned}\text{小球 A の速度} &= (V_x - \ell\omega \sin \omega t, V_y + \ell\omega \cos \omega t) \\ \text{小球 A の加速度} &= (-\ell\omega^2 \cos \omega t, -\ell\omega^2 \sin \omega t)\end{aligned}$$

問 2 (1) $\vec{v}_A = \vec{V} + \frac{1}{2}\vec{v}$, $\vec{v}_B = \vec{V} - \frac{1}{2}\vec{v}$ である。

(2) 上式を題意の式に代入して整理すれば

$$\begin{aligned}T &= \frac{m}{2} (|\vec{v}_A|^2 + |\vec{v}_B|^2) \\ &= \frac{m}{2} \left(\left| \vec{V} + \frac{1}{2}\vec{v} \right|^2 + \left| \vec{V} - \frac{1}{2}\vec{v} \right|^2 \right) \\ &= \dots \text{計算略} \dots \\ &= m \left| \vec{V} \right|^2 + \frac{m}{4} |\vec{v}|^2\end{aligned}$$

よって $M = 2m$, $\mu = m/2$ である。

(3) $|\vec{v}|^2 = |\vec{v}_A - \vec{v}_B|^2 = \{\omega(2\ell)\}^2 = 4\omega^2\ell^2$. (B から見れば, A は, 半径 2ℓ , 角速度 ω で回転している。)

問 3 (1) 初速度を与えた瞬間において, B の初速度は 0, A の初速度は y 軸正方向に v_0 だから, 重心は y 軸正方向に速度 $v_0/2$ で運動する。それ以後 外力は働かないから, この系の重心は y 軸正方向に 速度 $v = v_0/2$ で等速直線運動する。すなわち $(X, Y) = (0, v_0 t/2)$ 。

(2) 重心から見ると, A は速度 $v_0/2$ で半径 ℓ の回転運動をしているから, 角速度は $\omega = v_0/(2\ell)$ である。

(3) $(x_A, y_A) = (\ell \cos \omega t, v_0 t/2 + \ell \sin \omega t)$ 。

問 4 (1) x 軸方向には外力は働かないから, この棒の重心は, 常に z 軸上にある。小球 A の座標を (x_A, z_A) , 小球 B の座標を (x_B, z_B) とすれば,

$$\begin{aligned}x_A &= \ell \sin \theta, \quad z_A = 2\ell \cos \theta \\ x_B &= -\ell \sin \theta, \quad z_B = 0\end{aligned}$$

である。

(2) z 軸上を落下運動する。

(3) (1) の結果より θ を消去して、軌道の方程式

$$x_A^2 + \frac{z_A^2}{4} = \ell^2$$

を得る。これは、中心が座標軸の原点、短軸半径 ℓ 、長軸半径 2ℓ の楕円である。この楕円の第 1 象限の部分が小球 A の軌跡である。

(4) 位置エネルギーは $2mgl \cos \theta$ 。

(5) 運動エネルギーは、小球 A と 小球 B の寄与を加えて、

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{dx_A}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}m\left(\frac{dz_A}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}m\left(-\frac{dx_A}{dt}\right)^2$$

これに

$$\frac{dx_A}{dt} = \ell \cos \theta \frac{d\theta}{dt}, \quad \frac{dz_A}{dt} = -2\ell \sin \theta \frac{d\theta}{dt}$$

を代入して整理すれば、運動エネルギーは

$$m\ell^2(1 + \sin^2 \theta) \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$$

となる。

(6) エネルギー保存則より

$$2mgl = 2mgl \cos \theta + m\ell^2(1 + \sin^2 \theta) \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$$

これより

$$\frac{d\theta}{dt} = \sqrt{\frac{2g}{\ell} \frac{1 - \cos \theta}{1 + \sin^2 \theta}}$$

となる。

(7) 上式に $\theta = \pi/2$ を代入すれば、

$$\frac{d\theta}{dt} = \sqrt{g/\ell}$$

であり、また速度の式を用いて

$$\frac{dz_A}{dt} = -2\ell \frac{d\theta}{dt} \sin \theta = -2\sqrt{g\ell}$$

となる。すなわち、 z 軸負方向に $2\sqrt{g\ell}$ の速さで衝突する。

(8) 運動の時間反転対称性により、小球 A はもとの位置まで上昇する。

平成 24 年度

千葉大学先進科学プログラム入学者選考課題

課題 II-B 解答例

H24
解答例

II-B 解答例

出題意図：気体の状態方程式，熱力学第一法則などの理解度を調べる。教科書で簡単に触れられている水の状態変化についての設問も加えた。また，グラフを作成したり，電卓を使って方程式の解の近似値を求めたりすることができるかどうかについても検査できる問題にした。

問1 (1) $m_W = 1.80 \times 10^{-2} \text{kg}$

(2) $\rho_W S h_0 = n_W m_W$ より

$$h_0 = \frac{n_W m_W}{\rho_W S}$$

(3) $p_0 S h_1 = n_0 R T_0$ より

$$h_1 = \frac{n_0 R T_0}{p_0 S}$$

問2 (1) ピストンが Δh だけ持ち上がったとすると

$$W = p_0 S \Delta h = n_0 R (T_1 - T_0)$$

(2) 気体の水から得た熱が気体の内部エネルギー増加と外部にした仕事に使われるから，

$$Q = n_0 C_V (T_1 - T_0) + W$$

前問の結果を用いると $Q = n_0 (C_V + R) (T_1 - T_0)$

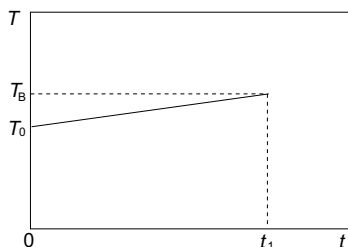
(3) 加熱開始後，時間 t の間にヒーターから加えられる熱量は qt ，これが水および気体の内部エネルギー増加と気体がした仕事になるから

$$qt = n_W C_W (T - T_0) + n_0 (C_V + R) (T - T_0)$$

よって

$$T = T_0 + \frac{qt}{n_W C_W + n_0 (C_V + R)}$$

水温変化のグラフは以下のようになる。



(4) 前問で $T = T_B$ において t を求めることにより,

$$t_1 = \frac{1}{q} [n_W C_W + n_0 (C_V + R)] (T_B - T_0)$$

問3 (1) 1 モル蒸発させるのに L_0 の熱量が必要だから

$$t_2 = t_1 + \frac{n_W L_0}{q}$$

(2) n_W モルの水が水蒸気になることによるピストンの高さの変化 $\Delta h'$ は、高さ h_0 までの部分を占めていた水がすべて蒸発することを考慮すると

$$\Delta h' = \frac{n_W R T_B}{p_0 S} - h_0$$

したがって、ピストンがする仕事は

$$W_B = p_0 S \Delta h' = n_W R T_B - \frac{p_0}{\rho_W} n_W m_W$$

問4 各温度での $\log_{10}(T/T_B)$, $\log_{10}(p_A/p_0)$ を計算すると

T/T_B	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6
$\log_{10}(T/T_B)$	-0.097	0.0	0.079	0.146	0.204
$\log_{10}(p_A/p_0)$	-1.45	0.0	0.97	1.66	2.18

グラフはグラフ用紙に記入した。

問5 (1) 問1 より

$$\frac{h_1}{h_0} = \frac{n_0}{n_W} \frac{\rho_W R T_0}{p_0 m_W} = \frac{1}{10} \frac{1.0 \times 10^3 \times 0.8 \times 373}{1.013 \times 10^5 \times 0.018} \times 8.314 = 136$$

(2) 気体の温度 T と圧力 p の関係は, $p_0 S h_1 = n_0 R T_0$, $p S h_1 = n_0 R T$ より

$$\frac{p}{p_0} = \frac{T}{T_0}$$

$$\log_{10} \frac{p}{p_0} = \log_{10} \frac{T}{T_0} = \log_{10} \frac{T}{T_B} + \log_{10} \frac{T_B}{T_0} = \log_{10} \frac{T}{T_B} + \log_{10} \frac{1.0}{0.8}$$

したがって

$$\log_{10} \frac{p}{p_0} = \log_{10} \frac{T}{T_B} + 0.097$$

このグラフもグラフ用紙に記入した。

(3) $p = p_A$ より

$$\log_{10} \frac{T}{T_B} + 0.097 = -5.80 \left(\frac{T_B}{T} - 1 \right)$$

グラフより、この解（グラフの交点）は $T = T_B$ に近いから $x = \delta T_B / T_B$ とおくと $|x| \ll 1$ 。このとき、 $\log_e(1+x) \simeq x$ だから

$$\text{左辺} = \log_{10}(1+x) + 0.097 \simeq \frac{x}{\log_e 10} + 0.097 = 0.434x + 0.097$$

$$\text{右辺} = -5.80 \left(\frac{1}{1+x} - 1 \right) \simeq -5.80(1-x-1) = 5.80x$$

左辺=右辺より $0.434x + 0.097 = 5.80x$ これを解くと

$$x = \frac{0.097}{5.366} = 0.018$$

$$\delta T_B = T_B \times x = 373 \times 0.018 = 6.7\text{K} \simeq 7\text{K}$$

- (4) 水の一部分が蒸発すると気体部のモル数が増える。水の体積は気体部の体積の1%以下なので水が蒸発して液体部の体積が減少することによる気体部の体積増加は無視でき、蒸発によって気体部のモル数が増えた分だけ圧力が増える。このため、同じ温度で蒸発がない場合に比べて圧力が高くなる。この圧力と温度の関係をグラフ用紙に点線で記入した。
- (5) 水が沸騰すると気体部の圧力が上昇し、沸点が高くなる。加熱が続いているため水はさらに蒸発して圧力、沸点ともに高くなる。このようにして問4の曲線に沿って温度、圧力が上昇していく。
- (6) 水が蒸発し終わったとき

$$(n_0 + n_W)RT'_2 = p'_2 Sh$$

他方

$$n_0 RT_0 = p_0 Sh_1$$

したがって

$$\frac{n_0 + n_W}{n_0} \frac{T'_2}{T_0} = \frac{p'_2}{p_0} \frac{h}{h_1}$$

$$n_W/n_0 = 10, \quad h_1/h_0 = 136 \text{ より}$$

$$\frac{p'_2}{p_0} = \frac{136}{137} \times 11 \frac{T'_2}{T_0} = 10.9 \frac{T'_2}{T_0}$$

よって

$$\log_{10} \frac{p'_2}{p_0} = \log_{10} \frac{T'_2}{T_B} + \log_{10} \frac{T_B}{T_0} + \log_{10} 10.9 = \log_{10} \frac{T'_2}{T_B} + 1.134$$

$$p'_2 = p_A \text{ より}$$

$$\log_{10} \frac{T'_2}{T_B} + 1.134 = -5.80 \left(\frac{T_B}{T'_2} - 1 \right)$$

グラフより、この解は $\log_{10}(T'_2/T_B) \simeq 0.1$ したがって $T'_2/T_B \simeq 1.26$ 付近にあることがわかる。 T'_2/T_B の値が 1.25, 1.26, 1.27, 1.28 の場合を調べてみると

T'_2/T_B	1.25	1.26	1.27	1.28
$\log_{10}(p'_2/p_0)$	1.231	1.234	1.238	1.241
$\log_{10}(p_A/p_0)$	1.16	1.20	1.23	1.27

これより $T'_2/T_B = 1.27 \pm 0.01$, $\log_{10}(p'_2/p_0) = 1.24 \pm 0.01$

問6 (1) 水が全て蒸発した後の圧力 p' と温度 T' の関係は

$$p'Sh = (n_0 + n_W)RT'$$

他方

$$p'_2Sh = (n_0 + n_W)RT'_2$$

だから

$$\frac{p'}{p'_2} = \frac{T'}{T'_2}$$

これより

$$\frac{p'}{p'_2} = \frac{1.50T_B}{1.27T_B} = 1.18$$

したがって

$$\log_{10}\left(\frac{p'}{p_0}\right) = \log_{10} 1.18 \frac{p'_2}{p_0} = \log_{10} 1.18 + 1.24 = 1.31$$

(2) 断熱膨張中は $pV^\gamma = \text{一定}$ より $p^{1-\gamma}T^\gamma = \text{一定}$, よって

$$p \propto T^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

$\gamma = 4/3$ のとき, $p \propto T^4$ 。この関係をグラフにした。

(3) 前問より

$$\log_{10} \frac{p}{p'} = 4 \log_{10} \frac{T}{T'}$$

よって

$$\log_{10} \frac{p}{p_0} - \log_{10} \frac{p'}{p_0} = 4 \left(\log_{10} \frac{T}{T_B} - \log_{10} \frac{T'}{T_B} \right)$$

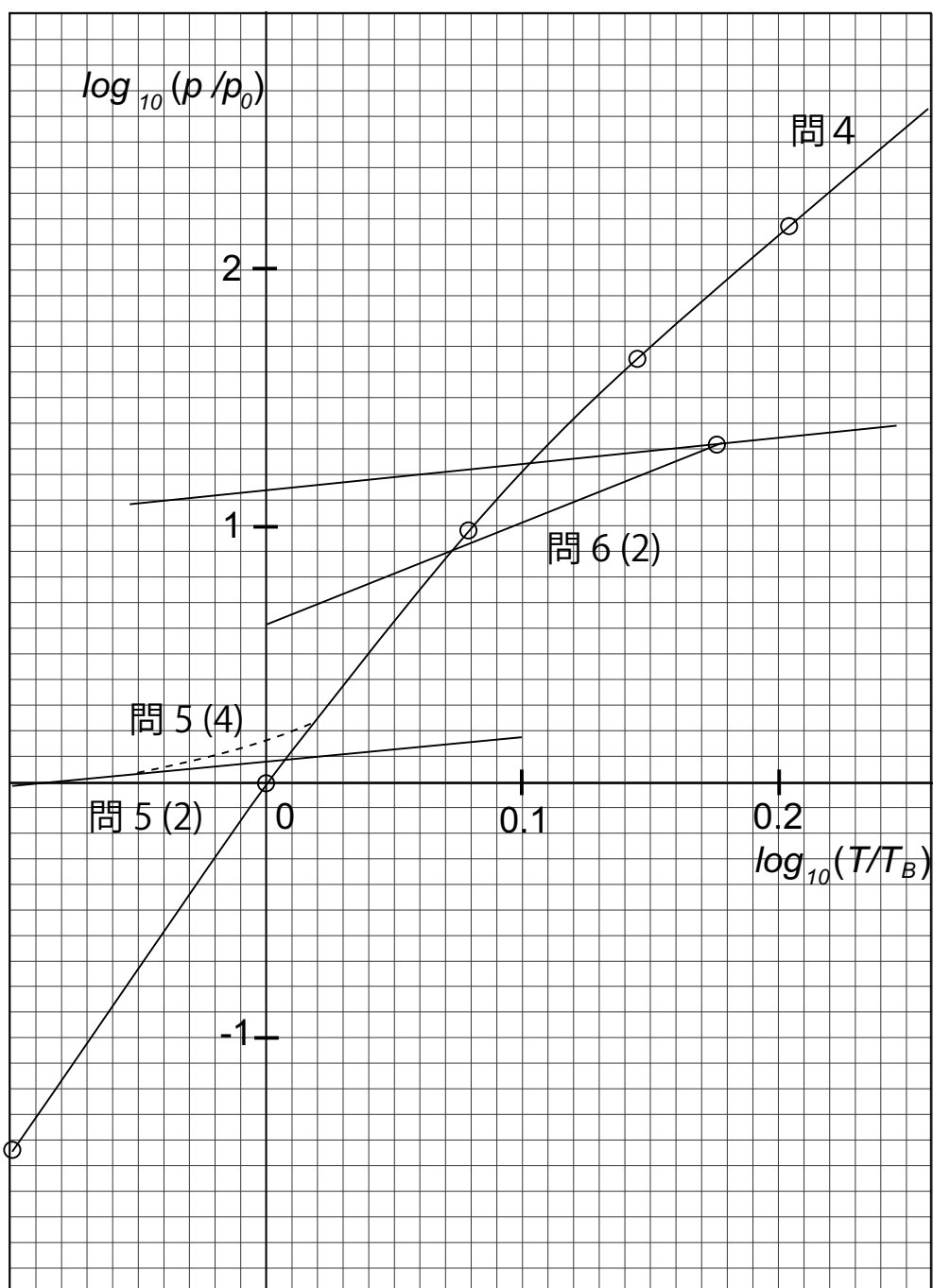
p', T' の値を代入すると

$$\log_{10} \frac{p}{p_0} = 4 \log_{10} \frac{T}{T_B} + 0.61$$

グラフより $\log_{10}(T/T_B) \simeq 0.08$ だから $T/T_B \simeq 1.2$ 程度。そこで, $T/T_B = 1.17, 1.18, 1.19, 1.20$ の場合を調べると

T/T_B	1.17	1.18	1.19	1.20
$\log_{10}(p/p_0)$	0.883	0.898	0.912	0.927
$\log_{10}(p_A/p_0)$	0.843	0.885	0.926	0.966

したがって, $1.18 < T_3/T_B < 1.19$ 。よって $440\text{K} < T_3 < 444\text{K}$ 。 $T_3 \simeq 442\text{K}$ 。



H24
解答例

平成 24 年度

千葉大学先進科学プログラム入学者選考課題

課題 II-C 解答例

H24
解答例

II-C 解答例

[問 1]

短い時間 Δt に ΔM の推進剤を噴射し、噴射方向とは反対向きに速さ Δv 変化したと考えると、運動量保存則から

$$M\Delta v = \Delta M u$$

$$\Delta v = \frac{\Delta M u}{M}$$

$$F = \frac{M\Delta v}{\Delta t} = \frac{\Delta M}{\Delta t} u$$

[問 2]

(1) n 回目までの噴射量は

$$\sum_{k=1}^n \Delta M_k = \sum_{k=1}^n M_0 (1-s)^{k-1} s = M_0 \frac{1-(1-s)^n}{1-(1-s)} s = M_0 \{1-(1-s)^n\}$$

(2) n 回目噴射時の運動量保存則は

$$\{M_0 - M_0 \{1-(1-s)^n\}\} \Delta v_n = M_0 (1-s)^{n-1} s \cdot u$$

$$\Delta v_n = \frac{s}{1-s} u$$

(3) ロケットの質量が $M_0 \cdot r$ となる、すなわち $M_0 \cdot (1-r)$ 燃料を噴射するまでに必要な燃料の噴射回数は、 n 回目までの噴射量から

$$M_0 (1-r) = M_0 \{1-(1-s)^n\}$$

$$r = (1-s)^n$$

$$n = \log_{1-s} r = \frac{\log_e r}{\log_e (1-s)}$$

(4)

$$v = \sum_{k=1}^n \Delta v_k = \sum_{k=1}^n \frac{s}{1-s} u = \frac{s}{1-s} u n = \frac{s}{1-s} u \frac{\log_e r}{\log_e (1-s)}$$

(5)

$$v = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{1-s} u \frac{\log_e r}{\log_e (1-s)} = -u \log_e r$$

[問 3]

(1)

電極 A, B の間では電界の強度が V/L 、従って加わる力は Ve/L

$$\text{従って } a_x = \frac{Ve}{Lm}$$

H24
解答例

(2)

t 秒後の速度と位置は

$$v_x = v_0 \cos \theta_0 + \frac{Ve}{Lm} t \doteq v_0 + \frac{Ve}{Lm} t$$

$$v_y = v_0 \sin \theta_0 \doteq v_0 \theta_0$$

$$x \doteq v_0 t + \frac{Ve}{2Lm} t^2$$

$$y \doteq v_0 \theta_0 t + y_{A0}$$

(3)

$x = L$ となるときの t を求める

$$x \doteq v_0 t + \frac{Ve}{2Lm} t^2 = L$$

$$t = \frac{-v_0 \pm \sqrt{v_0^2 + 2 \frac{Ve}{m}}}{\frac{Ve}{Lm}}$$

正になるはずなので

$$t = \frac{-v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2 \frac{Ve}{m}}}{\frac{Ve}{Lm}}$$

代入して

$$y_B = v_0 \theta_0 \frac{-v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2 \frac{Ve}{m}}}{\frac{Ve}{Lm}} + y_{A0}$$

v_{Bx} は

$$v_{Bx} = v_0 + \frac{Ve}{Lm} \frac{-v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2 \frac{Ve}{m}}}{\frac{Ve}{Lm}} = \sqrt{v_0^2 + 2 \frac{Ve}{m}}$$

H24
解答例

[問4]

問3より

$$y_B = v_0 \theta_0 \frac{-v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2 \frac{Ve}{m}}}{\frac{Ve}{Lm}} + y_{A0}$$

スリットを通る条件は

$$-l < y_B = v_0 \theta_0 \frac{-v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2 \frac{Ve}{m}}}{\frac{Ve}{Lm}} + y_{A0} < l$$

$$-l + y_{A0} < -v_0 \frac{-v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2 \frac{Ve}{m}}}{\frac{Ve}{Lm}} \theta_0 < l + y_{A0}$$

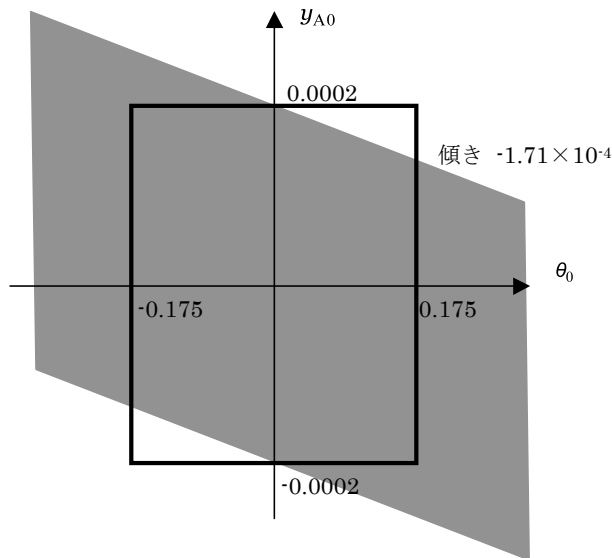
値を入れて計算すると

$$y_{A0} - 0.0002 < -1.71 \times 10^{-4} \theta_0 < y_{A0} + 0.0002$$

θ_0 を横軸, y_{A0} を縦軸として上記の範囲を図示すると網掛けの範囲。

これに対して, 入射するイオンの範囲は図中の太線の枠内

この枠内の面積に対する網掛け部分の割合がスリットを通るイオンの割合となる。



全体の面積 $A = 0.175 \times 2 \times 0.0002 \times 2$

網掛けのない部分の面積 $B = 2 \times \frac{1}{2} \times 1.71 \times 10^{-4} \times 0.175 \times 0.175$

$$B/A = 0.0374$$

従って通過する割合は 0.9626

四捨五入して 0.96

[問 5]

問 3 より

電極 B に衝突しないでスリットを通るキセノンイオンの x 軸方向への速さ v_{Bx} は θ_0 に依存しない ($\cos \theta_0 \approx 1$ と近似している) ので, 実際の値を入れて計算すると

$$v_{Bx} = 46.7 \text{ km/s}$$

電極 B にあつたキセノンイオンは推力に影響しないことから, 速さの平均値 $\overline{v_{Bx}}$ は $\overline{v_{Bx}} = 46.7 \times 0.9626 + 0 \times 0.0374 \approx 44.9$

問 2 より $v = -u \log r$

速さの平均値 $\overline{v_{Bx}} = u = 44.9 \text{ km/s}$

全質量のうち 20% を使うので, 値をいれて

$$v = -44.9 \log 0.8 \approx 10019 \text{ m/s}$$

四捨五入して

$$v \approx 10 \text{ km/s}$$

[問 6]

問 1 から

$$F = \frac{\Delta M}{\Delta t} u = 250 \times 10^{-9} \times 44900 \approx 0.0113$$

四捨五入して 11 mN

[問 7]

イオンエンジンは推進剤を高速に噴射するため, 少ない燃料で高速に加速できる。しかし, 単位時間における推進剤の使用量が小さい。その結果推力が小さいため地上では浮上できない。しかし, 無重力空間では加速に時間がかかっても問題ないため, 少ない推進剤でより効率的に加速できるイオンエンジンが使われる。

H24

解答例

平成 23 年度

千葉大学先進科学プログラム入学者選考課題

課題論述

実施時間 [9:00－17:00]

課題 II-A, II-B

(10:00－15:30)

注意事項

課題Ⅱには、[Ⅱ－A]、[Ⅱ－B]、[Ⅱ－C]、[Ⅱ－D]の4題があります。
志望するコースによって、次に示す問題を解答してください。

- ・物理学コース、フロンティアテクノロジーコース：
[Ⅱ－A]、[Ⅱ－B]の両方を解答してください。
- ・人間探求コース：
[Ⅱ－A]、[Ⅱ－B]、[Ⅱ－C]、[Ⅱ－D]の中から2題を選択して解答してください。

[II-A]

水面に物体を投げ入れたり，水滴が水面に落下したときに，耳に聞こえる音が発生する。音の発生源は何であろうか。水滴が水面に落下した直後の様子を捉えた写真（図1）を見ると，このとき水面下に直径数ミリメートルの気泡が発生しているのがわかる。気泡はばねのような弾性をもつクッションの役割をするので，周囲の水が気泡へ近づいたり遠ざかったりしながら気泡は収縮と膨張を繰り返して振動し，音として聞こえると考えられる。水中の気泡による水滴音の発生について考えてみよう。

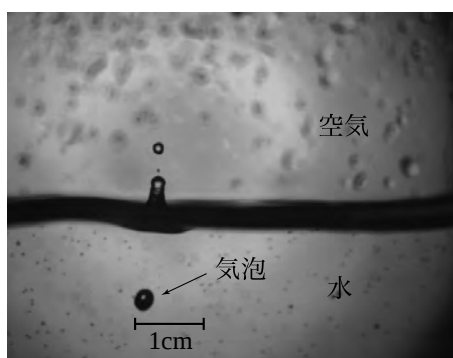


図 1

【問1】 はじめに，図2のような，なめらかな水平面上での，ばねとおもりによる単振動を考えよう。ばねの自然の長さを ℓ_0 ，ばね定数を k ，単振動の振幅を A ，角振動数を ω ，おもりの質量を m として，以下の設問に答えなさい。

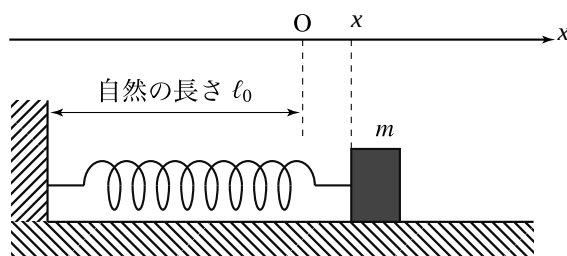


図 2

- (a) おもりの運動エネルギー E_K の最大値 $E_{K,\max}$ と， E_K が最大となるおもりの位置 x を， A, m, ω, ℓ_0 のうち必要なものを使って表しなさい。

- (b) ばねの弾性力による位置エネルギー E_P の最大値 $E_{P,\max}$ と、 E_P が最大となるときのおもりの位置 x を、 A, k, ℓ_0 のうち必要なものを使って表しなさい。
- (c) 単振動のエネルギー E_T を、 A, m, ω を使って表しなさい。
- (d) 単振動のエネルギー E_T とおもりの運動エネルギーの最大値 $E_{K,\max}$ 、弾性力による位置エネルギーの最大値 $E_{P,\max}$ の間の関係を表しなさい。

問1の問題はここまで。以下の問2と問3は、どちらから解くこともできる。

【問2】 気泡は球形であると仮定し、図3のように1つの気泡が無限に広い水中に置かれているものとする。ここでは、気泡が球形を保ったまま膨張と収縮を繰り返すような体積振動を考える。すなわち、気泡半径 R と時間 t との関係が、 $R = R_0 + x(t)$, $x(t) = A \sin \omega t$ で与えられる単振動を考え、減衰はないとする。ここで、 R_0 はつり合いの状態での気泡半径、 A は振幅、 ω は角振動数で、いずれも定数である。ただし振幅 A は気泡半径 R_0 に対して微小であり、 $\frac{A}{R_0} \ll 1$ が成り立つものとする。

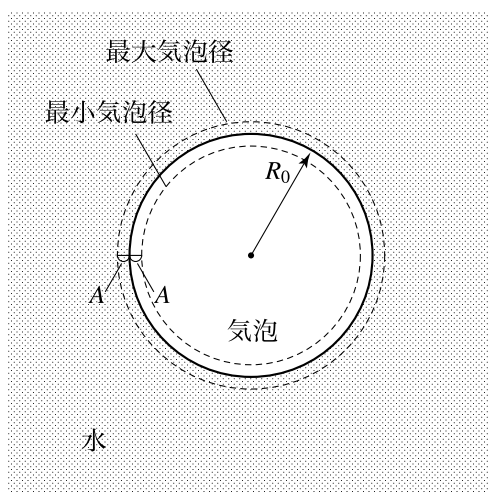
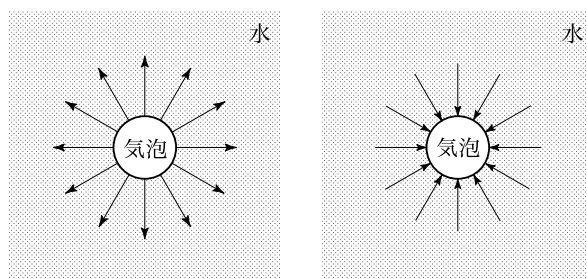


図3

気泡の膨張・収縮に伴い、周囲の水には図4のような流れが生じる。流れの方向は放射状なので、ある瞬間の流れの速さは気泡中心からの距離 r だけに依存する。以下の設問に答えなさい。ただし、水は縮まないと考えてよく、水の密度 ρ は一定であるとする。



気泡膨張時の流れ

気泡収縮時の流れ

図 4

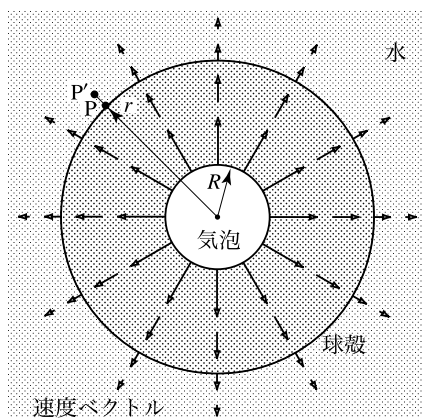


図 5

- (a) 図 5 に示すような、時刻 t に任意の半径 r の球殻上にある点 P を目印とする。時刻 t における点 P の位置での流れの速度を v とするとき、点 P は、微小時間 Δt 後にどこに移動するか。移動先の点 P' の半径 r' を、 $r, v, t, \Delta t$ の中から必要なものを用いて表しなさい。
- (b) 時刻 t における気泡表面 ($r = R$) での水の速度 $v_R = \frac{dR}{dt}$ を、 $R, A, \omega, t, \Delta t, \sin \omega t, \cos \omega t$ の中から必要なものを用いて表しなさい。
- (c) 点 P より内側にある水の質量が移動の前後で変化しないことに注意して、点 P の動く速度 v を $R, r, A, \omega, \sin \omega t, \cos \omega t$ の中から必要なものを用いて表しなさい。ただし、 Δt の 2 次以上の項は省略して考えてよい。

- (d) 位置 r における単位体積あたりの水の運動エネルギーは、(c)で求めた水の速度 v を使って、 $\frac{1}{2}\rho v^2$ と書ける。また、半径が r から $r+dr$ に含まれる体積は、 $4\pi r^2 dr$ である。したがって、図5のような気泡表面と気泡中心から半径 $a (> R)$ の球殻に挟まれた領域の水の運動エネルギーは、

$$\int_R^a \frac{1}{2} \rho v^2 4\pi r^2 dr$$

のように書ける。ここでは、水は無限に広がっているから、全領域の水の運動エネルギー E_K は、この積分の計算結果に対して $a \rightarrow \infty$ とすることにより求めることができる。全領域の水の運動エネルギーを(b)で求めた気泡表面の速度 $\frac{dR}{dt}$ を使って t だけの関数 $E_K(t) = \frac{1}{2} M \left(\frac{dR}{dt} \right)^2$ と書いたとき、 M を ρ, R を用いて表しなさい。

【問3】 気泡のばねとしてのはたらきについて、次のような実験で考えよう。

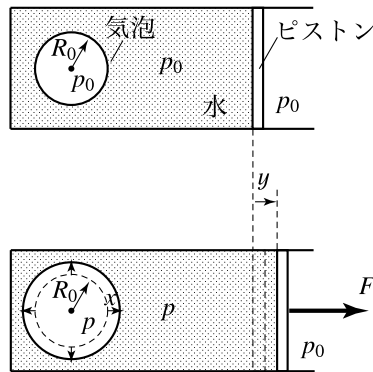


図 6

図6のような水を満たした円筒容器の中に球形気泡が1つだけ入っている。ピストンの断面積は S で、ピストンは自由に動けるものとする。ピストンの外側からは p_0 の圧力が常にはたらいており、このとき自然の状態での気泡の半径は R_0 である。図6のようにピストンに力 F を加えたところ、ピストンが y だけずれてつり合った。このとき気泡の半径は x だけ増加し、気泡の圧力は p になった。以下の設問に答えなさい。ただし、この状態では気泡内外の圧力は一樣で、表面張力や重力による圧力の変化は考えなくてよい。気泡の膨張・収縮の過程では、周囲の流体との熱のやり取りはなく断熱変化しているので、

圧力 p と気泡体積 V の間には,

$$pV^\gamma = \text{一定}$$

の関係が成り立つ。ここで γ は比熱比と呼ばれる。

- (a) ピストンにはたらく力のつり合いの式を F, p_0, p, S を用いて表しなさい。
- (b) 気泡内部の圧力 p を, γ, p_0, R_0, x を用いて表しなさい。
- (c) ピストンの移動量 y と気泡半径の増加量 x の関係を求めよう。ピストンの移動前の気泡の体積 V_0 と移動後の気泡の体積 V の比 $\frac{V}{V_0}$ を y および x を使ってそれぞれ表し比較することによって, y を R_0, S, x を用いて表しなさい。ただし, 水は縮まないと考えてよく, 水の体積は一定としてよい。また, $\left|\frac{x}{R_0}\right| \ll 1$ のとき $\left(1 + \frac{x}{R_0}\right)^n \approx 1 + n\frac{x}{R_0}$ (n は正負の実数) を用いてよい。
- (d) (b) と (c) の結果から, ピストンに加えた力 F とピストンの移動量 y の関係を求め, ばね定数 k の値を p_0, γ, R_0, S を使って表しなさい。
- (e) (d) で求めたばね定数 k を使って気泡の弾性力による位置エネルギー E_P を求めなさい。また, この E_P を, $E_P = \frac{1}{2}k'x^2$ のように x の式で表したときの k' を求めなさい。

【問4】 問2で求めた水の運動エネルギーと, 問3で求めた気泡の弾性力による位置エネルギーの関係を考えて, 気泡の振動数を求めてみよう。以下の設問に答えなさい。ただし, 空気の運動エネルギーは無視してよい。

- (a) 力学的エネルギーの保存を考えて, 気泡の振動数を R_0, p_0, γ, ρ を用いて表しなさい。
- (b) つり合いの状態での気泡周囲の圧力 p_0 は1気圧 $= 10^5 \text{ Pa}$, このときの気泡の直径を 3.0 mm とする。この気泡の振動数はいくらか。ただし, 空気の比熱比 $\gamma = 1.4$, 水の密度 $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ である。

[II-B]

諸君は天体望遠鏡で星を見たことがあるだろうか。中でも、輪を持つ土星などを見てその美しさに感動した経験のある人も多いのではないだろうか。さて、夜空には自ら光を放って輝く恒星が無数にあるが、これを天体望遠鏡で拡大して見るとその星の形は見えるのだろうか。

地球に比較的近い距離にある明るい恒星として、おおいぬ座のシリウスがある。シリウスは地球から 8.6 光年の距離にあり、その直径は太陽の約 1.7 倍の $2.4 \times 10^9 \text{ m}$ であるという。なお、1 光年の距離とは $9.5 \times 10^{15} \text{ m}$ である。

問1 天文学では、ある天体を観測したときの見かけの大きさを「視直径」と呼んで、図1のように角度の単位で表す。シリウスの視直径をラジアン単位で有効数字2桁で求めなさい。また、シリウスの視直径は、1.0 km 先に置いたどの程度の大きさの物を見ることに相当するのか答えなさい。



図1

問1で確認したように、シリウスの視直径はあまりに小さく、現代の高性能な望遠鏡を用いてもその形を直接観察することはできないという。以下では、別のやり方で恒星の視直径を測定する方法について考察を進めよう。

光は電磁波の一種であるので波としての性質を持っている。まず基本的な波の性質である「干渉」について考えよう。図2のように、大きさの無視できる点光源から波長 λ の光が発せられ、間隔 d の複スリットを通り、スリットから十分に離れた距離 l にあるスクリーン上に明暗の縞模様を作っている。なお、 $d \ll l$ とする。

問2 スクリーン中央の、最も明るい点の位置を $x=0$ とすると、そのすぐ側で初めて暗くなる位置 x_1 を求めなさい。ただし、 $x_1 > 0$ とする。

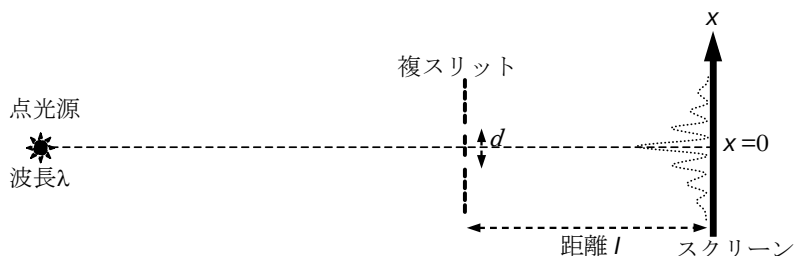


図 2

次に、図 3 のように複スリットから十分遠方に、明るさが同じである 2 つの点光源を置いた。このときスリット側から見た 2 つの点光源のなす角を α とする。ただし、角 α は微小で $\alpha \ll 1$ である。また光源の波長はどちらも同じ λ とする。スクリーンには点光源 1 および点光源 2 からの光が届く。はじめに、 $\alpha=0$ とすると、問 2 と同じ明暗の縞模様がスクリーンに現れていた。つぎに、角度 α を少しずつ増やしていくと、明暗の縞がはっきりしなくなった。

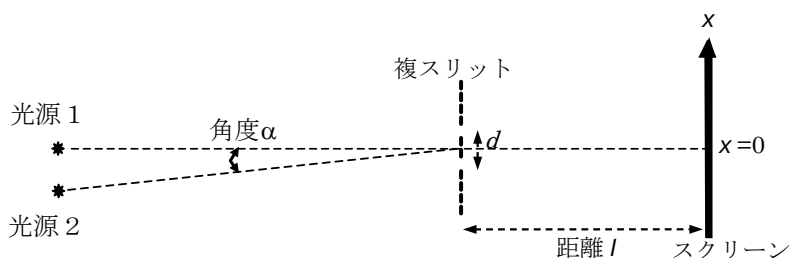
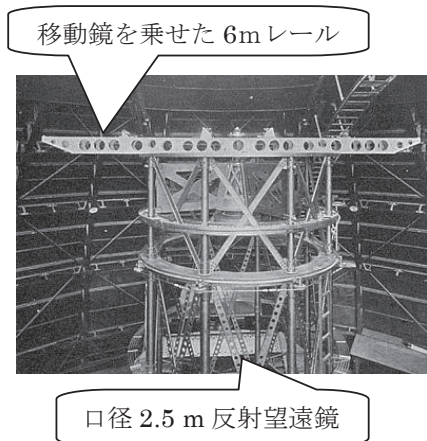


図 3

問 3 このとき、なぜ明暗がはっきりしなくなるのか、必要ならば図やグラフなどを用いて説明しなさい。また、明暗がはっきりしなくなったときの角度 α が $\alpha d = \lambda/2$ と表されることを示しなさい。

1920 年、マイケルソンとピーズらは光干渉を利用して、恒星の視直径を初めて測定した。彼らは天体望遠鏡（口径 2.5 m）の先端に図 4 のような長さ 6 m のレールを取り付け、レール上をなめらかに動く移動鏡 2 枚（鏡 1、鏡 2）とレールに固定された固定鏡 2 枚を用いて星からの光を鏡 1 と鏡 2 の 2 ヶ所から望遠鏡に取り入れ、望遠鏡の反射鏡により観測面に光を集めて星像を観察した。



著作権上の理由により掲載できません。

図4 マイケルソンの干渉計の写真（左），およびその概略図（右）

はじめに，移動鏡（鏡1と鏡2）の間隔 L を狭めて配置した。このとき鏡1，鏡2から入った光は観測面に集光されて点状の像になるが干渉により図5(a)のように明暗の縞模様が観測される。次に，鏡1，鏡2を動かして間隔 L を大きくすると，縞模様は図5(b)のように次第にはっきりしなくなり，間隔 L_0 のときには縞模様は図5(c)のようにほぼ消失した。マイケルソンらは，恒星は大きさのない点光源ではなく，地球から見て視直径 α の角度の範囲に光源が広がっているため，移動鏡の距離 L を大きくすると 図4にあるように，2つの鏡に光が到着するまでに道筋が最大 $L\alpha$ だけ異なるため，干渉が消失するものと考えた。

著作権上の理由により掲載できません。

図5 移動鏡の間隔 L を変えたときの観測面での星像の変化の様子。
(a) L が小さいとき。(b) L を少し広げたとき。(c) さらに L を広げて，はじめて干渉縞が消失した $L=L_0$ のとき。

以下では、問3で行った解析をもう少し発展させて、視直径 α の広がりをもつ光源からの干渉について考えてみよう。なお、考察を簡素化するために、光源はスクリーンの x 軸に平行な直線状のものとして取り扱うことにする。

図6のように、十分遠方にある、視直径 α の範囲に直線状に並んだ無数の点光源から均一に波長 λ の光が発せられ、複スリットに届いているものとする。図6および拡大図7に示す角度 θ の方向（ただし $|\theta| \leq \alpha/2$ ）からやって来る光（電磁波）のうち、スリットA、Bを通過した光のスクリーン上の位置 x における電場の強さをそれぞれ、 $E_{A,\theta}(x)$ 、 $E_{B,\theta}(x)$ と表記する。光源から図7のようにスリットBを通過してスクリーン上の位置 x に届いた光の電場を $E_{B,\theta}(x) = \sin(\omega t - k l_B)$ と表すものとする。ここで、 l_A 、 l_B は各スリットと位置 x との距離、 ω は電磁波の角振動数、 $k=2\pi/\lambda$ である。

問4 このとき、もう一方のスリットAを通過してスクリーン上の位置 x に届いた光の電場 $E_{A,\theta}(x)$ を求めなさい。なお、光源とスリットA、Bとの距離は $d \sin \theta$ だけ異なっていることに注意しなさい。

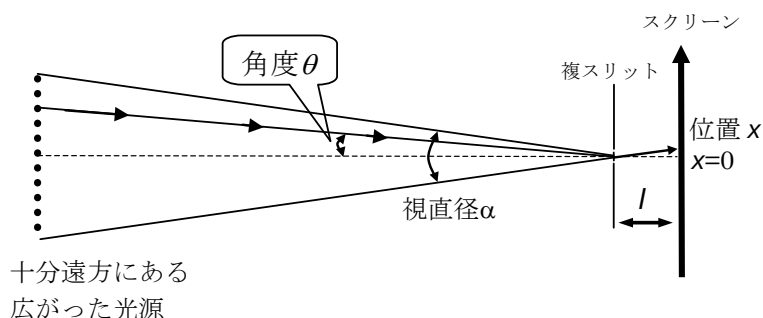


図6

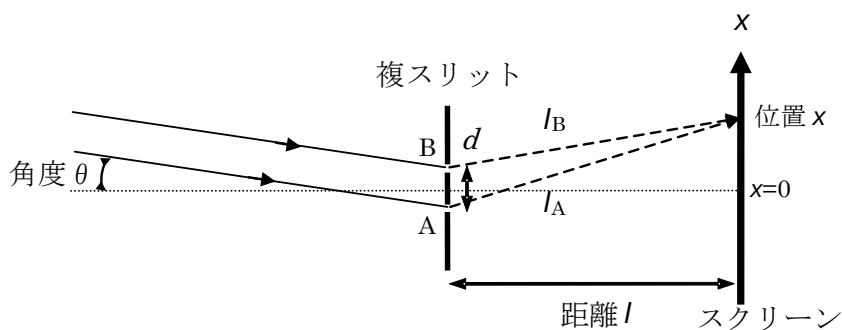


図7： 上図（図6）の複スリットおよびスクリーン付近の拡大図

- 問5 問4の結果をもとにして、角度 θ の方向から来て複スリットに入射した光のスクリーン上の位置 x での電場 $E_{A,\theta}(x) + E_{B,\theta}(x)$ が以下の式(1)

$$E_{A,\theta}(x) + E_{B,\theta}(x) \approx 2 \sin\left(\omega t - \frac{k}{2}(2l + \theta d)\right) \cos\left(\frac{kd}{2}\left(\frac{x}{l} + \theta\right)\right) \quad (1)$$

で表わされることを示しなさい。ただし、角度 θ は微小であるので $\sin\theta \approx \theta$ としてよい。また、スクリーン上の位置 x も原点付近だけを考えることとして、 $I_A + I_B \approx 2I$ と近似して計算しなさい。なお、必要なら三角関数の公式

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2 \sin\frac{1}{2}(\alpha + \beta) \cos\frac{1}{2}(\alpha - \beta)$$

を用いてもよい。

- 問6 光の強度とは電場の二乗を時間的に平均した量である。問5の式(1)をもとにして、角度 θ の方向から来て複スリットに入射した光によるスクリーン上の位置 x での光の強度 $I_\theta(x)$ を求めなさい。

- 問7 視直径 α の広がりを持つ光源からの光が、複スリットを通過してスクリーン上の位置 x に作る光の強度は、問6で求めた光の強度 $I_\theta(x)$ を角度 θ について $-\alpha/2 \leq \theta \leq \alpha/2$ の範囲で積分することにより求めることができる。ただし、視直径 α の大きさによらず光量を一定にするために、積分結果を視直径 α で割算した、スクリーン上の位置 x における光の強度の分布

$$I(x) = \frac{1}{\alpha} \int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} I_\theta(x) d\theta$$

を求めなさい。

- 問8 問7で求めたスクリーン上の光の強度の分布 $I(x)$ を、視直径 α の値が 0 , $\frac{\lambda}{2d}$, $\frac{\lambda}{d}$ の3通りの場合についてグラフに書き、干渉による明暗の縞が消失する条件を求めなさい。必要なら、 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ を用いてもよい。

問 9 マイケルソンらはオリオン座のベテルギウスの視直径の観測に成功した。ベテルギウスの光の波長を $\lambda=570 \text{ nm}$ とする。図 4 の移動鏡の間隔を次第に広げていくと、 $L_0=3.0 \text{ m}$ のときに干渉縞がはじめて消失した。問 8 の結果を用いてベテルギウスの視直径[ラジアン]を有効数字 2 桁で求めなさい。

問 10 マイケルソンらによる光の干渉を用いた恒星の視直径の測定において、できるだけ小さな視直径の恒星を観測するためにはどのようにすれば良いか答えなさい。また、実際には様々な問題が生じることが予想される。どのような理由で視直径の観測が困難になると考えられるのか説明しなさい。

参考文献：

図の一部は Eugen Hecht 著 「ヘクト光学」 III 現代光学
(尾崎義治、朝倉利光訳) 丸善 より一部改修して転載。
天体干渉計の写真は G.E. Hale 著 The New Heavens より転載。

参考： 現代のハッブル宇宙望遠鏡や、すばる望遠鏡などの特別の工夫を施した高い分解能を誇る望遠鏡をもってしても、形状（視直径）が直接観測可能な星は、ベテルギウスなどの視直径の大きな恒星に限られている。一方で、1950 年代には干渉を用いた星の視直径の計測法が大きく進歩し、マイケルソンらが行ったベテルギウスの視直径の約 100 分の 1 の天体までも測定が可能となり、その観測結果は天文学の進歩に貢献している。

平成 23 年度

千葉大学先進科学プログラム入学者選考課題

課題 II-A 解答例

H23

解答例

【出題のねらい】

ばねとおもりによる振動のモデルを使って、水中の気泡の発する音を考える問題です。なぜ水滴が水面に落下したときに澄んだ高い音が出るか、という問題は、古くから多くの人の興味を引きつけてきました（例えば、ロゲルギスト著「第四 物理の散歩道」岩波書店 1969, 「水玉の物理」 p.110～p.133）。この問題で導出した式と導出方法は、1933年に発表された気泡の振動に関する次の論文に基づいています。

Minnaert M: On musical air-bubbles and sounds of running water, *Phil. Mag* 16 (1933), 235–248.

気泡の振動現象をばねとおもりによる振動として見たときに、おもりに相当するのは周囲の水です。コイル状のばねや小物体としてのおもりと実際の気泡の振動現象とは見かけは異なっていますが、現象そのものや現象を表す式は共通です。このような発想は、高校生には馴染みがないかもしれませんが、これから物理や工学を学んでいく上で非常に大切な考え方です。例えば他にも、気泡の膨張・収縮過程で周囲の水に誘起する流れのパターンは、点電荷のつくる電場と共通です。電気力線を流線と対応させて考えることによって、いくつかの重要な事柄を知ることができます。

この問題では、自然科学の大原理であるエネルギー保存則と質量保存則に基づいて考察を進めて行きます。気泡の弾性力による位置エネルギーは、周囲の水の運動エネルギーにすべて使われるので、水の運動エネルギーが角振動数 ω の関数として書ければ、気泡の振動数すなわち気泡の発生する音の周波数がわかるというのが考え方の筋道です。実際の気泡の振動では、球形を保ったまま体積が変化するような振動（呼吸振動、0次モード）の他に、気泡表面の形状が時間的に変化するような振動（形状振動、高次モード）もありますが、ここでは0次モードの振動（澄んだ音）を考えます。水の運動エネルギーは、問題文の誘導に従って計算すると答えが出るようになっています。

基本的には力学の問題ですが、気泡のばね定数を計算するために、熱力学の関係式も使います。また、水の運動速度の分布を計算するために、質量保存則を使います。いろいろな物理の知識や考え方を組み合わせて解く必要がある問題です。

気泡の振動数がわかると、外部からその周波数の音波で気泡周囲の圧力を変化させることによって、気泡の共振を起こすことができます。問4の結果からわかるように気泡の振動数は気泡半径に反比例するので、気泡の径がうんと小さくなると、共振周波数は超音波の領域になります。医療の現場では超音波による画像診断が行われていますが、直径数ミクロンの気泡を血液中に注射して体内で共振が起きたときの信号の変化を捉えることによって、超音波の造影剤（例えばLevovist[®], Optison[®]など）として微小な気泡が役立てられています。

【解答例】

【問1】

(a) おもりの位置 x は、時刻 $t = 0$ で $x = 0$ とすると、

$$x = A \sin \omega t \quad (1)$$

と書ける。おもりの運動速度 v は、(1) 式を微分して、

$$v = \frac{dx}{dt} = A\omega \cos \omega t \quad (2)$$

と書ける。したがって、おもりの運動エネルギー E_K は、 $x = 0$ のとき、最大値 $E_{K,\max} = \frac{1}{2}mA^2\omega^2$ をとる。

(b) ばねの弾性力による位置エネルギー E_P は、 $x = \pm A$ のとき、最大値 $E_{P,\max} = \frac{1}{2}kA^2$ をとる。

(c)

$$\text{運動方程式: } m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx = -kA \sin \omega t \quad (3)$$

$$\text{加速度: } \frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega^2 \sin \omega t \quad (4)$$

より、 $\omega^2 = \frac{k}{m}$ 。

単振動のエネルギー E_T は、 E_P と E_K の和だから、

$$E_T = \frac{1}{2}kA^2 \sin^2 \omega t + \frac{1}{2}mA^2\omega^2 \cos^2 \omega t = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 (\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t) = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \quad (5)$$

(d) $\omega^2 = \frac{k}{m}$ の関係を使うと、(c) の結果はまた、

$$E_T = \frac{1}{2}kA^2 \quad (6)$$

と書ける。したがって、

$$E_T = E_{K,\max} = E_{P,\max} \quad (7)$$

【問2】

(a) 流れの速度が v だから、点Pは Δt 時間後には $v\Delta t$ だけ移動する。したがって、求める半径 r' は、 $r' = r + v\Delta t$ となる。

(b) 気泡表面の水は、気泡表面とともに運動する。したがって、

$$v_R = \frac{dR}{dt} = \frac{d}{dt}A \sin \omega t = A\omega \cos \omega t \quad (8)$$

(c) 移動前の質量： $\rho \left(\frac{4\pi r^3}{3} - \frac{4\pi R^3}{3} \right)$
 移動後の質量： $\rho \left(\frac{4\pi (r + v\Delta t)^3}{3} - \frac{4\pi (R + v_R\Delta t)^3}{3} \right) \approx \rho \left\{ \left(\frac{4\pi r^3}{3} - \frac{4\pi R^3}{3} \right) + (4\pi r^2 v\Delta t - 4\pi R^2 v_R\Delta t) \right\}$
 移動前後で質量が変化しないので、

$$4\pi r^2 v\Delta t = 4\pi R^2 v_R\Delta t \quad (9)$$

よって求める v は、

$$v = \frac{R^2}{r^2} v_R = \frac{R^2}{r^2} A\omega \cos \omega t \quad (10)$$

(d)

$$\begin{aligned} E_K &= \int_R^a \frac{1}{2} \rho v^2 4\pi r^2 dr = 2\pi \rho R^4 A^2 \omega^2 \cos^2 \omega t \int_R^a \frac{1}{r^2} dr \\ &= 2\pi \rho R^4 A^2 \omega^2 \cos^2 \omega t \left[-\frac{1}{r} \right]_R^a \rightarrow 2\pi \rho R^3 A^2 \omega^2 \cos^2 \omega t \quad (a \rightarrow \infty) \end{aligned} \quad (11)$$

(b)の結果を用いて整理すると、

$$E_K = 2\pi \rho R^3 \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 = \frac{1}{2} M \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 \quad (12)$$

よって、 $M = 4\pi \rho R^3$

【問3】

(a) 図 6 より, ピストンにはたらく力のつりあいの式は,

$$pS - p_0S + F = 0 \quad (13)$$

(b) 自然の状態での気泡の体積: $V_0 = \frac{4\pi R_0^3}{3}$

ピストンの移動量 y のときの気泡の体積: $V = \frac{4\pi(R_0 + x)^3}{3}$

断熱変化: $pV^\gamma = p_0V_0^\gamma$

これらより,

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{V}{V_0}\right)^{-\gamma} = \left(1 + \frac{x}{R_0}\right)^{-3\gamma} \quad (14)$$

よって求める p は,

$$p = p_0 \left(1 + \frac{x}{R_0}\right)^{-3\gamma} \quad (15)$$

(c) ピストンの移動後の気泡の体積 V は,

$$V = V_0 + Sy = \frac{4\pi(R_0 + x)^3}{3} \quad (16)$$

両辺を $V_0 = \frac{4\pi R_0^3}{3}$ で割って

$$\frac{V}{V_0} = 1 + \frac{Sy}{V_0} = \left(1 + \frac{x}{R_0}\right)^3 \approx 1 + \frac{3x}{R_0} \quad (17)$$

よって,

$$y = \frac{V_0}{S} \frac{3x}{R_0} = \frac{4\pi R_0^2}{S} x \quad (18)$$

(d) (c) と同様にして (b) の結果を近似

$$\frac{p}{p_0} = \left(1 + \frac{x}{R_0}\right)^{-3\gamma} \approx 1 - \frac{3\gamma x}{R_0} \quad (19)$$

これと (c) の結果を (a) の結果に代入。

$$F = (p_0 - p)S = p_0 \frac{3\gamma x}{R_0} S = p_0 \frac{3\gamma}{R_0} \frac{S^2}{4\pi R_0^2} y = \frac{3\gamma p_0 S^2}{4\pi R_0^3} y \quad (20)$$

ばね定数 k を用いると $F = ky$ と書けるから,

$$k = \frac{3\gamma p_0 S^2}{4\pi R_0^3} \quad (21)$$

(e) 気泡の弾性力による位置エネルギー E_p は,

$$E_p = \frac{1}{2}ky^2 = \frac{1}{2} \frac{3\gamma p_0 S^2}{4\pi R_0^3} y^2 \quad (22)$$

(c) の結果より y を x であらわすと,

$$E_p = \frac{1}{2} \frac{3\gamma p_0 S^2}{4\pi R_0^3} \left(\frac{4\pi R_0^2}{S} \right)^2 x^2 = \frac{1}{2} (12\pi\gamma p_0 R_0) x^2 = \frac{1}{2} k' x^2 \quad (23)$$

よって,

$$k' = 12\pi\gamma p_0 R_0 \quad (24)$$

【問4】

(a) 運動エネルギーが最大となるのは, $\cos \omega t = 1$ となるとき, すなわち $R = R_0$ のときで,

$$E_{K,\max} = \frac{1}{2} M A^2 \omega^2 \quad (M = M(R_0)) \quad (25)$$

気泡の弾性力による位置エネルギーが最大となるのは $x = \pm A$ のときで,

$$E_{p,\max} = \frac{1}{2} k' A^2 \quad (26)$$

$E_{K,\max} = E_{p,\max}$ とおくことにより,

$$\omega = \sqrt{\frac{k'}{M}} = \sqrt{\frac{12\pi\gamma p_0 R_0}{4\pi R_0^3 \rho}} = \frac{1}{R_0} \sqrt{\frac{3\gamma p_0}{\rho}} \quad (27)$$

気泡の振動数 f は, $\omega = 2\pi f$ より

$$f = \frac{1}{2\pi R_0} \sqrt{\frac{3\gamma p_0}{\rho}} \quad (28)$$

(b)

$$f = \frac{1}{2\pi \times 1.5 \times 10^{-3}} \sqrt{\frac{3 \times 1.4 \times 10^5}{1000}} = 2174 \text{Hz} = 2.2 \text{kHz} \quad (29)$$

平成 23 年度

千葉大学先進科学プログラム入学者選考課題

課題 II-B 解答例

H23

解答例

II-B 解答例

問1 シリウスの視直径

距離: $R = 8.6 \text{ 光年} \cdot 9.5 \times 10^{15} = 8.2 \times 10^{16} \text{ m}$

直径: $d = 2.4 \times 10^9 \text{ m}$

視直径: $d/R = \underline{2.9 \times 10^{-8} \text{ rad}}$ (参考 $= 1.7 \times 10^{-6} \text{ 度} = 6 \text{ ミリ秒角}$)

これは 1 km 先にある $29 \mu\text{m}$ (髪の毛の太さの 1/3) の長さを見ることに相当。

問2 最初の暗点の位置 x_1

複スリットの下 (A) および上 (B) の開口からスクリーン上の位置 x までの距離 l_A, l_B は, l に比べて x および d が小さいことを用いてそれぞれ近似して

$$l_A^2 = l^2 + \left(x + \frac{d}{2}\right)^2, \quad l_B^2 = l^2 + \left(x - \frac{d}{2}\right)^2 \quad \text{よって} \quad l_A \approx l \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{x + d/2}{l} \right)^2 \right\} \quad \text{同様に}$$

$$l_B \approx l \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{x - d/2}{l} \right)^2 \right\} \quad \text{光路差 } l_A - l_B \text{ は, } l_A - l_B \approx \frac{xd}{l}$$

最初の暗点は光路差が半波長のときなので, $\frac{xd}{l} = \frac{\lambda}{2}$ よって $x_1 = \frac{l\lambda}{2d}$

問3 明暗のコントラストがはっきりしなくなる条件

光源 1 および光源 2 からの干渉縞の明点と暗点が重なると明暗のコントラストが低下する。つまり, 問 3 で求めた, 光源 1 からの光の暗点と光源 2 からの明点が重なるときがそれに該当する。

光源 1 の暗点は光路差が半波長の奇数倍のときである。すなわち

$\frac{xd}{l} = \frac{\lambda}{2}$, この座標が光源 2 の明点になる。角度 α 離れている光源 2 によるスク

リーン上の最も明るい明点は $x = l \sin \alpha$ にある。

α は微小なので $\sin \alpha \approx \alpha$ として良いので, 上の 2 式より $\alpha d = \frac{\lambda}{2}$

問4 角度 θ の方向から来た光のスリットAを通過した光の電場

角度 θ の方向から光が複スリットに到達するので、スリットA,B上では図7より光路長がすでに $d \sin \theta$ だけ異なる。よって、スリットAを通過してスクリーンの位置 x に達した光の電場の強さ $E_{A,\theta}(x)$ は $E_{A,\theta}(x) = \sin(\omega t - k(l_A + d \sin \theta))$

問5 角度 θ の方向から来て複スリットA,Bを通った光の合成電場

スリットA, Bを通りスクリーン上の位置 x までの距離はそれぞれ l_A, l_B であり、これは問3で求めた。すなわち、

$$l_A \approx l \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{x + d/2}{l} \right)^2 \right\}, \quad l_B \approx l \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{x - d/2}{l} \right)^2 \right\} \quad \text{光路差 } l_A - l_B \text{ は, } l_A - l_B \approx \frac{xd}{l}$$

スリットAを通過してスクリーンの位置 x に達した光の電場の強さ $E_{A,\theta}(x)$ は

$$E_{A,\theta}(x) = \sin(\omega t - k(l_A + d \sin \theta))$$

スリットBを通過してスクリーンの位置 x に達した光の電場の強さ $E_{B,\theta}(x)$ は

$$E_{B,\theta}(x) = \sin(\omega t - k(l_B))$$

位置 x における電場の強さは

$$E_{A,\theta}(x) + E_{B,\theta}(x) = 2 \sin(\omega t - k/2(l_A + l_B + d \sin \theta)) \cos(k/2(l_A - l_B + d \sin \theta))$$

θ は微小なので $\sin \theta \approx \theta$, $l_A + l_B \approx 2l$, $l_A - l_B \approx xd/l$, などの近似を入れると

$$\underline{E_{A,\theta}(x) + E_{B,\theta}(x) \approx 2 \sin(\omega t - k/2(2l + d\theta)) \cos(kd/2(x/l + \theta))}$$

問6 角度 θ の方向から来て複スリットA,Bを通った光の強度

電場の2乗は問5の結果から、

$$(E_{A,\theta}(x) + E_{B,\theta}(x))^2 = 4 \sin^2(\omega t - k/2(2l + d\theta)) \cos^2(kd/2(x/l + \theta))$$

この時間平均をとる。時間依存性が入っているのは、 $\sin^2(\omega t - k/2(2l + d\theta))$ の項だけで、1周期の時間平均は1/2となるから、光の強度 $I_\theta(x)$ は

$$\underline{I_\theta(x) = 2 \cos^2(kd/2(x/l + \theta)) = 1 + \cos(kd(x/l + \theta))} \quad \text{と表される。}$$

問7 視直径 α の光源から発せられた光の、スクリーンの位置 x での光の強度

$I_\theta(x) = 1 + \cos(kd(x/l + \theta))$ を光の来る方向 $-\alpha/2 \leq \theta \leq \alpha/2$ の範囲で積分する。このとき、 α の大小で全強度が変化しないように単位角度当たりの光強度（輝

度)を一定にする。そのため強度を α で割って規格化した $I_\theta(x)/\alpha$ について積分すると、

$$I(x) = \frac{1}{\alpha} \int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} I_\theta(x) d\theta = 1 + \frac{1}{\alpha} \int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} \cos\left(kd\left(\frac{x}{l} + \theta\right)\right) d\theta$$

ここで、 $\cos(kd(x/l + \theta)) = \cos(kxd/l) \cos(k\theta d) - \sin(kxd/l) \sin(k\theta d)$ より

$$I(x) = 1 + \frac{1}{\alpha} \cos\left(\frac{kxd}{l}\right) \int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} \cos(k\theta d) d\theta - \frac{1}{\alpha} \sin\left(\frac{kxd}{l}\right) \int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} \sin(k\theta d) d\theta$$

奇関数なのでゼロ

$$\text{すなわち, } I(x) = 1 + \frac{\sin\left(\frac{kd\alpha}{2}\right)}{\left(\frac{kd\alpha}{2}\right)} \cos\left(\frac{kxd}{l}\right)$$

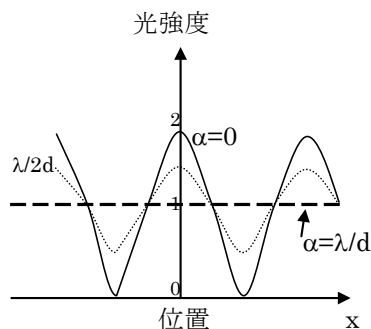
位置 x 依存性は最後の $\cos$ の項にしかなく、その前に係数 $\sin(\alpha)/\alpha$ の関数形で視直径が干渉の振幅を左右していることがわかる。

問8 グラフと干渉縞のコントラスト消失の条件

α を変えると干渉パターンが大きく変化する。 $\alpha = 0$ では点光源のヤングの実験と同様となり、位置 x に関して周期的に光強度が最大からゼロまで変化する。

α を増すと、明暗の比が小さくなる。これは問3で2つの点光源の場合に検討したことと定性的には一致する。 $\alpha = \lambda/d$ のとき、干渉パターン

は完全に消失する。すなわち、 $\frac{\sin(\frac{\pi d \alpha}{\lambda})}{(\frac{\pi d \alpha}{\lambda})}$ が



ゼロとなるとき、つまり $\frac{d\alpha}{\lambda} = n$ (n は自然数) のときに干渉縞は消失する。

問9 ベテルギウスの視直径

結局、マイケルソン・ピーズの干渉観測での可動鏡の距離 L が、問4～8での複スリットの間隔 d に相当する。すなわち、 $\alpha = \lambda / L_0$ であるので、

$$\alpha = \frac{570 \times 10^{-9}}{3.0} = 1.9 \times 10^{-7} \quad [\text{rad}] \quad \text{これは問1のシリウスより約7倍も}$$

大きな視直径を持つ赤色巨星である。

問10 マイケルソンの天体干渉計とは

できるだけ移動鏡の間隔 L を大きくする。波長の短い(青い)光で観測するなど原理的には小さな視直径を観測可能である。

困難な点

- ・ 青い星が測定したい星とは限らない。
- ・ 干渉実験でも、大気の揺らぎにより2つの鏡から入射する光は常に揺らいでおり、星像もゆらぐため干渉縞の観測を困難にする。
- ・ 実験中は光路にある鏡を極めて安定して保持して、光路長が光の波長の数分の一の精度で変化しないようにする必要がある。一方で小さな視直径の星を測定しようとすれば移動鏡の間隔を大きくする必要があり、安定性とトレードオフの関係にある。

出題意図

毎晩、晴れていれば誰でもが夜空に瞬く星を見ることができる。トピック的な星の話題は頻繁に報道にも流れているが、「星をどのようにして見るのだろうか？」という、とても基礎的なことを自分なりに考えたことがあるだろうか。本問題は、科学を志す諸君がこれまで、身近な問題について自分なりにどの程度意識して考えているのかを試すものである。

問1： 望遠鏡で太陽以外の恒星を見ても見えないことは何かで読んだことがあるかも知れない。以降の問題を考える準備として、いかに恒星の視直径が小さいかについて確認する。

問2，問3： 光の基本的性質である干渉効果について考える。2年生後期では、授業で勉強したばかりの諸君もいることから、教科書に載っているような問題をあえて取り上げ、物理的な設定を問題文から正しく読み取って間違いなく計算できるかどうかを確認する小手調べである。

問4～問8： 高校では取り扱わない「広がりのある光源」からの干渉効果を、設定を単純化して高校の数学で容易に扱えるものとした。指示に従い、また、問2，問3での練習をもとにしてスクリーン上の干渉が複スリットの間隔を変えることにより変化することを導き出す。三角関数の取り扱いや簡単な定積分の計算が正しく行えるかも確認する。

問9，問10

マイケルソンらの実験での観測結果を数値で求め、工夫すれば見えないものも「見える」ようにできることを知ってもらうとともに、やはり極めて難しい観測である理由を考察して、本問全体を通じての理解度を試す。

平成 22 年度

千葉大学先進科学プログラム入学者選考課題

課題論述

実施時間 [9:00－17:00]

課題 II-A, II-B

(10:00－15:30)

注意事項

課題Ⅱには、[Ⅱ－A]、[Ⅱ－B]、[Ⅱ－C]、[Ⅱ－D]の4題があります。
志望するコースによって、次に示す問題を解答してください。

- ・物理学コース、フロンティアテクノロジーコース：
[Ⅱ－A]、[Ⅱ－B]の両方を解答してください。
- ・人間探求コース：
[Ⅱ－A]、[Ⅱ－B]、[Ⅱ－C]、[Ⅱ－D]の中から2題を選択して解答してください。

[II-A]

長さ ℓ のひもにつながれた質量 m の小球がなめらかな水平面上を運動している。小球の大きさ、ひもの質量、太さ、伸び縮み、摩擦、空気抵抗は無視できるとして以下の問いに答えなさい。ここでは、水平面上に xy 座標を考えることとする。

問1 図1のように、水平面上の原点 O とひもでつながれている小球が、速さ v_0 で反時計まわりに等速円運動をしている。

- 小球の速度、加速度、ひもから受ける張力の向きを图示しなさい。
- 小球の加速度の大きさ、ひもにかかる張力の大きさを求めなさい。
- ひもの張力により小球がされる仕事を求めなさい。

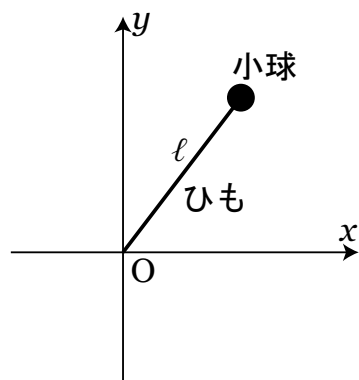


図1

問2 問1と同様、小球と水平面上の原点 O がひもでつながれている。時刻 $t = 0$ に小球は点 $(\ell, 0)$ にあり、 y 軸の正の方向に速さ v_0 で運動を開始した。図2のように点 $(0, \ell/2)$ に太さの無視できる針が刺されており、ひもが針に引っかかってからは、小球は針を中心とした等速円運動をした。ただし、ひもと針との間の摩擦は無視できるとする。

- 針を中心として等速円運動しているときの、小球の速さ、加速度の大きさ、ひもにかかる張力の大きさを求めなさい。
- 時刻 $t = 0$ 以降の小球の位置の x 座標と y 座標をそれぞれ時刻 t の関数として求めなさい。
- ひもが針に引っ掛かってからの、ひもが針におよぼす力の x 成分 F_x と y 成分 F_y をそれぞれ時刻 t の関数として求めなさい。

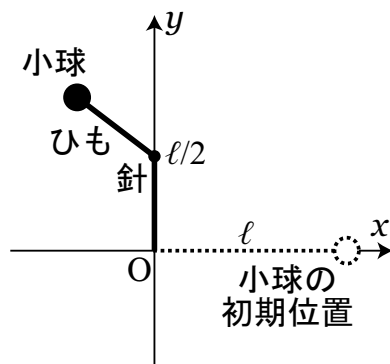


図2

問3 図3のように、半径 r の円筒を、その中心が原点 O と一致するように水平面上に固定した。円筒上の一点 $P(r, 0)$ と小球が長さ ℓ のひもで結ばれている。時刻 $t = 0$ に小球は点 (r, ℓ) にあり、 x 軸の負の方向に速さ v_0 で運動を開始した。以下では、小球が円筒にはじめて衝突するまでの運動を考える。

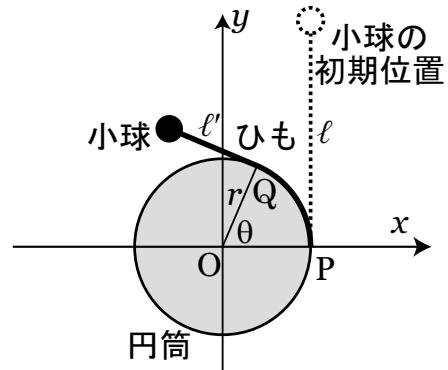


図3

- (a) $\ell = 2\pi r$ とするとき、 $t = 0$ から小球が円筒と衝突するまでに小球が描く軌跡の概形を図示なさい。

以下では、ひもの長さを $\ell = 2\pi r$ と限定せずに考えなさい。

- (b) 図3のようにひもが円筒の表面に巻きつき始める点を Q とし、 $\angle POQ$ を θ [rad] とする。小球から点 Q までの距離 ℓ' を θ の関数として求めなさい。
- (c) 小球の位置の x 座標と y 座標を (b) の結果を参考にして、それぞれ θ の関数として求めなさい。ひもは線分 OQ と直交することに注意すること。
- (d) $\angle POQ$ が θ から $\theta + \Delta\theta$ まで変化したとき、小球は点 (x, y) から点 $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ まで移動した。このときの Δx , Δy を求めなさい。またこれを利用して、小球の微小な移動距離 $\Delta s = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ を求めなさい。ただし、 $\Delta\theta$ は微小であるため、 $\sin \Delta\theta \doteq \Delta\theta$, $\cos \Delta\theta \doteq 1$ と近似し、計算結果に現れる $(\Delta\theta)^2$ の項も無視すること。
- (e) $\angle POQ$ が θ から $\theta + \Delta\theta$ まで変化する間に、ひもの張力により小球がされる仕事を求めなさい。
- (f) 小球の速さを時刻 t の関数として求めなさい。
- (g) 時刻 $t = t_1$ に小球は円筒に衝突した。時刻 $t = 0$ から $t = t_1$ までの間に小球が描く軌跡の長さ s と t_1 を求めなさい。
- (h) ひもが円筒に及ぼす力の大きさを θ の関数として求めなさい。また、その力の大きさの時間変化の概形をグラフに示しなさい。

[II-B]

「走査型プローブ顕微鏡」の一種の「電気力顕微鏡」では、尖った金属探針を弱いばねで支え、その先端を固体表面すれすれに近づけて振動させる。このときの振動の変化で、固体表面の凹凸形状と電位や電荷などの分布を、場合によっては原子スケールの分解能で見ることができる。そのしくみのうち、電位測定の基本原理の一部は高校の物理の範囲で理解できるので、ここで順を追って考えてみよう。

なお、以下の仮想実験は真空中で行うこととし、真空の誘電率を ϵ_0 [F/m]とする。用いる電池は、内部抵抗が十分小さい電池である。また、ここで考えている全ての力は極板などにはたらく重力より十分大きいいため、この問題では重力の影響は無視してよい。

図1のように、同じ形で面積 S [m²]の2枚の金属板による平行平板コンデンサーを考える。以後、図での位置によって、これらの金属板を「下側の極板」および「上側の極板」とよぶ。上側の極板の位置を表す変数 x [m]は、 $x=0$ で下側の極板に接し、正に増加すると下側の極板から遠ざかるようにとる。この平行平板コンデンサーについて、以下の問いに答えなさい。

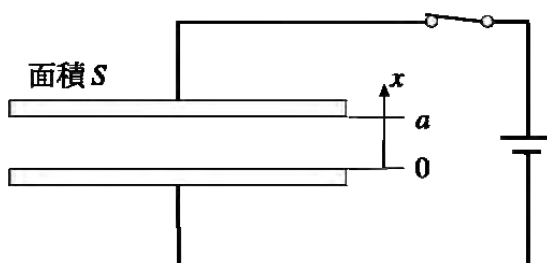


図1

- 問1** $x=a$ のときの電気容量 C [F]を ϵ_0 、 S および a を用いて表しなさい。また、電池を図1の向きに接続し、コンデンサーに電圧 V [V]を加えたときに、極板に蓄えられる電荷の大きさ Q [C]を求めなさい。この問題では極板のサイズと比較して間隔が十分小さい場合を想定しているため、極板端部の電気容量への影響は無視してよい。

問2 極板に蓄えられる電荷の分布を、必要に応じて「 $\oplus$ 」および「 $\ominus$ 」の記号を用いて模式的に表し、さらに極板周辺に現れる電気力線を描きなさい。ただし、この問いでは、問1で無視した極板端部の影響もわかりやすく描きなさい。

コンデンサーに電圧 V を加え、電荷 Q が蓄えられた後に、図1のスイッチを開いて電池をコンデンサーから切り離した。この後、蓄えられた電荷 Q は一定となる。この電荷によってコンデンサーに蓄えられている静電エネルギー U [J]は、一般に

$$U = \frac{1}{2} QV$$

と表される。この式は、 Q 、 C 、 V の関係から、この3変数のうちの任意の2つで書き直すことができることに注意してほしい。

このコンデンサーの静電エネルギー U は、上側の極板の位置 x によって変化する。この変化から、コンデンサーの2極板間にはたらく力を求めよう。

問3 Q が一定に保たれていることに注意して、 U を x の関数として C 、 V を用いずに表しなさい。また、上側の極板位置を a から $a + \Delta a$ に移動させたときの静電エネルギー変化分 ΔU を求めなさい。

問4 外部からの力 F によって上側の極板を Δa 移動させる仕事 $F \cdot \Delta a$ と、静電エネルギー変化分 ΔU は、 $F \cdot \Delta a = \Delta U$ を満たす。この関係から、電荷によって極板にはたらく静電気力 $F_Q = -F$ を求めなさい。

次に、図1のスイッチが閉じられており、電池が接続された状態で2極板間にはたらく静電気力を考えよう。この場合は、電池の持つエネルギーの増減と内部抵抗によるエネルギー損失を考える必要があるために、エネルギー保存則から力を求めることは難しくなる。しかし、静電気力の本質は問2で描いた電荷によるものであるから、 Q が同じであれば、電池が接続されているか否かによらず静電気力も同じである。従って、 Q 、 C 、 V の間に常に成り立つ関係を用いることで、コンデンサーに加える電圧 V が一定となる条件のもとで2極板間にはたらく静電気力を求めることができる。

問5 F_Q から Q を消去し、コンデンサーに加える電圧 V が一定となる条件のもとで極板にはたらく静電気力 F_V を x の関数として求めなさい。

ここで改めて、先ほどと同じコンデンサーの上側の極板を、図2のようにばね定数 k [N/m] の絶縁体でできたばねでつり下げた。下側の極板は固定されており、上側の極板は下側の極板と平行を保ったまま上下に抵抗なく運動できるようになっている。上側の極板の質量は m [kg] で、ばねの質量は無視できるものとする。

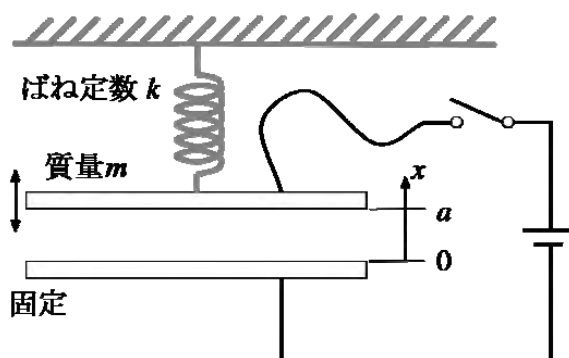


図2

まずはコンデンサーに電池がつながれておらず、電荷も蓄えられていないものとして、次の問いに答えなさい。

問6 $x=a$ でばねが自然長となっているとき、上側の極板をわずかに下方向に引っ張ってから離れたところ、極板は単振動を始めた。ばねによって上側の極板にはたらく復元力 F_s [N] を x の関数として求めなさい。さらに、この振動の角振動数 ω [rad/s] を k と m で表しなさい。力は、極板に上向きの力がはたらくときに正、下向きの力がはたらくときに負となることに注意すること。

次に、電池を接続し、コンデンサーに電圧 V を加えた。これによりつりあいの位置は $x=b$ に変化した。

問7 問5で求めた静電気力 $F_v(x)$ と問6で求めたばねの復元力 $F_s(x)$ の概形を実線で、さらに、これら2つの力の合成力 $F(x)$ の概形を点線でグラフに描きなさい。このとき、静電気力がないときのつりあいの位置 ($x=a$) と静電気力が加わったときの新たなつりあいの位置 ($x=b$) も示しなさい。

問 8 コンデンサーに電圧を加えることで、極板の単振動の角振動数がどう変化するかを、問 7 のグラフをもとに説明しなさい。

さらに、振動の角振動数の近似値を求めてみよう。振動の振幅が十分小さいとき、振動の中心位置となる $x=b$ のつりあいの位置付近で上側の極板にはたらく $F_v(x)$ は、 $x=b$ における接線である $F_v(b)+F'_v(b)\cdot(x-b)$ で近似される。ただし、

$$F'_v(x)=\frac{dF_v(x)}{dx}$$

である。

問 9 合成力 $F(x)$ をこの近似のもとで x の一次関数として表し、角振動数 ω を V の関数として求めなさい。ただし、解答では b を既知の定数として残してよい。

最後に、図 2 の電池を起電力が自由に変えられる直流電源に交換した。コンデンサーに加える電圧 V を正の方向に大きくしていくと、上側の極板のつりあいの位置が徐々に変化し、ある電圧 V_l を境に突然下側の極板に吸いつけられた。

問 10 このときの電圧 V_l を求めなさい。また、 V の値が正負どちらも取り得る場合に、 V がどのような範囲であればこのような突然吸いつけられる現象が起こらないかを答えなさい。なお、ここでは単振動の影響は考えなくてもよい。

この問題では解析をここまでとする。電気力顕微鏡では、このように、振動する金属探針の角振動数が、その直下の固体表面との間の電位差（この問題では電池によって与えられた電圧であった）に応じて変化することを電位計測の基本原理とする。目的に応じて、様々なタイプの電気力顕微鏡が用いられるが、多くの場合、固体表面の凹凸形状と電位等の電氣的な信号を分離するために、さらに巧妙ないくつかの工夫を盛り込む。もう一方の凹凸形状の測定には、この問題で考えた静電気力より距離依存性のかかなり強いファンデルワールス力などを検出する。その場合も、力を検出するための基本原理はこの問題と同じである。探針が固体表面すれすれまで近づくと、急激にはたらくファンデルワールス力によって探針の角振動数が変化することを利用し、角振動数が一定の値になるように固体表面との間隔を制御しながら表面を「なぞる」ことで凹凸形状の測定を行っている。

平成 22 年度

千葉大学先進科学プログラム入学者選考課題

課題 II-A 解答例

H22

解答例

II-A 解答

本問題は、平面上の一点からひもでつなぎとめられた大きさの無視できる小球がどのように運動するかを問うています。平面上に小球以外何もなければ非常に簡単で、小球は等速円運動をします(問1)。しかし、平面上に太さが無視できる針(問2)や半径 r の円筒(問3)があると小球の運動は複雑になってきます。このような運動をイメージし、うまく物理や数学の道具を使って議論できるかを問う問題です。

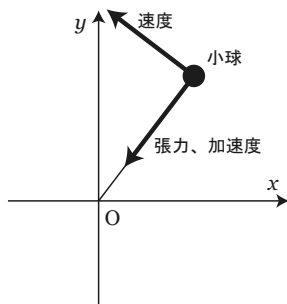
問1, 問2は、標準的な円運動の問題で、受験生の基礎学力を試しています。問2(c)で、ひもの張力がどこでも等しいことを考えなければならないので物理的なイメージをきちんと持っているかが問われます。

問3は、円筒状の物体があるときに、小球をつなぎとめているひもが円筒状の物体に絡まりながらどのように運動するかを求める問題です。運動のイメージを持つことに加えて、微分や積分といった数学の道具をうまく使いこなせているかが問われます。円筒にひもが徐々に絡まっていくのですが、円筒表面にひもが巻きつき始める点を $(r \cos \theta, r \sin \theta)$ とおくことでこの運動は理解しやすくなります。物理的なポイントとしては、速度の絶対値が常に一定になるところです。このことを証明するには、ひもが小球に仕事をしない、すなわち、ひもの張力と小球の速度の向きが直角になっていることを示す必要があります。そうすれば力学的エネルギーが保存され、速度の絶対値が変わらないことを証明できます。このことに気づいた受験生は良い物理のセンスを持っていると言えるでしょう。軌跡の概形は、糸を鉛筆やコップなどにまきつけ、その先にペンをつなぐと簡単に描けます。どのように運動するかをきちんとイメージしながら問題を解いてきたかが問われます。

ちなみにこの曲線は、円の伸開線(Involute)です。歯車の歯の形をこの曲線にすると、歯車の歯同士のかみ合わせが最適であることが知られており、工学的にも応用されています。なお、中心の円から離れると(この場合だとひもが非常に長いと)、アルキメデスのらせんに近づくことも知られています。

問1 基本的な等速円運動の問題です。速度、加速度や張力の概念、等速円運動での向心力をきちんと求められるかが問われます。

- (a) 図のようになる。等速円運動では、速度と加速度が直交することが重要。小球には張力以外の力がかかっていないので、張力の向きと加速度の向きは一致する。



- (b) 半径が ℓ の等速円運動であり、張力が向心力となっているので、小球の加速度の大きさは $a = \frac{v_0^2}{\ell}$, ひもの張力の大きさは $F = \frac{mv_0^2}{\ell}$ となる。

(c) ひもの張力の向きと小球の速度の向きが直交しているので、仕事は0である。

問2 小球がひもに結ばれて等速円運動している時に、ひもの長さが突然半分になったときに小球の運動がどうなるかを問います。ひもは仕事をしないので、小球の運動エネルギーは一定、すなわち速さが一定であることを理解できるかがポイントです。

(a) 半径 $\ell/2$ の等速円運動であるので、小球の速さは $v = v_0$ 、加速度の大きさは $a = \frac{2v_0^2}{\ell}$ 、張力の大きさは $F = \frac{2mv_0^2}{\ell}$ となる。

(b) ひもが針に絡まる時刻は $t = \frac{\pi\ell}{2v_0}$ である。それまでは、中心が原点の半径 ℓ の等速円運動であり、そのあとは、中心が点 $(0, \ell/2)$ で半径 $\ell/2$ の等速円運動である。よって、幾何学的な考察によって $0 \leq t \leq \frac{\pi\ell}{2v_0}$ のとき

$$\begin{aligned} x(t) &= \ell \cos \frac{v_0 t}{\ell} \\ y(t) &= \ell \sin \frac{v_0 t}{\ell} \end{aligned}$$

$t \geq \frac{\pi\ell}{2v_0}$ のとき

$$\begin{aligned} x(t) &= -\frac{\ell}{2} \sin \left[\frac{2v_0}{\ell} \left(t - \frac{\pi\ell}{2v_0} \right) \right] \\ &= -\frac{\ell}{2} \sin \left(\frac{2v_0 t}{\ell} - \pi \right) = \frac{\ell}{2} \sin \frac{2v_0 t}{\ell} \\ y(t) &= \frac{\ell}{2} + \frac{\ell}{2} \cos \left[\frac{2v_0}{\ell} \left(t - \frac{\pi\ell}{2v_0} \right) \right] \\ &= \frac{\ell}{2} \left[1 + \cos \left(\frac{2v_0 t}{\ell} - \pi \right) \right] = \frac{\ell}{2} \left(1 - \cos \frac{2v_0 t}{\ell} \right) \end{aligned}$$

となる。

(c) ひもの方向と力の方向が一致することを考慮する。小球の位置を M、針の位置を N とおくと、針には ON 間のひもと NM 間のひもの双方から力を受ける。ひもと針の間に摩擦がないので、ひもの張力はどの部分でも (つまり ON 間も NM 間でも) 等しくなる。張力の大きさは (a) で $F = \frac{2mv_0^2}{\ell}$ と求まっているので、これらを向きを考えて足し合わせればよい。ON 間のひもから受ける力は常に一定で $(0, -\frac{2mv_0^2}{\ell})$ 、一方、NM 間のひもから受ける力は時刻 t の関数として $(\frac{2mv_0^2}{\ell} \sin \frac{2v_0 t}{\ell}, -\frac{2mv_0^2}{\ell} \cos \frac{2v_0 t}{\ell})$ となる。針にかかる力はこの二つの力の和であるので

$$\begin{aligned} F_x(t) &= \frac{2mv_0^2}{\ell} \sin \frac{2v_0 t}{\ell} \\ F_y(t) &= -\frac{2mv_0^2}{\ell} - \frac{2mv_0^2}{\ell} \cos \frac{2v_0 t}{\ell} \end{aligned}$$

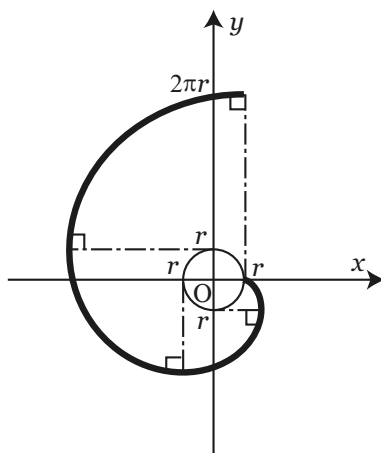
が得られる。

H22

解答例

問3 小球につながれたひもが円筒に巻き付くときの運動を考える問題です。点Qを考えることで問題は易しくなります。ひもの向き、速度の向きなどをうまく数学を利用して導けるかが問われます。問2同様に小球は仕事をされないの、運動エネルギーが一定、すなわち速さが一定ということがわかれば、かなり見通しが立ちやすくなると思われます。

- (a) 図に示す。ちょうど1周したところで小球は円筒と衝突する。つまり、軌跡は点 $(r, 0)$ で円筒表面と交わる。また、ひもの向きと軌跡の接線の向きは直交することに注意して、軌跡を描くと図のようになる。実際には、衝突する点でも軌跡の向きと円筒の表面とは直交する。



- (b) 弧 PQ の長さが $r\theta$ と表わされ、ひも全体の長さ ℓ から引けばよいので、 $\ell' = \ell - r\theta$ となる。
- (c) 小球の位置を M とすると、線分 QM と x 軸がなす角は $\theta + \frac{\pi}{2}$ と書けるので、

$$\overrightarrow{\text{QM}} = \left(\ell' \cos \left(\theta + \frac{\pi}{2} \right), \ell' \sin \left(\theta + \frac{\pi}{2} \right) \right) = (-\ell' \sin \theta, \ell' \cos \theta)$$

点 Q の座標は $(r \cos \theta, r \sin \theta)$ と表わされるので、ベクトルを用いて、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\text{OM}} &= \overrightarrow{\text{OQ}} + \overrightarrow{\text{QM}} = (r \cos \theta, r \sin \theta) + (-\ell' \sin \theta, \ell' \cos \theta) \\ &= (r \cos \theta - (\ell - r\theta) \sin \theta, r \sin \theta + (\ell - r\theta) \cos \theta)\end{aligned}$$

となる。これより

$$x = r \cos \theta - (\ell - r\theta) \sin \theta$$

$$y = r \sin \theta + (\ell - r\theta) \cos \theta$$

が得られる。

- (d) (c) の結果を用いて計算するが, $\sin(\theta + \Delta\theta)$, $\cos(\theta + \Delta\theta)$ の計算が何度も出てくるので先に計算しておく。

$$\sin(\theta + \Delta\theta) = \sin\theta \cos\Delta\theta + \cos\theta \sin\Delta\theta \approx \sin\theta + \Delta\theta \cos\theta$$

$$\cos(\theta + \Delta\theta) = \cos\theta \cos\Delta\theta - \sin\theta \sin\Delta\theta \approx \cos\theta - \Delta\theta \sin\theta$$

これを用いて計算すると

$$\begin{aligned}
 \Delta x &= [r \cos(\theta + \Delta\theta) - (\ell - r(\theta + \Delta\theta)) \sin(\theta + \Delta\theta)] - [r \cos \theta - (\ell - r\theta) \sin \theta] \\
 &\doteq r(\cos \theta - \Delta\theta \sin \theta) - (\ell - r(\theta + \Delta\theta))(\sin \theta + \Delta\theta \cos \theta) \\
 &\quad - r \cos \theta + (\ell - r\theta) \sin \theta \\
 &= -r\Delta\theta \sin \theta + r\Delta\theta(\sin \theta + \Delta\theta \cos \theta) - (\ell - r\theta)\Delta\theta \cos \theta \\
 &\doteq -\Delta\theta(\ell - r\theta) \cos \theta \\
 \Delta y &= [r \sin(\theta + \Delta\theta) + (\ell - r(\theta + \Delta\theta)) \cos(\theta + \Delta\theta)] - [r \sin \theta + (\ell - r\theta) \cos \theta] \\
 &\doteq r(\sin \theta + \Delta\theta \cos \theta) + (\ell - r(\theta + \Delta\theta))(\cos \theta - \Delta\theta \sin \theta) \\
 &\quad - r \sin \theta - (\ell - r\theta) \cos \theta \\
 &= r\Delta\theta \cos \theta - r\Delta\theta(\cos \theta - \Delta\theta \sin \theta) - (\ell - r\theta)\Delta\theta \sin \theta \\
 &\doteq -\Delta\theta(\ell - r\theta) \sin \theta
 \end{aligned}$$

これを用いると変位は

$$\Delta s = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \Delta\theta(\ell - r\theta) \sqrt{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta} = \Delta\theta(\ell - r\theta)$$

と計算できる。

- (e) (d)での計算より変位は $(-\Delta\theta(\ell - r\theta) \cos \theta, -\Delta\theta(\ell - r\theta) \sin \theta)$ であった。一方で、ひもの張力の向きはひもの向きと等しいので、 $(-\sin \theta, \cos \theta)$ の向きを向いている。

$$(-\Delta\theta(\ell - r\theta) \cos \theta, -\Delta\theta(\ell - r\theta) \sin \theta) \cdot (-\sin \theta, \cos \theta) = 0$$

より、張力の向きと変位の向きは常に直交する。よって、小球がされる仕事は常に0である。

- (f) (e)より、小球は仕事をされることがないので、運動エネルギーが変化しない。つまり、速さは常に一定で v_0 である。
- (g) (d)で求めた変位の大きさ Δs を足し合わせていけば、軌跡が求まるはずである。初期には $\theta = 0$ である。小球が円筒と衝突するときには、 $\ell = r\theta$ が成り立つので、 $\theta = \ell/r$ である。 $\Delta s = (\ell - r\theta)\Delta\theta$ であるので、軌跡の長さは

$$\begin{aligned}
 s &= \int_0^{\ell/r} (\ell - r\theta) d\theta \\
 &= \left[\ell\theta - \frac{r}{2}\theta^2 \right]_0^{\ell/r} \\
 &= \frac{\ell^2}{r} - \frac{\ell^2}{2r} \\
 &= \frac{\ell^2}{2r}
 \end{aligned}$$

となる。常に速さは v_0 で一定であることから、衝突する時刻 t_1 は

$$t_1 = \frac{1}{v_0} \frac{\ell^2}{2r} = \frac{\ell^2}{2rv_0}$$

と求められる。

あるいは、曲線の長さの公式を (b) の表現に適用すると、

$$\begin{aligned}s &= \int_0^{\ell/r} \left\{ \left(\frac{dx}{d\theta} \right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta} \right)^2 \right\}^{1/2} d\theta \\&= \int_0^{\ell/r} (\ell - r\theta) d\theta \\&= \frac{\ell^2}{2r}\end{aligned}$$

としてもよい。

- (h) (d) では、時刻 Δt の間に $\Delta\theta$ だけ変化するとするときに小球が移動する距離 Δs を求めた。小球の速度は常に v_0 で一定なので、 $\Delta s = v_0 \Delta t$ 。(d) で求めた式を利用すると、 θ の変化速度は

$$\frac{d\theta}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v_0 \Delta\theta}{\Delta s} = \frac{v_0 \Delta\theta}{(\ell - r\theta) \Delta\theta} = \frac{v_0}{\ell - r\theta}$$

とできる。

$$v_x = -v_0 \cos \theta$$

$$v_y = -v_0 \sin \theta$$

であり、加速度は速度を時間で微分することにより得られるので

$$a_x = -v_0 \sin \theta \frac{d\theta}{dt} = -\frac{v_0^2}{\ell - r\theta} \sin \theta$$

$$a_y = -v_0 \cos \theta \frac{d\theta}{dt} = -\frac{v_0^2}{\ell - r\theta} \cos \theta$$

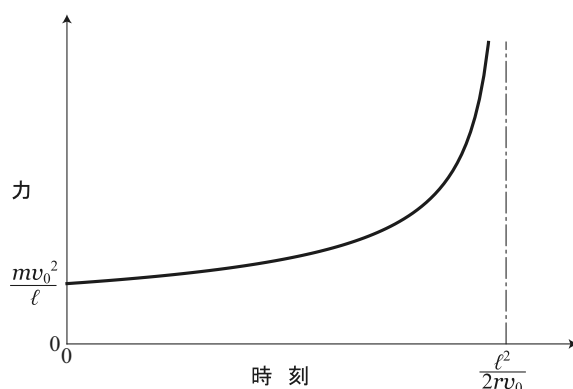
となる。よって加速度の大きさは

$$a = \frac{v_0^2}{\ell - r\theta}$$

となる。 $ma = F$ の関係を用いると、

$$F = \frac{mv_0^2}{\ell - r\theta}$$

θ は時間とともに大きくなり、小球が円筒に衝突するときには ℓ/r となる。よって、 $\ell - r\theta$ は正で時間とともに小さくなるのがわかる。分母が時間とともに小さくなるので、力 F は時間とともに大きくなる。(衝突時には無限大になる。) 実際にグラフに描くと図のようになる。



あるいは、小球にかかる力は、小球の運動が瞬間的には半径 $\ell' = \ell - r\theta$ 、速さ v_0 の等速円運動であると見なせるので、

$$F = \frac{mv_0^2}{\ell'} = \frac{mv_0^2}{\ell - r\theta}$$

としてもよい。

実際の θ や力の時間変化の関数を求めることもできる。時刻 Δt の間に θ は $\frac{\Delta s}{v_0} = \frac{\ell - r\theta}{v_0} \Delta\theta$ だけ変化する。時刻を $t = 0$ から $t = t'$ まで変化させたときに θ が $\theta = 0$ から $\theta = \alpha$ まで変化したとすると、

$$\int_0^{t'} dt = \int_0^\alpha \frac{\ell - r\theta}{v_0} d\theta$$

が成り立つ。両辺を計算すると

$$t' = \frac{\ell\alpha}{v_0} - \frac{r\alpha^2}{2v_0}$$

2次方程式を解くと

$$\alpha = \frac{\ell \pm \sqrt{\ell^2 - 2rv_0 t'}}{r}$$

ただし、 $t' = 0$ のとき $\alpha = 0$ でないといけないのでマイナスの符号をとる。 t' は $0 \leq t \leq t_1$ のどんな値でもよく、その時の $\angle POQ$ が α であるので、改めて t' を t と、 α を θ とおきなすと

$$\theta = \frac{\ell - \sqrt{\ell^2 - 2rv_0 t}}{r}$$

この関数を力の式に代入すると

$$F = \frac{mv_0^2}{\sqrt{\ell^2 - 2rv_0 t}}$$

となる。この関数を用いて描いたのが図のグラフである。

H22

解答例

平成 22 年度

千葉大学先進科学プログラム入学者選考課題

課題 II-B 解答例

H22

解答例

[II-B] 解答例

出題の意図

この問題では、走査型プローブ顕微鏡の一種である電気力顕微鏡において、静電気力を検出する基本原理を題材としている。前半では、コンデンサーの極板間にはたらく静電気力を静電エネルギーから求めることを要求している。後半では、ばねによる単振動にばねの復元力以外の力が加わることで振動がどう変化するかを解析的に記述することを要求している。具体的には、以下の能力が求められる。

- ・ コンデンサーへの電荷蓄積について正しく理解しているか？
- ・ 力とエネルギーの関係などを表すために、座標に対する向きを正しく取り扱えるか？
- ・ 仕事とエネルギーの関係について正しく理解しているか？
- ・ 単振動について正しく理解しているか？
- ・ 異種の力の釣り合いについて正しく説明できるか？
- ・ 物理的問題を解くために必要な数学的学力があるか？
- ・ 比較的複雑な物理問題の設定を正しく理解できるか？

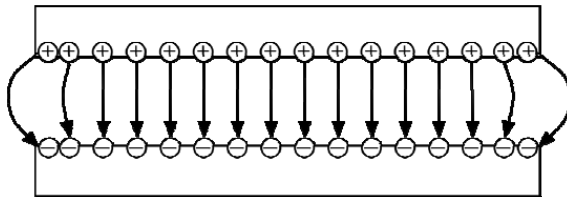
解答例

(以下、MKSA 単位系で答えるかぎり単位を書くことは必須ではない。)

問 1 平行平板コンデンサーの電気容量は、 $C = \epsilon_0 \frac{S}{a}$ [F] で表される。

$$\text{これを用いて、} Q = CV = \frac{\epsilon_0 SV}{a} \text{ [C]}$$

問 2



以下を明らかに満たしていないなら減点：

- ・ 極板中央付近は電荷が均一に分布
- ・ 正電荷と負電荷が同じ数
- ・ 電気力線が正電荷（側）から出て負電荷（側）に入っている
- ・ 平行部で極板の上下には電気力線が出ていない
(端部は上の図より側面にもう少し回り込んでいてもよい)

以下が考慮されていれば加点：

- ・ 電荷が極板内部ではなく明確に表面ごく近くにある
- ・ 極板端は電気力線が外にふくらんで広がっている
- ・ 極板端は電荷がより混みあっている

H22

解答例

問3 Q 一定で C が変化するので、 $Q^2/2C$ を使う。

$$U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{Q^2 x}{2\epsilon_0 S} \quad [\text{J}]$$

$$\text{ここから, } \Delta U = U(a + \Delta a) - U(a) = \frac{Q^2 \Delta a}{2\epsilon_0 S} \quad [\text{J}]$$

問4 $F \cdot \Delta a = \Delta U = \frac{Q^2 \Delta a}{2\epsilon_0 S}$ より

$$F_Q = -F = -\frac{Q^2}{2\epsilon_0 S} \quad [\text{N}] \quad (Q \neq 0 \text{ で常に下向きの力であり, } x \text{ に依存しない。})$$

問5 $Q = CV$ および $C = \epsilon_0 \frac{S}{x}$ より, 上式から Q を消去すると

$$F_V = -\frac{(CV)^2}{2\epsilon_0 S} = -\frac{\epsilon_0^2 S^2 V^2}{2\epsilon_0 S x^2} = -\frac{\epsilon_0 S V^2}{2x^2} \quad [\text{N}]$$

($V \neq 0$ で常に下向きの力であり, x に依存する。)

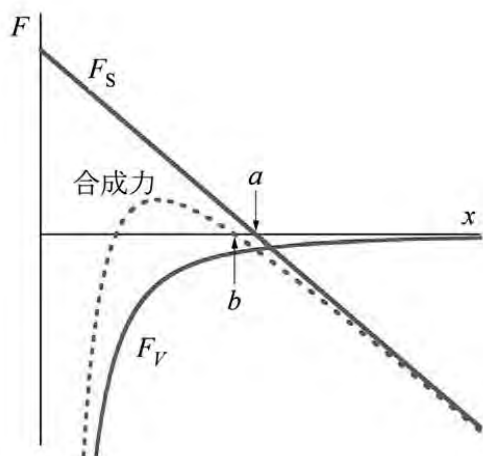
問6 F_s は $x > a$ で負, $x < a$ で正となり, 変位に比例する。

$$F_s = -k(x - a) \quad [\text{N}]$$

この復元力による単振動の角振動数は, 運動方程式 $m \frac{d^2 x}{dt^2} = -k(x - a)$

の解 $x = \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t + \varphi\right)$ より, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad [\text{rad/s}]$

問7



H22

解答例

以下を満たしていないなら減点：

- ・ F_s が $F > 0$ から $F < 0$ に x 軸を横切る直線
- ・ F_v が常に $F < 0$ で、上に凸の単調増加曲線
- ・ 合成力が上に凸で $F > 0$ に極大値を持つ
- ・ F_s が x 軸を横切る点が a
- ・ 合成力が x 軸を横切る点のうち x が大きいほうが b

問 8 グラフの合成力の傾きを見ると、静電気力が加わることによって、極板にはたらく復元力が弱くなっている。そのため、見かけ上ばね定数 k が小さくなることから ω は小さくなる。

問 9 $F'_v = \frac{d}{dx} \left(-\frac{\epsilon_0 S V^2}{2} \cdot x^{-2} \right) = \epsilon_0 S V^2 \cdot x^{-3}$ であるから

$x = b$ での静電気力の接線は

$$F_v(b) + F'_v(b)(x-b) = -\frac{\epsilon_0 S V^2}{2b^2} + \frac{\epsilon_0 S V^2}{b^3} \cdot (x-b) \quad (1)$$

と表される。この第 1 項は $x = b$ での定常的な静電気力（基点）を表し、第 2 項はそこからわずかに変位したときの力の変化（傾き）を表している。

一方、ばねの復元力も同様に基点と傾きの 2 項に分けることができ、

$$F_s = -k(x-a) = -k(b-a) - k(x-b) \quad (2)$$

と表される。問 7 のグラフのように $x = b$ で合成力が 0 となるはずであるから、式(1)と(2)の第一項どうしの和が 0 である。

従って $x = b$ 付近の合成力は第二項どうしを足せばよく、

$$F = -k(x-b) + \frac{\epsilon_0 S V^2}{b^3} \cdot (x-b) = -\left(k - \frac{\epsilon_0 S V^2}{b^3} \right) \cdot (x-b) \quad (3)$$

と近似され、ばね定数が見かけ上 $k - \frac{\epsilon_0 S V^2}{b^3}$ になる。

これによって、角振動数は

$$\omega = \sqrt{\frac{k - \frac{\epsilon_0 S V^2}{b^3}}{m}} \quad [\text{rad/s}] \quad \text{となる。} \quad (V=0 \text{ で最大値 } \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \text{ となる})$$

問 10 $F = F_s + F_v = -k(x-a) - \frac{\epsilon_0 S V^2}{2x^2}$ は問 7 の点線のように、上に凸で極大点を一つ持つ関数である。

この極大点が正であれば、その右側に $F = 0$ となりその近傍の変位に対して復元力が得られるつりあい点が生じるが、極大点が 0 または負になるとつりあい点を失い、上側の極板は下側の極板に急に吸いつけられる。

まず、極大の位置を求める。

極大点では $\frac{dF}{dx} = -k + \frac{\epsilon_0 S V^2}{x^3} = 0$ となることから, $x = \left(\frac{\epsilon_0 S V^2}{k} \right)^{\frac{1}{3}}$ 。

以下, 簡単のために $\frac{\epsilon_0 S}{k} = H$ と置くと, 極大の位置は $x = H^{\frac{1}{3}} V^{\frac{2}{3}}$

求める条件は極大点で $F = -k(x-a) - \frac{\epsilon_0 S V^2}{2x^2} = 0$ となる V の値。

$2kx^2(x-a) + \epsilon_0 S V^2 = 0$ に極大の位置を代入して,

$$2 \left(H^{\frac{1}{3}} V^{\frac{2}{3}} \right)^3 - 2a \left(H^{\frac{1}{3}} V^{\frac{2}{3}} \right)^2 + H V^2 = 0 \rightarrow 3H V^2 = 2a H^{\frac{2}{3}} V^{\frac{4}{3}} \rightarrow V^{\frac{2}{3}} = \frac{2a}{3} H^{-\frac{1}{3}}$$

$$\therefore V_1 = \left(\frac{2a}{3} \right)^{\frac{3}{2}} H^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{2a}{3} \right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{k}{\epsilon_0 S} \right)^{\frac{1}{2}} \text{ [V]}$$

$V < 0$ の場合についても, 力の式が V に関して偶関数であることから, 絶対値さえ同じであれば同じ力となる。従って, つりあいの位置が得られる電圧の範囲は

$$\left(\frac{2a}{3} \right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{k}{\epsilon_0 S} \right)^{\frac{1}{2}} > V > - \left(\frac{2a}{3} \right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{k}{\epsilon_0 S} \right)^{\frac{1}{2}}$$

(V_1 の別解)

つりあいの点 $x = b$ は, $F(x) = 0$ となる点である。従って b を求めるには方程式

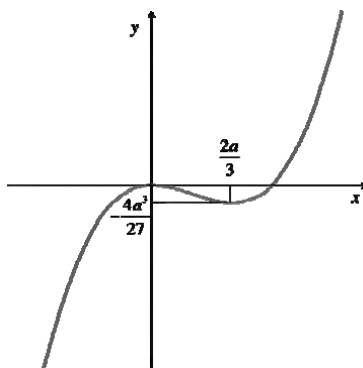
$$-k(x-a) - \frac{\epsilon_0 S V^2}{2x^2} = 0$$

を解けばよい。この式を変形すると,

$$x^2(x-a) = -\frac{\epsilon_0 S V^2}{2k}$$

となるが, $y = x^2(x-a)$ は, 右図のように

$$x = \frac{2a}{3} \text{ で極小値 } -\frac{4a^3}{27}, \quad x = 0 \text{ で極大値 } 0 \text{ を}$$



とる関数。これが, $y = -\frac{\epsilon_0 S V^2}{2k} (\leq 0)$ と $x > 0$ で交点を持つことが, つりあい点

が得られる条件であるから, $-\frac{4a^3}{27} = -\frac{\epsilon_0 S V^2}{2k}$ がつりあいを失う限界である。

$$V^2 = \frac{8a^3}{27} \frac{k}{\epsilon_0 S} \text{ より, } V_1 = \left(\frac{2a}{3} \right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{k}{\epsilon_0 S} \right)^{\frac{1}{2}} \text{ [V] となる。}$$

参考 1 専門家向けの解説

中村雅一，山田啓文：“走査型プローブ顕微鏡-最新技術と未来予測：第3章 3.2 節 電気力顕微鏡”，森田清三編著，丸善（東京，2005）より抜粋

静電気力顕微鏡（Electrostatic Force Microscopy: EFM）は，探針-試料間にはたらく静電気力を検出することにより，試料表面の電位，電荷分布，接触電位差などをマッピングすることができる SPM の一種である。AFM による静電気力の検出は，Martin らによって最初に試みられ^[1]，その後，Stern らによる高分子膜上の表面電荷可視化の実験が，現在の EFM の原型となる最初の報告となった^[2, 3]。さらに，表面研究における接触電位差測定に用いられていたケルビン法を応用した，ケルビンプローブ原子間力顕微鏡（Kelvin probe Force Microscopy: KFM）が Nonnenmacher らにより提案され^[4]，これによって試料の定量的な表面電位測定が可能となった。走査表面電位顕微鏡（Scanning Surface Potential Microscopy: SSPM）は通常 KFM と同じであり，電気力顕微鏡（EFM）も同義で用いられることが多い。走査マクスウェル応力顕微鏡（Scanning Maxwell-stress Microscopy: SMM）では^[5]，KFM と同様に表面電位のマッピングが可能であるが，後述するように測定方式がやや異なる。

原理

もっとも単純な系として，フェルミ準位が各々 E_{F1} ， E_{F2} の金属的な探針と平坦な導電性基板からなる 2 導体系を考える。導体電位を固定しない状態で両導体の真空準位が等しいとすると，両者のフェルミ準位は図 1 左のような関係にある。両者を電氣的に短絡してフェルミ準位を等しくすると，導体間には仕事関数の差に相当する接触電位差 V_s が生じ，導体間には電場が発生する。この電場の直接の源は，探針および試料導体上に誘起された表面電荷であり，探針-試料間隙には電気 2 重層が形成される。試料表面上に分子があれば，さらにその分極からの寄与が加わる。

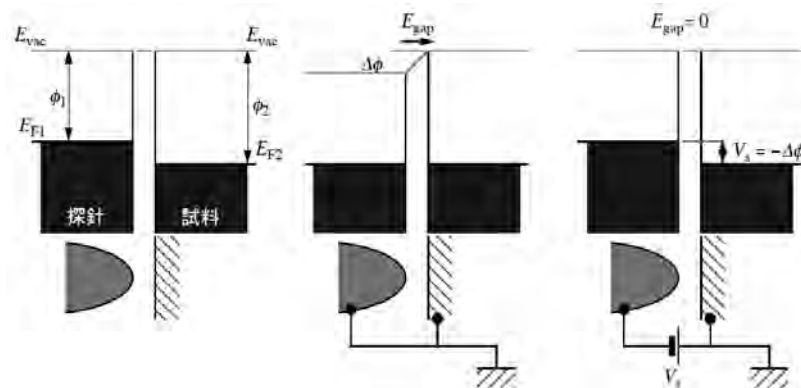


図 1 探針-試料のエネルギー準位図。それぞれ，探針・試料が絶縁されている状態（左），接地されている状態（中），真空準位が等しくなるように外部電圧を加えた状態（右）を表わす。

H22

解答例

この状態で、角周波数 ω_m の交流電圧 V_{AC} を探針-試料間に加えると、静電気力により探針は角周波数 ω_m で振動する。探針-試料間の電気容量を C （但し、 C は探針-試料間距離 z の関数）とすると、探針-試料間の静電気力 F_z^{el} は、

$$\begin{aligned} F_z^{el} &= -\frac{1}{2} \frac{\partial C}{\partial z} (V_s + V_{DC} + V_{AC} \cos \omega_m t)^2 \\ &= -\frac{1}{2} \frac{\partial C}{\partial z} \{ (V_s + V_{DC})^2 + 2(V_s + V_{DC}) V_{AC} \cos \omega_m t + V_{AC}^2 \cos^2 \omega_m t \} \quad (1) \end{aligned}$$

となる。ここで、 V_{DC} は探針に外部より加えられた電圧である。静電気力は電位の 2 乗に比例するため、応答周波数には DC 成分、 ω_m 成分、 $2\omega_m$ 成分が含まれる。DC 成分は探針-試料コンデンサー電極間に生じる静的な引力、 ω_m 成分は上述した直流電位差により生じた表面誘起電荷が変調交流電場によって受ける力、 $2\omega_m$ 成分は交流電圧による容量的な力を反映する。探針に接触電位差を打ち消す直流電圧を加えると ($V_s + V_{DC} = 0$) 表面電荷が誘起されなくなるため、 ω_m 成分は生じない。従って、変調電圧 V_{AC} を加えた状態で ($V_{DC} = -V_s$)、 ω_m 振動応答を抑圧するように V_{DC} を制御することで、表面電位あるいは接触電位差 (CPD) を求めることが可能となる。

KFM では、局所的な静電気力の検出を行うとともに、探針-試料間距離を制御するために探針-試料間相互作用力を測定する必要がある。これら 2 種類の力を検出する方式には、周波数変調 (FM) 検出法および振幅変化 (AM) 検出法をどのように組み合わせるかによって、表 1 に示すいくつかの動作方式に分かれる。一般的には、共振周波数近傍で機械的にカンチレバーを励振する、スロープ検出 (AM 検出、タッピングモード) による方法と、非共振周波数 (通常低周波数) の AC 電圧を探針-試料間に加え、この静電気力応答を検出する方法が広く用いられている (表中 (1) AM-AM 方式)。しかし、この方法では静電気力を非共振周波数での応答として捉えるため、高感度の静電気力計測は困難な場合が多い。そこで、形状信号と静電気力信号の検出を時間的に分離するリフトモードが開発された^[6]。リフトモードでは、まず、通常のタッピングモードによる最初の走査で形状情報を得る。2 回目の走査では、機械励振を行わず、最初の形状情報を基にして試料表面から一定距離だけ離れた位置を探針が走査するように制御される。このとき、バイアス電圧は共振周波数で変調され、理想的には静電気力のみがカンチレバーの振動応答となる。リフトモードでは、形状信号と静電気力信号の間のクロストークを改善することが可能であるが、2 回の走査の間に試料の位置ドリフトがあれば測定に誤差を生じるというデメリットもある。

NC-AFM における静電気力検出では、静電気力検出の高感度化を図るために電場変調周波数としてカンチレバーの共振周波数を選ぶ、表 3.2.1 における (3) FM-AM あるいは (4) FM-FM の方法が一般的である。(3) は、カンチレバーの Q 値が著しく高く、振幅変化の時間応答が悪くなる真空環境での KFM 動作を可能にするために開発された手法であり、探針-試料間距離制御に FM 検出法を用いるとともに、静電気力検出の励振周波数をカンチレバーの第 2 共振周波数に合わせることで静電気力検出の高感度化と高速化が図られている^[7]。この方法では第 2 共振周波数付近で振動する静電気力は AM 検出により測定される (FM-AM 方式)。これに対して (4) では、電場変調周波数を FM 検出帯域内に設定することで、FM 検出により形状信号と静電気力が、基本共振周波数で振動するカンチレバーの応答から同時に

検出される^[8]。この方法においては、変調周波数そのものは非共振周波数であっても、共振周波数の FM 変調成分として検出されることになる (FM-FM 方式)。周波数のシフト量は変調周波数ではなく、静電気力の大きさを反映することになる。従って、FM 検出法においては、非共振角周波数 ω_m における変調であっても、検出信号は共振角周波数 ω_0 の変調として捉えられるために感度利得 (ω_0 / ω_m) が得られ、電位分解能の点で有利となる。

表 1 KFM のカンチレバー励振・電場変調方式。 f_{res} : カンチレバーの基本共振周波数, $f_{\text{res}}^{(2)}$: 第 2 共振周波数, AM : スロープ検出方式, FM : 周波数変調検出法。

方 式	探針-試料間 距離制御	カンチレバー 励振周波数	静電力検出法	電圧変調周波数
(1) AM-AM	AM (タッピングモード)	$-f_{\text{res}}$	AM	非共振
(2) リフトモード AM-AM [2]	AM (タッピングモード)	$-f_{\text{res}}$	AM/リフトモード 時分割走査	$-f_{\text{res}}$
(3) FM-AM [3]	FM	f_{res}	AM	$-f_{\text{res}}^{(2)}$ ($f_{\text{res}}^{(2)} \sim 6.3f_{\text{res}}$) 第 2 共振周波数
(4) FM-FM [4]	FM	f_{res}	FM	FM帯域内 (共振利得あり)

参考文献

- [1] Y. Martin, D. W. Abraham and H. K. Wickramasinghe: *Appl. Phys. Lett.*, **52** (1988) 1103.
- [2] J. E. Stern, B. D. Terris, H. J. Mamin, D. Ruger: *Appl. Phys. Lett.*, **53** (1988) 2717.
- [3] B. D. Terris, J. E. Stern, D. Ruger, H. J. Mamin: *J. Vac. Sci. Technol.*, **A8** (1990) 374.
- [4] M. Nonnenmacher, M. P. O' Boyle and H. K. Wickramasigh: *Appl. Phys. Lett.*, **58** (1991) 1921.
- [5] H. Yokoyama, K. Saito, T. Inoue: *Mol. Electronics Bioelectronics*, **3** (1992) 79.

参考2 実際の装置構成例と用いる探針

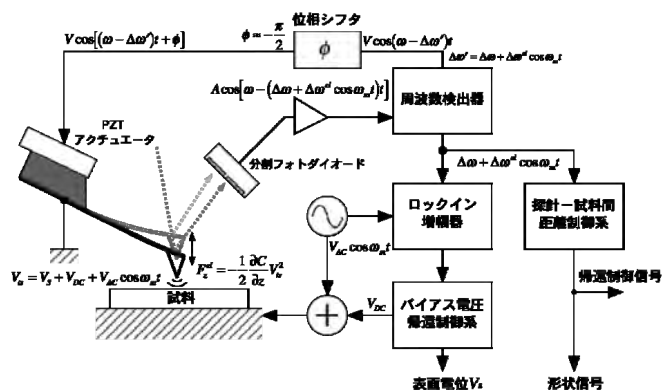


図3 装置構成の例 (FM 検出)

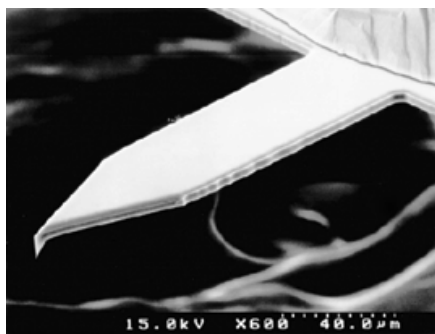


図4 一般的な AFM 用カンチレバーの外形

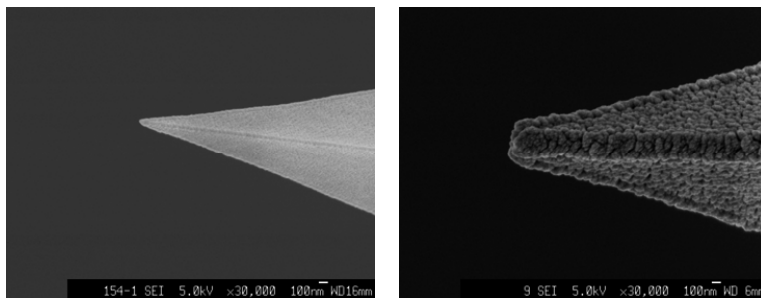


図5 探針先端の電子顕微鏡写真：(左)先端が尖っている場合，(右)先端がつぶれている場合

※右のような先の潰れた探針を試料表面に数十 nm 程度の距離まで近づけると，この問題で計算したような平行平板でもかなり良い近似となる。

平成 21 年度

千葉大学先進科学プログラム入学者選考課題

課題論述

実施時間 [9:00－17:00]

課題 II-A, II-B

(10:00－15:30)

注意事項

課題Ⅱには、[Ⅱ－A]、[Ⅱ－B]、[Ⅱ－C]、[Ⅱ－D]の4題があります。
志望するコースによって、次に示す問題を解答してください。

- ・物理学コース、フロンティアテクノロジーコース：
[Ⅱ－A]、[Ⅱ－B]の両方を解答してください。
- ・人間探求コース：
[Ⅱ－A]、[Ⅱ－B]、[Ⅱ－C]、[Ⅱ－D]の中から2題を選択して解答してください。

[II-A]

ニュートンの万有引力の法則によれば、質量 M と質量 m を持つ2つの質点（大きさの無視できる物体）には、質量の積 Mm に比例し質点間の距離 r の2乗に反比例する大きさの引力が両質点を結ぶ直線に沿う方向に働く。以後、質量 M を持つ質点を質点 M 、質量 m を持つ質点を質点 m と呼ぶことにする。いま、質点 M に対する質点 m の位置ベクトルを $\vec{r}$ とすると、質点 M が質点 m におよぼす万有引力は、ベクトルで書くと、

$$\vec{F} = -F(r)\frac{\vec{r}}{r}, \quad F(r) = |\vec{F}| = G\frac{Mm}{r^2}$$

で与えられる。ここで、 G は物体によらない定数で重力定数と呼ばれる。多数の質点がある場合には、それぞれの質点からの万有引力のベクトルの和として合力を計算すればよい。また、大きさが無視できない物体や、質量が連続的に分布している場合でも、それらを微小な質量部分に分割し、それぞれからの万有引力の寄与を足し合わせればよい。

万有引力に対しては、

性質★「球対称な質量分布が、その外部にある点 P におよぼす力は、全質量が球心に集中した場合に等しい。」

を示すことができるが、証明なしにこれを認めることにする。ここで、球対称な質量分布とは、質量密度が、ある点からの距離のみに依存する場合で、その点が球対称の中心（球心）である。

観測によれば、太陽を回る惑星は、次のケプラーの法則に従う。

第一法則　惑星は太陽を1つの焦点とするだ円軌道を描く。

第二法則　惑星と太陽とを結ぶ線分が一定時間に通過する面積は一定である。

第三法則　惑星の公転周期の2乗は、だ円軌道の長半径の3乗に比例する。

ニュートンは、太陽が惑星に万有引力を及ぼすとしてケプラーの法則を説明することに成功した。

以下、半径 R の球面内に球対称な質量分布があり、その全質量が M である場合（簡単のため球体 M と呼ぶことにする）を考える。球対称な質量分布では、球心から測った距離を r としたとき、質量密度 ρ は一般には r の関数 $\rho(r)$ であって、必ずしも一定とは限らないことに注意しなさい。

問1

質点 m が球体 M の内部にいる場合 ($r < R$) には、質点 m が受ける万有引力は、球体 M 内の質量分布によって異なることを確かめよう。

- (a) 球体 M が球殻（厚さの無視できる球面）である場合には、その内部にいる質点 m には万有引力は働かない、つまり、 $\vec{F} = \vec{0}$ となる。このことを、図1に示すような、質点 m のある点 P を錐体の頂点とする2つの錐体によって切り取られる球殻上の2つの微小部分 M_A, M_B を考察することで示しなさい。

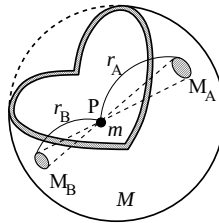


図1

- (b) 前問 (a) の結果を用いて、球体 M の内部にいる質点 m に働く万有引力を求めるには、それより内側にある質量分布からの万有引力のみを考えればよいことを説明しなさい。
- (c) 質量密度が一定のとき、性質★を用いて、質点 m に働く万有引力の大きさ $F(r)$ を求めなさい。それから万有引力の位置エネルギー $U(r)$ を求めなさい。また、その結果を用いて、 $F(r)$ と $U(r)$ のグラフを、 $r < R$ と $r \geq R$ の違いがわかるように描きなさい。ただし、 $r = \infty$ では $U = 0$ とする。
- (d) 質量密度 ρ が r の関数 $\rho(r)$ であるとき、半径 r の球体の質量 $M(r)$ は $M(r) = \int_0^r 4\pi a^2 \rho(a) da$ で与えられる。これを用いて、球体 M の内部の（原点 $r = 0$ を除く）すべての点で万有引力の大きさ $F(r)$ が一定になるような質量密度 ρ を r の関数として求めなさい。ただし、 $F(r) = 0$ の場合を除く。

問2

図2のように、半径 R の球体表面上のある点 A から球体内部に向かってまっすぐに細いトンネルを掘り進め、球体を突き抜けた点を B とする。このトンネルを通過する質点 m の運動を考えよう。トンネルの向きは、点 A での鉛直下向きから測った角度 φ ($0 \leq \varphi < \pi/2$) で指定する。球体 M の質量密度が一定の場合、トンネルが球の中心を通るとき ($\varphi = 0$) には、質点はトンネル内では単振動をすることが知られている。以下では、トンネルの空洞部分の重力への影響や質点とトンネルとの摩擦や空気抵抗は無視してよい。

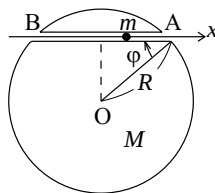


図2

- (a) 球体 M の質量密度が一定で、角度 φ が ($\varphi = 0$ とは限らない) 一般の場合に、質点 m に働く万有引力のトンネルに沿った方向の大きさと向きを答えなさい。ただし、トンネル内の質点 m の位置は、図 2 のように、トンネルの中心を原点とする座標 x で記述する。
- (b) 前問 (a) のとき、時刻 $t = 0$ で質点 m を点 A からトンネル内に静かに落下させる。任意の時間 t ($t > 0$) での質点 m の x 座標 $x(t)$ を求めなさい。また、質点が初期位置 A に最初に戻ってくるまでの時間 T を求めなさい。
- (c) 今度は、質点 m を点 A から人工衛星のように球面すれすれに等速円運動させた。このとき、点 A に最初に戻ってくるのに要する時間 T' を求めなさい。
- (d) (c) で求めた T' は (b) で求めた T に等しくなる。この理由を (式を用いずに) 文章と図を用いて説明しなさい。
- (e) 球体 M の質量密度が一定の場合に、点 A から初速 v_0 で角度 φ のトンネルに入射した質点 m がトンネルを通過して点 B から飛び出した。それ以後の運動を考えよう。ただし、 $\sqrt{\frac{GM}{R}} \leq v_0 < \sqrt{\frac{2GM}{R}}$ の範囲で考える。
- (e-1) $\varphi = 0$ の場合に、質点が球心から最も離れたときの球心からの距離を求めなさい。
- (e-2) φ が一般の場合に、質点が球心から最も離れたときの球心からの距離を求めなさい。特別な場合として、 $\varphi = 0$ と $\varphi \rightarrow \pi/2$ の結果が正しく再現されているか確かめなさい。
- (f) 球体内部の質量密度が一様でない場合として、質量密度 ρ が、 $\frac{1}{2}R < r \leq R$ では ρ_1 、 $0 \leq r \leq \frac{1}{2}R$ では ρ_2 で与えられる場合を考える。ここで、 ρ_1, ρ_2 は負でない定数である。トンネルは、常に密度 ρ_1 の領域内 ($\pi/6 \leq \varphi < \pi/2$) にあるようにまっすぐに掘るとする。このとき、質点 m の位置 x での速度 v_x を求めなさい。この結果を用いて、点 A から出発して点 A に戻ってくるのに要する時間 T をなるべく小さくするには ρ_1, ρ_2 および φ の値をどう選べばよいか答えなさい。ただし、球体の全質量 M は常に一定に保つとする。

[II-B]

光や電波は、互いに垂直な電場と磁場が空間を伝わる電磁波として理解できる。教科書に書かれている電磁気の知識により、光や電波の性質を説明できることを確かめてみよう。電磁波のエネルギーは、電場のエネルギーと磁場のエネルギーの和として表すことができる。電場や磁場のエネルギーは大学の物理で学ぶ新しい考え方である。

問 1

次の設問に沿って、電場や磁場のエネルギーはどのようにして見積もることができるか考えなさい。

- (a) 極板面積が S で、極板間距離が d の平行板コンデンサーに電荷 Q が蓄えられている。このときコンデンサーに蓄えられたエネルギー U と電極間の電場 E を求めなさい。ただし極板の間は狭く ($d \ll \sqrt{S}$) 真空中で、その誘電率は ε_0 とする。
- (b) コンデンサーに蓄えられたエネルギーは、極板の間に挟まれた電場の強い領域の体積 $V = Sd$ に比例し、かつ電場 E の 2 乗に比例することを示しなさい。
- (c) (b) の結果は、コンデンサーのエネルギーは電場の強い領域に蓄えられていると考えても矛盾がないことを示している。この考えにそって、電場が E である領域に蓄えられる単位体積あたりのエネルギーを見積りなさい。
- (d) 半径が a で全長が ℓ 、全巻数が N のソレノイドコイルが真空中におかれている。このコイルに電流 I が定常的に流れているとき、コイルの中心の磁束密度 B とコイルに蓄えられているエネルギー U を求めなさい。ただし $a \ll \ell$ で、真空の透磁率は μ_0 とする。
- (e) コンデンサーのときの考えを応用し、磁束密度が B である領域に蓄えられる単位体積あたりのエネルギーを見積りなさい。

問 2

電磁波の進行に伴って、電場も磁場も変動する。磁場が変化すると起電力が生じるので、電場が生まれる。逆に電場が変化すると、あたかもそこに電流が流れたのと同じように磁場が生まれる。これらの二つの作用を次の設問に従って考えなさい。

- (a) 図 1 に示すように幅が a で無限に長い領域を一様につらぬいている磁場が、 Δt の時間に ΔB だけ増加した。このとき、図 1 に示すような幅が a で長さが ℓ の長方形の導線をおいた場合に発生する誘導起電力の大きさと向きを求めなさい。さらに誘導起電力の大きさから、長方形の内部や周囲にどのような

な電場が発生するか考えなさい。ただし、短い区間 $\Delta \vec{\ell}$ にかかる起電力は、電場との内積 ($= \vec{E} \cdot \Delta \vec{\ell}$) で表せることを証明せずに使ってよい。

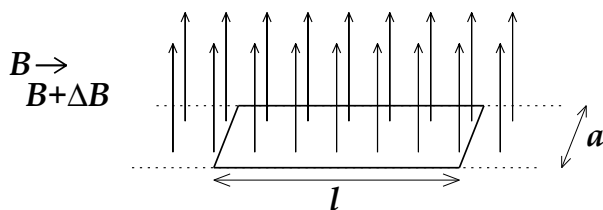


図 1

- (b) 図 2 に表すように z 方向に伝わる電磁波を考えよう。ここでは簡単のため、電場は x 成分だけ、磁場は y 成分だけをもつとする。また電場と磁場の強さは時刻 t と位置 z だけによるとする。磁場が図 3 に示すような波形を保ったまま、速度 v で z 方向に伝わる時、(a) での考察をもとに 電場の強さを求めなさい。計算では

$$B_y(z, t) = \begin{cases} 0 & z \leq vt - 2a \\ B_0 \frac{z - vt + 2a}{a} & vt - 2a < z < vt - a \\ -B_0 \frac{z - vt}{a} & vt - a \leq z \leq vt + a \\ B_0 \frac{z - vt + 2a}{a} & vt + a < z < vt + 2a \\ 0 & z \geq vt + 2a \end{cases} \quad (1)$$

と考えなさい。

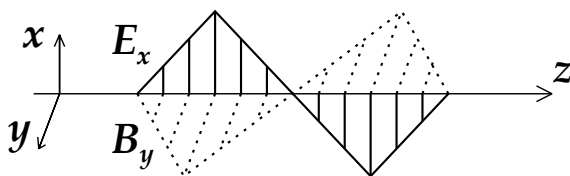


図 2

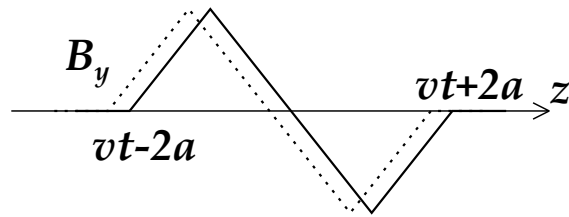


図 3

- (c) 図 4 のように断面積が一定の導線が切断されている。上半分と下半分に同じ電流 I を流しても、切断面に電荷がたまるだけで電流は流れない。しかし導線の周囲には、切断された区間にも電流 I が流れているのと同様の磁場ができる。コンデンサーの場合を参考にしながら、切断面の間に発生する電場の時間変化を求めなさい。またこのことを利用し、 Δt の短い時間に電場が ΔE だけ増えた場合にできる磁場と同じ磁場をつくるには、単位面積あたりどれだけの電流を流せばよいか考えなさい。電流の値だけでなく、流す方向についても答えなさい。
- (d) (b) で求めたように電場が変化すると、それにより磁場が発生するはずである。発生する磁場の大きさを求めなさい。電場の時間変化から求めた磁場が、(b) で仮定した磁場と一致するための条件を数式で表しなさい。またその数式が意味することを論じなさい。
- (e) (d) での条件が満たされたとき、電場のエネルギーと磁場のエネルギーの比はどうか求めなさい。

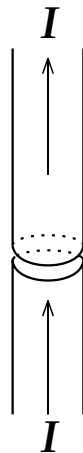


図 4

平成 21 年度

千葉大学先進科学プログラム入学者選考課題

課題論述

実施時間 [9:00－17:00]

課題 I

(9:00－15:30)

注意事項

1. 課題 I は、諸君のいろいろな能力を多面的に見るための設問ですので、できるだけ筋道を立てて諸君自身の考えをわかりやすく記述してください。
2. 検査室に用意してある資料、電卓は自由に使用してもかまいません。また諸君が持参した教科書、参考書、辞書（辞典）、ノートなどを参照してもかまいません。ただしパソコンの使用は禁止します。
3. 解答作成中に、控え室で自由に休んだり食事をしてもかまいませんが、外出することはできません。
4. 携帯電話の電源を必ず切ってください。

[I]

問 1 ブランコをタイミングよくこぐとなぜ振れが大きくなるのだろうか？ そのしくみを考えてみよう。

ブランコを立ちこぎしているときの動作を思い起こしてみると、膝を曲げたり伸ばしたりしている。この動作は、あたかも図 1 のように糸を伸ばしたり縮めたりして、支点とおもりの間の長さを変えながら動かす振り子に似ている。試験室に用意したブランコの動画を見たり、振り子の模型で実験するなどして、気がついたことをもとに、どのような理由でブランコの振れが大きくなっていくのかを説明しなさい。

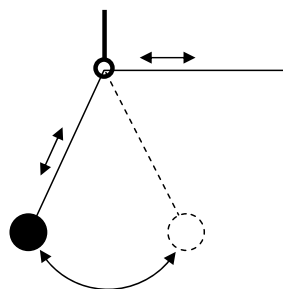


図 1 糸の長さが変わる振り子

問 2 図 2 に示すような箱型のブランコは、箱の中で人が動くことによりぐるぐる回転する。この回転ブランコは、図 3 のように、箱がその向きを一定に維持しながら、中心点の周りを円状に回転する。詳しい仕組みは試験室に用意した動画を参照しなさい。箱の中の人がどのような動き方をすれば、この回転ブランコをうまく回転させることができるだろうか？ その動き方と理由を、問 1 のブランコと比較しながら説明しなさい。



図 2 回転ブランコの写真

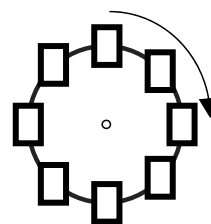


図 3
回転ブランコの簡略図

問 3 以上のブランコのように、何らかの動作をタイミングよく行うことで動かすユニークな遊具やおもちゃを考案し、図を用いて遊び方を説明しなさい。

試験室に用意してあるもの：

- (1) ブランコの立ちこぎの様子と、回転ブランコの動画を繰り返し映す装置。
- (2) おもりとひもを組み合わせた実験小道具（一人 1 セット）

平成 21 年度

千葉大学先進科学プログラム入学者選考課題

課題 II-A 解答例

[II-A] 解答例

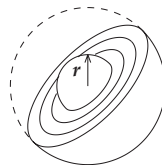
問 1

- (a) 点 P を錐体の頂点とする 2 つの錐体によって切り取られる球殻上の 2 つの微小部分 M_A, M_B の質量 M_A, M_B の比は、2 つの錐体が相似で、質量（面）密度が一定であることから、 $M_A : M_B = r_A^2 : r_B^2$ である。微小部分 M_A, M_B が質点 m に及ぼす万有引力は反対向きでその大きさの比は、

$$\frac{F_A}{F_B} = \frac{GmM_A/r_A^2}{GmM_B/r_B^2} = \frac{M_A r_B^2}{M_B r_A^2} = 1 \quad (1)$$

であるから、互いに打ち消しあう。球殻全体は、このようなペアの集合に分割できるので、球殻が質点に及ぼす万有引力は、全てキャンセルする。

- (b) 球対称質量分布を球心を中心とする薄い球殻に分割する。質点の外側に位置する各球殻からの万有引力は (a) で示したようにキャンセルする。よって、質点より内側の球体部分からの万有引力のみを考えればよい。



- (c) 外側 $r > R$ は、性質 (*) より、力の大きさは、

$$F(r) = \frac{GmM}{r^2} \quad (2)$$

そのポテンシャルは、

$$U(r) = U(\infty) + \int_{\infty}^r dr \frac{GmM}{r^2} = -\frac{GmM}{r} \quad (3)$$

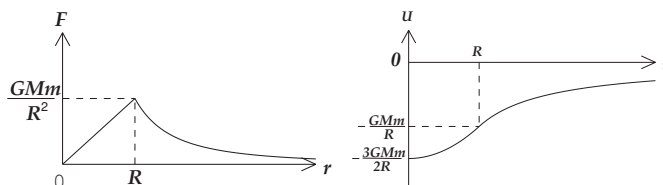
内側 $r < R$ は、性質 (*) より、質点より内側にある質量は、 $M_0 = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_0$ であるから、力の大きさは、

$$F(r) = G \frac{mM_0}{r^2} = Gm \frac{4}{3}\pi \rho_0 r = \frac{GmM}{R^3} r \quad (4)$$

そのポテンシャルは、

$$U(r) = -\frac{Gm}{R} + \int_R^r dr Gm \frac{4}{3}\pi \rho_0 r = Gm \frac{4}{3}\pi \rho_0 \frac{1}{2} (r^2 - 3R^2) = \frac{GmM}{2R^3} (r^2 - 3R^2) \quad (5)$$

グラフは、以下の通り。



(d) 半径 r の点で働く力は,

$$F(r) = \frac{GmM(r)}{r^2}, \quad M(r) = \int_0^r da 4\pi a^2 \rho(a) \quad (6)$$

である。これが一定であることから, $F(r) = C$ すなわち

$$\int_0^r da 4\pi a^2 \rho(a) = Kr^2, \quad K = \frac{C}{Gm} \quad (7)$$

両辺を r で微分すると, $4\pi r^2 \rho(r) = 2Kr$, つまり $\rho(r)$ は r^{-1} に比例する。 $M(R) = M$ より, 比例係数を求めて,

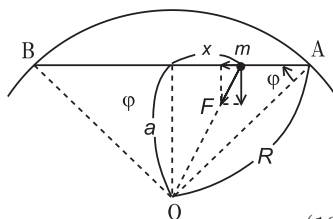
$$\rho(r) = \frac{M}{2\pi R^2 r} \quad (8)$$

問2

(a) 質点の球心からの距離が $r = (x^2 + a^2)^{1/2}$ であるから, 万有引力のトンネルに沿う成分は,

$$\begin{aligned} F_x = F(r) \frac{x}{r} &= -Gm \frac{\frac{4}{3}\pi(x^2 + a^2)^{3/2}\rho}{x^2 + a^2} \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} \\ &= -Gm \frac{4}{3}\pi \rho x = -\frac{GmM}{R^3} x \end{aligned} \quad (9)$$

ここで, a は球心からトンネルの中心までの距離 $R \sin \varphi$ である。力の向きは, トンネルの中心に向かう向き。



(b) 質点の運動方程式は, (a) より

$$ma = -\frac{GmM}{R^3} x \quad (10)$$

となり, $a = -\omega^2 x$ より, 角振動数 $\omega = \sqrt{\frac{GM}{R^3}}$ の単振動をあらわす。 $t = 0$ で $x(0) = R \cos \varphi$, $v(0) = 0$ より,

$$x(t) = R \cos \varphi \cos \left(\sqrt{\frac{GM}{R^3}} t \right) \quad (11)$$

T は周期に等しいので,

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{R^3}{GM}} \quad (12)$$

H21

解答例

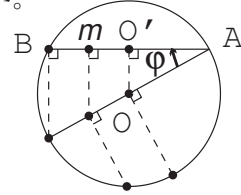
- (c) 万有引力が等速円運動の向心力となっているので、等速円運動の角振動数を Ω とすると、

$$\frac{GmM}{R^2} = mR\Omega^2 \quad (13)$$

これより、 $\Omega = \sqrt{\frac{GM}{R^3}}$ となるので、

$$T' = \frac{2\pi}{\Omega} = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{GM}} \quad (14)$$

- (d) 点 A を端点とし、球心を通る単振動は、等速円運動を直径（球心を通るトンネル）上に射影したものに等しいから、その単振動の周期は (c) の等速円運動の周期と等しい。一方、点 A を端点に持ち球心を通らない任意のトンネル内の単振動は、球心を通る単振動を射影したものと等しいから、この単振動の周期は球心を通る単振動のそれと同じである。このことは、(b) の単振動が、トンネルの角度 φ に依らないことから分かるが、図に示すと明らかである。以上より、任意の角度のトンネル内の単振動の周期は、等速円運動の周期に等しい。

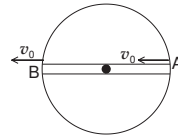


- (e) (e-1) エネルギー保存則より、

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{GmM}{R} = -\frac{GmM}{r} \quad (15)$$

これより

$$r = \frac{R}{1 - \frac{R}{2GM}v_0^2} \quad (16)$$



- (e-2) 点 B を通過した後は、(球面上に再び到達するまでは) 質点は楕円軌道を描いて運動する。エネルギー保存則より、

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{GmM}{r} = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{GmM}{R} \quad (17)$$

前問 (e-1) と異なり、 v が未定なので、これだけでは r は決まらない。一方、面積速度一定（角運動量保存則）より

$$rv = Rv_0 \sin \varphi \quad (18)$$

の関係がある。なぜなら、面積速度は、球心から速度の方向に下ろした垂線の長さ a と v との積に等しいが、この垂線の長さは、球心からトンネルの中心までの距離 $a = R \sin \varphi$ に等しいから（図を参照）。

これら2つの式から、 v を消去すると、 r の2次式

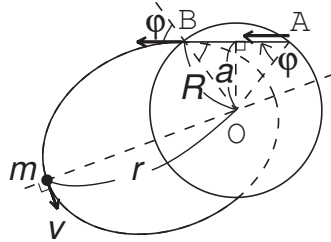
$$\left(\frac{2GM}{R} - v_0^2\right)r^2 - 2GMr + R^2v_0^2\sin^2\varphi = 0 \quad (19)$$

になるが、 r の最大値を求めるには、解として

$$r = \frac{GM + \sqrt{G^2M^2 + (-2GM R v_0^2 + R^2 v_0^4)\sin^2\varphi}}{\frac{2GM}{R} - v_0^2} \quad (20)$$

を採用する。この式は、 $\varphi = 0$ のとき、確かに上の結果(e-1)を再現する。 $\varphi \rightarrow \pi/2$ のときは、

$$r = \frac{Rv_0^2}{\frac{2GM}{R} - v_0^2} \quad (21)$$



(f) 万有引力は、

$$F(r) = \frac{Gm}{r^2} \left\{ \frac{4\pi}{3} \left(\frac{1}{2}R\right)^3 \rho_2 + \frac{4\pi}{3} \left[r^3 - \left(\frac{1}{2}R\right)^3 \right] \rho_1 \right\} \quad (22)$$

万有引力のトンネルに沿う成分は、 $r = (x^2 + a^2)^{1/2}$ より

$$\begin{aligned} F_x = F(r) \frac{x}{r} &= \frac{4\pi}{3} Gm \left\{ \rho_2 \frac{1}{8} R^3 \frac{x}{r^3} + \rho_1 \left(x - \frac{1}{8} R^3 \frac{x}{r^3} \right) \right\} \\ &= \frac{4\pi}{3} Gm \left\{ \frac{1}{8} R^3 (\rho_2 - \rho_1) \frac{x}{(x^2 + a^2)^{3/2}} + \rho_1 x \right\} \end{aligned} \quad (23)$$

そのポテンシャルは、

$$U(x) = \int_{x_0}^x dx F_x - \frac{GmM}{R} = V(x) - V(x_0) - \frac{GmM}{R}, \quad (24)$$

ここで、 $x_0 = R \cos \varphi$ 、 $V(x)$ の定義は、

$$V(x) = \frac{4\pi}{3} Gm \left\{ \frac{1}{8} R^3 \frac{(\rho_1 - \rho_2)}{(x^2 + a^2)^{1/2}} + \frac{1}{2} \rho_1 x^2 \right\}, \quad a = R \sin \varphi \quad (25)$$

一方、全質量は、

$$M = \frac{4\pi}{3} \left(\frac{1}{2}R\right)^3 \rho_2 + \frac{4\pi}{3} \left[R^3 - \left(\frac{1}{2}R\right)^3 \right] \rho_1 = \frac{4\pi}{3} \frac{\rho_2 + 7\rho_1}{8} R^3 \quad (26)$$

エネルギー保存則

$$E = \frac{1}{2}mv_x^2 + U(x) = -\frac{GmM}{R} \quad (27)$$

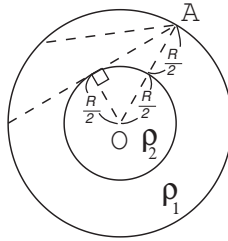
より速度は,

$$v_x = \sqrt{\frac{2}{m}[E - U(x)]} = \sqrt{\frac{2}{m}[V(x_0) - V(x)]} \quad (28)$$

従って, v_x をできるだけ大きくするには, ポテンシャル $U(x)$ あるいは $V(x)$ をできるだけ小さくすればよい。このためには, M を一定に保ちながら, 単振動からのずれの部分 $\frac{(\rho_1 - \rho_2)}{(x^2 + R^2 \sin^2 \varphi)^{1/2}}$ をできるだけ大きな負の値にすればよい。よって, $\rho_2, \rho_1 \geq 0$ の範囲で, $\rho_2 + 7\rho_1 (= c)$ を一定に保ちながら, $\rho_2 - \rho_1 (= s)$ をできるだけ大きな正の値にすると同時に φ はできるだけ小さな値にすればよい。2つの直線が交わる範囲を考えれば, $s = c$ の場合にこれが実現する。

以上より, v_x が最も大きくなるのは, トンネルが密度 ρ_2 の球に接する場合で,

$$\varphi = \pi/6, \quad \rho_1 \rightarrow 0, \quad \rho_2 \rightarrow \frac{M}{\frac{4\pi}{3} \left(\frac{1}{2}R\right)^3} \quad (29)$$



周期は,

$$T = \int_{t_1}^{t_2} dt = \sqrt{2m} \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}} \quad (30)$$

を計算すれば求められる。

質点の速度を最大にするには, 質点ができるだけ大きな力を受けられるように, トンネルより内側にできるだけ多くの質量が近い距離に集中するほうがよいと考えられるが, この結果は確かにこの直感的理解と一致する。

平成 21 年度

千葉大学先進科学プログラム入学者選考課題

課題 II-B 解答例

[II-B] 解答例

問 1

(a)

$$U = \frac{QV}{2} = \frac{CV^2}{2} = \frac{Q^2}{2C} \quad (1)$$

$$C = \varepsilon_0 \frac{S}{d} \quad (2)$$

$$Q = CV \quad (3)$$

$$E = \frac{V}{d} \quad (4)$$

を組み合わせることにより,

$$U = \frac{Q^2 d}{2\varepsilon_0 S} \quad (5)$$

$$E = \frac{Q}{\varepsilon_0 S} \quad (6)$$

(b)

$$U = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} Sd \quad (7)$$

(c) 単位体積あたり $\varepsilon_0 E^2/2$ のエネルギーが蓄えられていると考えるのが妥当である。

(d) 単位長さ当たりの巻き数 $n = N/\ell$ なので

$$H = \frac{IN}{\ell} \quad (8)$$

$$B = \mu_0 H = \frac{\mu_0 IN}{\ell} \quad (9)$$

$$U = \frac{LI^2}{2} \quad (10)$$

また断面積 $S = \pi a^2$ なのでコイルのインダクタンスは

$$L = \frac{\pi a^2 \mu_0 N^2}{\ell} \quad (11)$$

なので,

$$U = \frac{\pi a^2 \mu_0 N^2 I^2}{2\ell} \quad (12)$$

である。

(e) (d) の結果を整理すると、

$$U = \frac{B^2}{2\mu_0} \pi a^2 \ell \quad (13)$$

と表現できるので、単位体積当たり $B^2/2\mu_0$ のエネルギーが磁場に蓄えられていると考えるのが妥当である。

問 2

(a) 磁束は $\Phi = B\ell a$ なので磁束の変化は $\Delta\Phi = \Delta B\ell a$ となる。従って、長方形を 1 周する経路にそった起電力の大きさは

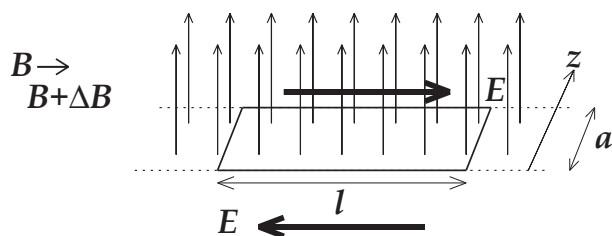
$$V = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -\frac{\Delta B}{\Delta t} \ell a \quad (14)$$

となる。議論を分かりやすくするため、以下では磁場の方向を x 、磁場の帯が延びる方向を y 、これらに垂直な方向を z としよう。問題の磁場分布は y 方向に一様なので、電場も y 方向に一様なはずである。また $(y, z) = (0, 0)$ を中心に 180° 回転しても元の磁場分布が再現できる (点対称) なので、長さが a の辺に生じる起電力はどちらも 0 となるはずである (0 でないなら 180° したとき、符号が異なり矛盾する)。これらのことより、 ℓ の辺での電場を E とすると起電力は $2E\ell$ なので、 $E = (a/2)(\Delta B/\Delta t)$ が得られる。

幅が a よりも狭い長方形の導線をおいて考えると、囲まれる磁束が幅に比例するので、起電力も幅に比例して小さくなる。幅を a より大きくしても、囲まれる磁束は変わらないので、起電力は一定である。これらのことを考えると、電場の絶対値は

$$|E| = \begin{cases} \frac{\Delta B}{\Delta t} |z| & |z| \leq a/2 \\ \frac{\Delta B}{\Delta t} \frac{a}{2} & |z| > a/2 \end{cases} \quad (15)$$

となるはずである。ここで z は磁場の帯の中心を 0 とし、それに垂直な座標である。



太い矢印は、磁場が増える場合に発生する電場の向きを表している。

(b) 微少な時間 Δt での磁場の変化 ΔB は

$$\Delta B = \begin{cases} 0 & z \leq vt - 2a \\ -\frac{B_0 v \Delta t}{a} & vt - 2a < z < vt - a \\ \frac{B_0 v \Delta t}{a} & vt - a \leq z \leq vt + a \\ -\frac{B_0 v \Delta t}{a} & vt + a < z < vt + 2a \\ 0 & z \geq vt + 2a \end{cases} \quad (16)$$

なので、真ん中に幅 $2a$ で磁場が増える領域が現れ、その両側に幅 a で磁場が減る領域が現れる。(各区間の端での磁場の変化を数学的に厳密に取り扱うのは難しいので、ここでは要求しない。) 各区間では微少な時間での磁場の変化が一定なので、(a) を適用できる。すなわち、各区間の内部では z の増加に伴い、電場が一定の割合で増えるはずである。各区間での磁場の増減を考えると、電場の強さは

$$E_x(z, t) = \begin{cases} 0 & z \leq vt - 2a \\ B_0 v \frac{z - vt + 2a}{a} & vt - 2a < z < vt - a \\ -B_0 v \frac{z - vt}{a} & vt - a \leq z \leq vt + a \\ B_0 v \frac{z - vt - 2a}{a} & vt + a < z < vt + 2a \\ 0 & z \geq vt + 2a \end{cases} \quad (17)$$

となるはずである。この結果は z がいくつであっても

$$E_x = v B_y \quad (18)$$

が成り立っていることを意味している。

(c) 図のように電流 I が流れると、上下の切断面に $\pm Q$ の電荷がたまる。下の切断面にたまる電荷を Q とするとその時間変化は

$$\frac{dQ}{dt} = I \quad (19)$$

と表される。導線の断面積を S とすると、切断された箇所には

$$E = \frac{Q}{\varepsilon_0 S} \quad (20)$$

の上向きの電場が発生する。従って電場の時間変化は

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{I}{S} \quad (21)$$

となる。右辺の I/S は導線を通る単位面積当たりの電流を意味するので、電場が変化した領域には発生する磁場は、単位面積あたり $\varepsilon_0 dE/dt$ の電流が流れている場合の磁場と同等の強さであると考えられる。電場 E の増加と電流の向きは同じなので、発生する磁場の向きは、電場の増加する向きに電流が流れていると考えて計算すればよい。

(d) (b) と同じように電場の変化を計算すると、

$$\frac{\Delta E}{\Delta t} = \begin{cases} 0 & z \leq vt - 2a \\ -\frac{B_0 v^2}{a} & vt - 2a < z < vt - a \\ \frac{B_0 v^2}{a} & vt - a \leq z \leq vt + a \\ -\frac{B_0 v^2}{a} & vt + a < z < vt + 2a \\ 0 & z \geq vt + 2a \end{cases} \quad (22)$$

となる。この電場の変化により、中央の幅 $2a$ の領域には単位面積あたり $\varepsilon_0 B_0 v^2/a$ の電流が、その左右の幅 a の領域には単位面積あたり $-\varepsilon_0 B_0 v^2/a$ の電流が流れているときと同じ大きさと同じ向きの磁場ができる。電流がつくる磁場を合計すると

$$B_y(z, t) = \begin{cases} 0 & z \leq vt - 2a \\ \varepsilon_0 \mu_0 v^2 B_0 \frac{z - vt + 2a}{a} & vt - 2a < z < vt - a \\ -\varepsilon_0 \mu_0 v^2 B_0 \frac{z - vt}{a} & vt - a \leq z \leq vt + a \\ \varepsilon_0 \mu_0 v^2 B_0 \frac{z - vt - 2a}{a} & vt + a < z < vt + 2a \\ 0 & z \geq vt + 2a \end{cases} \quad (23)$$

となる。問題文と比較すると、 $\varepsilon_0 \mu_0 v^2 = 1$ であれば、元と同じ磁場が得られることが分かる。

教科書の巻末に載っている値 $\varepsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \text{ F/m}$ と $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}$ を代入して調べると $v = \pm 3.0 \times 10^8 \text{ m/s}$ のとき条件が満たされることが分かる。これは電磁波が光速で伝わることを意味している。速度 v が負の場合は問題の図で左に進む場合を表している。途中に $E_x = vB_y$ という関係式があったので、電場か磁場の向きを変えると電磁波の進行方向が変わることが分かった。

(e) 単位体積あたりの電場のエネルギーは $\varepsilon_0 E_x^2/2$ であるが、式 (18) と $v = c$ を使うと、

$$\frac{\varepsilon_0 E_x^2}{2} = \frac{\varepsilon_0 c^2 B_y^2}{2} = \frac{B_y^2}{2\mu_0} \quad (24)$$

と変形できるので、どの場所でも磁場のエネルギーと等しい。従って、全体も等しい。

平成 21 年度

千葉大学先進科学プログラム入学者選考課題

課題 I 解答例

H2I

解答例

課題 I 課題趣旨と解答例

1. 【経験やビデオを見ての現象の観察力、説明を通しての解析・論理・表現力を問う】

どこに注目するかは、学生ごとに異なるかも知れない。観察、分析して、それを元に論理を組み立て、ちゃんと説明することができるかを評価したい。(ブランコの物理を理詰めでも考えても良いし、実験で得られる体感的な事実に基づいて説明しても良い。実際、糸を引いたりゆるめたりしておもりを回転させてみると、おもりに力を加えて加速している様子が実感できる。)

<解答例>

・ビデオを観察すると、動いている時に膝を伸ばし、止まるときに膝を曲げている。ところで、スケートで回転している時には、腕を縮めると回転速度が速くなり運動のエネルギーは増える。これと同じように、ブランコで膝をのばすと回転中心からの距離が減るために、運動エネルギーは増えることになる(遠心力に逆らって仕事をしている)。一方、止まるときに膝を縮めても、止まっているために運動エネルギーは減ることないので、この運動を繰り返していると揺れのエネルギーは増えていく。

・ビデオを観察すると、止まるときに膝を曲げ、ふれながら下付近で膝を伸ばしている。下で膝を伸ばすと、伸ばした長さだけ位置エネルギーを獲得する。一方、止まるときに膝を曲げると、同じ長さ曲げても、止まる点は傾いているために失う位置エネルギーは先ほどより少ない。このために、この運動を繰り返すとエネルギーは増え、揺れが大きくなる。

参考 1 : ブランコの運動方程式 藤原邦男「振動と波動」サイエンス社より

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = mg \cos \theta - T$$

$$m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = -mg \sin \theta$$

微小振動では、 $x = r \sin \theta \cong r\theta$ 。この時、 $m\ddot{x} + \frac{m(g - \ddot{r})}{r}x = 0$ 、つまり $m\ddot{x} + m\omega^2 x \cong \frac{m}{l}\ddot{r}x$ 。

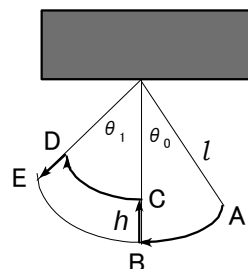
$\dot{x}$ かけて積分すると、 $\frac{1}{2} [m\dot{x}^2 + m\omega^2 x^2]_0^t = \frac{m}{2l} \int_0^t dt \frac{d(x^2)}{dt} \ddot{r}$ 。この式から、下降時

($d(x^2)/dt < 0$) に膝を縮め ($\dot{r} > 0, \ddot{r} < 0$)、上昇時に膝を伸ばせば増幅する。8 の字運動。

例えば、右図のような極端な運動の場合のエネルギーを考える。

<点> <エネルギー>

A $mg l (1 - \cos \theta_0)$ 位置エネルギー



H21

解答例

B $mgl(1-\cos\theta_0)$ 全てが運動エネルギーに変わる

C $mgl(1-\cos\theta_0)\left(\frac{l}{l-h}\right)^2 + mgh$

角運動量保存 $vl = v'(l-h)$ 運動エネルギー $\frac{v^2}{2m} \rightarrow \frac{v'^2}{2m}$ つまり $\{l/(l-h)\}^2$ 倍増加

D $mgl(1-\cos\theta_1)$ 位置エネルギー

ただし、 $mgl(1-\cos\theta_0)\left(\frac{l}{l-h}\right)^2 + mgh = mgl(1-\cos\theta_1)$ 。

この式から、角度も増加する ($\pi > \theta_1 > \theta_0$) ことがわかる

E $mgl(1-\cos\theta_1) - mgh\cos\theta_1$

結局、A→E でのエネルギーの増加は、

$$\Delta E_{0 \rightarrow 1} = E - A = mgl(1-\cos\theta_0) \frac{l^2 - (l-h)^2}{(l-h)^2} + mgh(1-\cos\theta_1) > 0$$

運動エネルギー増加 位置エネルギー増加

参考2：パラメトリック発振

振動の固有周波数を決めるパラメーターの値を周期的に変化させることで振動を誘起する現象をパラメトリック発振という。振り子の場合、ひもの長さ、おもりの重量、重力加速度などが周期を決めるパラメーターであり、立ちこぎブランコではひもの長さを周期的に変化させることでブランコが揺れているわけである。

参考3：糸の長さが変わる振り子における張力のする仕事量

・非保存力がした仕事だけ系の力学的エネルギーは増加する。糸の長さが変わる振り子においては、糸の長さが変化するとき仕事をする。張力は非保存力であり、その仕事量だけ振り子のエネルギーは増加する。このように考えると、ブランコでは遠心力や重力などの力がもっとも強く作用するタイミングにその力の方向に仕事をするとエネルギーを稼ぐことができる。

以上の説明はブランコに載っている人の座標系から見た様子であるが、外の慣性系からながめると以下のように考えることができる。ひもの長さが変わらないときには軌道は円運動であり、おもりの速度ベクトルと張力の方向は直交するので張力は仕事をしない。糸の長さが変わるときは、おもりの速度ベクトルは張力の方向とは直交しなくなるので、張力によりおもりを加速できるわけである。

2.【新現象への観察・比較分析・想像力、説明を通しての論理・表現力を問う】

<解答例>

・このブランコの場合、箱の向きが絶えず一定方向を向いているため、重心位置によらず回転半径は一定である。このため、糸の長さがかわることによる速度増加はおきない。しかし、遠心力に逆らって重心移動を行うと、その仕事分の速度増加を得ることができる。上下の動きに関する位置エネルギーの増減に関しては、常時鉛直方向を向いているので、エネルギー収支は零となる。そこで、上下の動きの他にも、例えば左右の体重移動などにより、遠心力に抗して周期的に仕事をすれば、揺れを大きくすることもできる。これは、投げ縄をするときに縄をぐるぐる回すのと似ていて、縄の長さは一定だが手首が円を描くようにまわすと投げ縄もよく回る。このことを考えると、箱の中で円を描くような体重移動も有効なこぎ方と考えられる。

・この回転ブランコは、回転させやすいようにアームの端におもりがつけてあったり、箱の向きを一定に保つメカニズムなどの工夫がされている。そのような点にも注意してブランコとの類似点と相違点動を観察して欲しい。

・参考4：この回転ブランコは、パラメトリック発振という点で見ると糸の長さは変えずに重力加速度 g を変化させることで振動させている系と考えることができる。箱の中で人が移動して重心を動かしても回転半径は常に一定に保たれている。逆にいうと、円運動している状態でその中心を動かしていることになる。ブランコの座標系で考えると、中心移動により慣性力が働くとみなせるので、中心移動により重力が強くなったり弱くなったりすることになり、パラメトリック発振と見なすことができる。

また、外の慣性系から眺めた場合は、糸の長さを変えずにおもりを円運動させている状態で、支点を糸の方向とは異なる方向に動かすと、張力はおもりに対して仕事をするので、加速できるわけである。

3. 【発想力、表現力を問う】

ユニークなもの、意外性のある発想ができるかをみるとともに、考案し遊具をきちんと説明できるかを評価する。

下記のリンクより実演動画が見られます。

<http://www.cfs.chiba-u.ac.jp/event/090113/2009I-video2.mpg>

飛び入学の物理

<http://www.cfs.chiba-u.ac.jp/>

平成27年 3 月25日 初版 第 1 刷発行

発行者

千葉大学 先進科学センター
〒260-8522 千葉市稲毛区弥生町1-33
TEL 043-290-3521 FAX 043-290-3523

印刷・製本

株式会社 正文社
〒260-0001 千葉市中央区都町1-10-6
TEL 043-233-2235 FAX 043-231-5562

装丁デザイン

田中重昌（千葉大学広報学生ボランティアグループ「クリエイティブ」）

監修

宮崎紀郎（千葉大学名誉教授・グランドフェロー）

