自説を作る３（ペットボトル振動子）

飲み口の部分に管を通したペットボトルに水を入れて逆さまにすると、水が間欠的に規則正しく流出します。この装置を、「自説を作る 1」のようにバネを用いてモデル化してみました。質量 M の物体につながれたバネ定数 k のバネが摩擦面に接しながら減衰振動をしています。この摩擦力によるエネルギーの損失は高さ Δx の位置にある水の位置エネルギーによって補われています。管内の水が Δx だけ移動すると、ペットボトル内の圧力は下がり M には上向きの力が働きます。

管内の水の質量を Mkg、密度を $\rho\,\mathrm{kg/m^3}$、その底面積を $\mathrm{Sm^2}$、長さを hm とし、バネにあたる上部の空気の圧力を Po、体積を Vo とし、気体の状態方程式より、PoVo＝C とします。

管内の水が Δx だけ下に動いたとすると、バネ（上部の空気）の復元力 F は

$$F = \Delta P \cdot S = \left(\frac{C}{Vo + S\Delta x} - \frac{C}{Vo}\right)\cdot S$$

$$= \frac{CSVo - CSVo - CS^2\Delta x}{Vo(Vo + S\Delta x)}$$

$$= -\frac{CS^2\Delta x}{Vo^2}\left(1 + \frac{S\Delta x}{Vo}\right)^{-1}$$

テイラー展開を使って近似すると、

$$\fallingdotseq -\frac{CS^2\Delta x}{Vo^2}\left(1 - \frac{S\Delta x}{Vo}\right)$$

Δx の２次の項を無視すると、

$$\fallingdotseq -\frac{CS^2}{Vo^2}\cdot \Delta x$$

すると、PoVo＝C より、

$$F = -\frac{PoS^2}{Vo}\cdot \Delta x$$

という式が成り立ちます。

ここで、バネの周期の式（単振動の周期の式）$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ の m に管内の水の質量 M、k に先程の復元力の式　（F＝－kx）の k を代入すると、

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{M}{\frac{PoS^2}{Vo}}} = 2\pi\sqrt{\frac{\rho Voh}{PoS}}$$

振動数の式 $f=\dfrac{1}{T}=\dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{k}{m}}$ より、

$$f=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{PoS}{\rho\, Voh}} \cdots\cdots\cdots\cdots \text{(A)}$$

が得られます。

得られた式より周期 T は S の平方根に反比例し h の平方根に比例し、S と h の比が同じなら T も同じになる。本当だろうか?