# 第5回数理科学コンクール課題解説

平成14年11月3日 千葉大学先進科学教育センター

# 目次

## はじめに

明治の文明開化以来, 我が国は欧米先進国の科学技術を効率よく吸収して発展してきました. 戦後もこの傾向は基本的には変わっていません. 現在, 我が国は大量の自動車や電子機器を輸出して経済大国となっていますが, これらの工業製品の基本原理はほとんど外国で考えられたものです. 欧米諸国との間に経済摩擦や文化摩擦が生じている現状を考えると, これからの我が国で大切なことは独創性のある個性的な人材を育成して, 新しい科学技術のフロンティアを切り開き, 世界に貢献することであると考えられます.

千葉大学では, 日本のみならず, 世界の科学技術の先端を担う若者を発掘し, 育成するための一助として, 本年度も, 第5回数理科学コンクールを開催しました. このコンクールの特色は次の通りです.

1. 自由にゆったり考える
   試験時間は6時間, 途中の休憩や参考書・ノート等の持ち込みは自由とする.
2. たのしい物理・数学の発見
   物理や数学のカリキュラムにとらわれず, 物理や数学の本質に根ざした, 考えて楽しい問題を提供する.
3. 多彩な才能の評価
   様々な参加者の優秀な能力やユニークな発想を多面的に評価するため, 問題をたくさん解いたものだけでなく, 1題に集中してすばらしい発想を出したものも表彰の対象にする. また, グループとしての総合能力を評価するため, 個人参加だけでなく, グループ参加も認める.
4. 人材の育成
   コンクール参加者の物理や数学の能力をさらに高めるため, コンクールの表彰式と講評会を行う.

過去4回のコンクールに引き続き, 多くの中高生の参加者があり, 楽しい雰囲気の中で, いろいろユニークなアイディアが生まれました. 中学生も, 高校生に負けず優秀でありました. そして, 答案を見ると, それぞれの問題に興味を持ちながら解答していることが読んでとれました.

第5回数理科学コンクールの課題の解説と提出された答案の評価を以下にまとめます. 解説に述べてあるように, 各課題は課題出題者の周りにある基本的な問題や最先端の問題, さらには歴史的に意味のある問題を元にして作成しました. 課題提出者一同, みなさんの素晴らしい洞察力と表現力を前にして, 大変感心いたしました.

参加者の皆さんが今後, 科学する心を磨き続け, 我国の科学の発展に貢献することを課題作成者一同希望します. 今後も諸君と共に科学することを楽しみたいと考えています. 千葉大学では今後も引き続きこのコンクールを実施する予定です. 物理・数学に興味がある中高生の積極的な参加を期待しています. 課題作成者もさらに研鑽をかさね, おもしろく, しかも科学の本質に迫る課題を考ていきます.


課題作成者

国立情報学研究所, 千葉大学教授　井宮　淳
千葉大学助教授　植田　毅
(五十音順)


平成 14 年 11 月 3 日

優秀者氏名

平成 14 年 10 月 5 日に開催しました第 4 回数理科学コンクールの参加者の皆さんのすばらしい答案の中から以下の参加者諸君を表彰することを決定しました.

第 5 回数理科学コンクール優秀者

金欅賞　グループ 18 川原 理枝, 青山 桂吾, 鈴木 沙那恵, 山本 真里奈, 佐藤 大介

銀欅賞　寺西 智信
加島 佑一
今井 靖
志摩 裕貴
利嶋 格
田口 里奈
グループ 20　萩田 大地, 伊藤 悠紀, 長尾 康平, 堀田 順平, 教来石 祥雄

学長賞　長塚 雄大
グループ 13 野澤 ジョフィー, 高村 未知

| 課題 | 参加者名 |
|---|---|
| 1 | 寺西 智信 |
| | 加島 佑一 |
| | グループ 13 野澤 ジョフィー, 高村 未知 |
| 2 | 今井 靖 |
| | 長塚 雄大 |
| 3 | 志摩 裕貴 |
| | 利嶋 格 |
| | グループ 18 川原 理枝, 青山 桂吾, 鈴木 沙那恵, 山本 真里奈, 佐藤 大介 |
| 4 | 田口 里奈 |
| | グループ 18 川原 理枝, 青山 桂吾, 鈴木 沙那恵, 山本 真里奈, 佐藤 大介 |
| | グループ 20 萩田 大地, 伊藤 悠紀, 長尾 康平, 堀田 順平, 教来石 祥雄 |

千葉大学先進科学教育センター長
教授 金子克美
平成 14 年 11 月 3 日

# 1 課題1

## 課題

配布写真1はある地方の農地の風景です，このなかの一つの田圃は図のような大きさ，形です．この水田は通常，4条植えの乗用田植え機を使って田植えをします．田植え機で全てを植えられれば良いのですが，田植え機の田圃への出入り，Uターンなどのスペースが必要であったり，機械の特性上あまり畦に近づけなかったりして，完全に機械植えにすることは不可能です．しかし，後で手で植えるのは大変なので，できるだけ手で植えないといけない部分を残さず，できるだけ時間をかけず，苗を無駄にしないように機械で植える方法を考えてください．ただし，田植えの作業上，この田圃の性格上などから以下の条件を満たさなければなりません．

1. 乗用田植え機の構造は配布写真2にもあるように，4車輪の上部に前方からエンジン，運転席と並んでいて，その後部に植付け部が配されています．
2. 植付け部の泥に接する部分にはフロートと言う大きな浮のようなものが取り付けられており，それが植え付ける前に泥を均します．したがって，一度植付けだ部分を植付け部が通過した場合には，先に植えた苗は泥の中に埋もれてしまいます．
3. 植付け部はレバー操作により，上下することができます，Uターン時など，植付けをしていない場合には植付け部は上にあげて移動します．
4. 田植え機は4輪駆動方式ですが，小回りが利くように，クラッチ（ブレーキのようなペダル）操作により，右，左の後輪の片方を止められるようになっています．
5. 田植え機は4条植えですが，畦際などを植え付けるときのために左右2条ずつを止められるようになっています．真中の2条，両外の2条だけを植え付けるということはできません．
6. この田圃で田植え機が出入りが可能なのは，図1の右端の畦の上部だけです．
7. 田植え機には苗の補給をしなければなりません．その補給は苗の運搬の関係から図1の右端の畦からしかできません．したがって，田圃の真中からグルグル回ると言うような方法は取れません．苗の補給は大体，左右，短い畦間を2往復したところで行わなければなりません．
8. 田植え機はその性格上，ほぼ直線的（多少のカーブは問題ない）に移動しなければ綺麗に植付けができません．
9. 一度車輪が通るとそこには深い溝ができてしまい，そこに植付けをしようとすると，苗が水に浮いてしまうので，できるだけ無駄な動をしません．
10. 秋には機械（コンバイン）を使って刈り取るので，そのときのことも考えます．
11. 一度植えた部分を植付けをすると，苗が無駄になるので極力避けます．
12. 一度植えた部分を植付けをしなくても，通るだけで車輪に苗が踏まれる場合などが発生するので，一度植えた部分は極力移動しないようにします．
13. 田植え機の運転はぬかるんでいる中で行うので，その精度は畦に沿って植付けをする場合でも15cm程度です．

参考のために田植えの風景を用意しました．また，田植え機のサイズなどは配布表を参考にしてください．

## 解説

この問題の田圃は出題者一人の実家の田圃の一つです．小学生のときから田植えや稲刈りの手伝いをしてきました．田植えの場合，手で植えるのであれば特に考えることもないのですが，使う機械が大きくなってくると，よく考えて使わないと，出られなくなったり，機械自身のスペースが残って，手で植える部分が多くなってしまいます．しかし，考えてもなかなか難しい問題です．そういう意味では，近所の農家のおじさん達はどうしているのか不思議になったものです．

この問題の基本的な部分は，有限の幅の筆でいか効率よく，一筆書きで田圃の中を塗りつぶすかと言う問題です．この場合は重なる部分を最小にするようにすればいいのですが，田植えの場合はそう単純ではありません．田植え機は曲がるにも，Uターンするにもそれだけのスペースが必要になるからです．しかも，植えている部分だけでなく，その前にある車輪の部分が既に植えた部分を極力踏まないようにしなければならない．そして，もっと問題を複雑にするのが，田圃の形は長方形ではなくて，不規則な形をしていることです．基本的には数学の問題でも，現実の問題は非常に難しい．逆に言うと，身近なところに数学の問題はいくらでもあるけれども，数学の問題として解くには難し過ぎる．このような問題は身近にいくらでもあります．物理で言えば，水道の蛇口からポタポタ落ちる滴の計算は極最近やっと解けた問題だし，空中にひらひら舞う一枚の紙の運動さえちゃんと解くことはできてない．身近なところに問題は転がっています．いろいろ不思議に思って考えてみてください．

さて，本題です．この問題でもっとも重要なのは，田植え機で苗を植えているのは最後部だと言うことです．田植え機が植えながら直進して，前輪が畦に近づいたら，Uターンしなければなりません．そのとき，前輪が畦に着いてしまうと，Uターンできないので，ハンドルを目いっぱい切ったときに，外側を回る前輪が畦の内側を通るような位置でUターンをしないといけません．また，植えながらUターンすると，苗がぐちゃぐちゃになるのと，稲刈りがし難いこと，それと，後ろに突き出ている植付け部に横方向に大きな力がかかって壊れる危険があるので，Uターンをする前に植付け部を植えにあげます．したがって，田植え機の最小回転半径＋後輪から植付け部最後部までの距離は必ず植えられないまま残ってしまいます．要するに，この田圃の長い方向に真直ぐ行ったり来たりしても，両端で必ず植え残しができる．この植え残しの部分を，（少なくとも出題者の実家周辺では）枕と読んでいます（植え残しのできる部分は布団で言えば枕がくる部分になるからです．実際には両側にできるのですが...）．直進しても必ずできる枕をどう解決するかが，この問題のキーポイントです．

解決策は「植えられないものは植えられないので諦める」です．これは，機械で植え残しを作ると言う意味ではありません．直線的に言ったり来たりしても，植えられないのだから，他の方法を考えると言うことです．枕の距離は田植え機の1往復分の幅（大体，田植え機の幅の2倍）になります．そこで，四角の田圃の場合は，始めから田圃の周囲1往復分の幅だけ空けて，左右に（ほぼ）直線的に往復しながら植えていきます．その後，田圃の周囲に沿って1周し，その後，その内側を1周すれば，枕の部分が完全に解消できます．この場合，手で植えなければならないのは，機械が植え終わったときのその機械の下の部分

です.

しかし, この場合はそれほど単純ではありません. でも, この田圃も大体, 短い長方形と長い長方形の2つに分ければ同じような方法で植えることができます.

この問題は正解は分かりません. ある答があっても, それが最も効率がよいと数学的に証明することが難しいからです. ここでは, 出題者が最も効率が良いと信じて, 実際にやっている方法を例として図1に示します. 図中で実線は植えながら進むコース, 破線は植えずに移動している部分で, 矢印の方向に進むとします.

## 講評

この問題はかなり苦労したようです. 答案を書けた人も少数でした. 答案を見ての感想は, 皆, 機械に頼らずかなり肉体労働するのが好きなのだなということです. 植えないで移動すると言うことを考えに入れた答案が余りありませんでした. 常に植えながら, ぐにゃぐにゃの経路で植えるという方向に考えが行ってしまったようです. しかし, あまり方向転換があると, 既に植えた部分を踏みつけてしまうことになるので, 要注意です. そもそも, 植えながらの方向転換は, 前にも述べたとおり, きれいに植えることができないし, 機械にも負担がかかるので, 現実的ではありません.

わずかながら, 周囲を周回するという発想をした答案があったので, それを高く評価しました.

最後にもう一言付け加えると, 農業は単純そうだけれども, そう簡単ではありません. 植物を育てる知識だけでなく, 今回のようなこともちゃんと理解しないといけない. 稲刈りのときはもっと難しくなります. もっと問題なのは, できるだけ機械で仕事をしてしまおうと思えば, コンクリートになった畦にトラクター, 田植え機などを数センチの隙間を開けて数十メートルぶつけないように（ぶつけたら壊れます）運転しないといけない. 田圃は道路に比べるとかなりでこぼこしているので, 高度な精神力, 体力と運転テクニックが要求されます（ちなみに田圃の中は公道ではないので小学生でも運転しても構いません）. これは, F1チャンピオンのミハエル シューマッハーでもてこずるかもしれません. その上, 機械が壊れたら, エンジンも分解して自分で修理しないといけないのです. （最近のディーゼルエンジンは構造が複雑で簡単に分解できなくなりつつあって, 販売代理店のエンジニアに来て貰わないとどうにもならないことが多くなってきました）

## 2　課題2

### 課題

ユーカスというおもちゃがあります，それは，磁石でできた台の上でコマをまわすと，コマの回転が安定している間は宙に浮いていると言うものです．このおもちゃはどのようにできているのでしょう？このおもちゃの仕組みを考えてください．

会場には24台のユーカスを用意してありますから，実物に触れ，実験しながら考えてください．ただし，ユーカスの磁力は非常に強いので腕時計，パソコン，MD，CDプレーヤーなどの電子デバイス，磁気メディアを傍に近づけないようにくれぐれも注意してください．

### 解説

UCASは磁気の反発力を使ってコマを中に浮かせるおもちゃです．しかし，普通の状態では磁石の反発力を用いて磁石を安定に空中に浮かべることは不可能であることが分かっています．それは，少しでも傾くと空中に浮かんでいる物体をひっくり返そうとする力（のモーメント，もしくはトルク）が働くからです．

ただし，磁石の上に超伝導体を置けば（逆でも可），超伝導体は安定に宙に浮かびます．これは，超伝導体の中には磁場が入り込まないようにする性質（マイスナー効果）があるためです．言い換えれば，超伝導体は外から磁場が入ってくるとそれを完全に打ち消すような磁場を自分で作ってしまう（完全反磁性）．そのために，自動的に安定に浮かべるような磁石になるためです．

しかし，UCASは超伝導体を使ったおもちゃではありません．それなのになぜコマは（しばらくは）安定に浮かんでいることができるのでしょうか？どのような工夫をしているのかを考えてもらう問題でした．

まず，UCASで最も重要なことは，コマをまわさなければ浮かないと言うことです．軸に取り付ける磁石をベースの上においても中に浮いたりはしません．では，なぜコマを回さなければならないのか？これは，先ほど説明した，磁力によるものをひっくり返そうとする力に対抗するためです．回転しているものには角運動量というものが発生します．直線的に運動しているものには，速度×質量，で定義される運動量と言うものが定義されますが，その回転運動版だと思ってください．外部から力が働かない場合，運動量保存則が成り立つように，角運動量も保存されます．このため，ある軸を中心に回転しているものの回転軸を傾けるためには非常に大きな力が必要になります．自転車やサーカスなどで見る一輪車が転ばないのは車輪が回転することによる角運動量保存則のためです．このように，コマが安定して回っている間はその角運動量保存則のために磁場によるひっくり返そうとする力に対抗することができるようになります．コマの回転が遅くなってくるとどこかへ飛んで行ったりするのは，角運動量が磁場からうける力（のモーメント）に対抗できなくなるからです．それとは別にコマを回すと，磁石が回転軸に水平に取り付けられていれば，常に磁石がベースに対して水平になるため，安定した力をうけることになります．

これだけで，コマが安定に宙に浮くわけではありません．角運動量は回転軸が平行であれば保存されるので，コマは横方向には簡単に動きます．したがって，ベースにコマが中心あたりに居続けるような工夫

をしなければなりません．UCAS の磁場を磁石を使って調べてみると，ベースの中には辺の長さ約 7cm の正方形の頂点に，直径約 2cm の磁石を同じ極を上に向けて置いた状態になっていることが分かります．

理論的に計算した UCAS のベースの上側の磁位（磁位とは，電場に対して電位（電圧）があるように，そこに磁石をおいたときにどれだけ位置エネルギーを持つかを表す．地球の重力で言えば高さのようなもの．）の等高線と磁場の様子を示します．ただし，磁位の等高線はコマが反発する方向を白くなるようにしてあります．また，磁場を表す矢印は反発する方向に向くようにしてあります．図の中の目盛りは，ベースの中心（厚み方向にも）を原点としてベースの厚みを 1 としてあり，ベースの辺に平行な方向に $x$, $y$ 軸，ベースに対して垂直上向きに $z$ 軸を取っています．したがって，ベースの上側の表面は $z = 0.5$ にあることになります（図 3,4）．

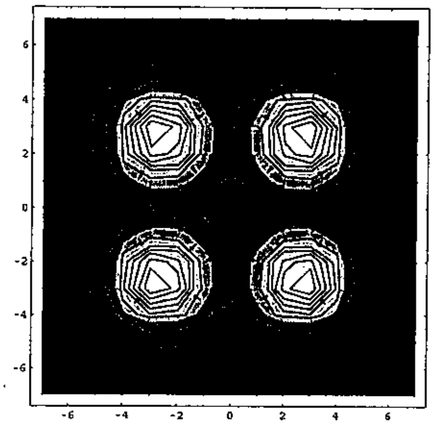


図 1:

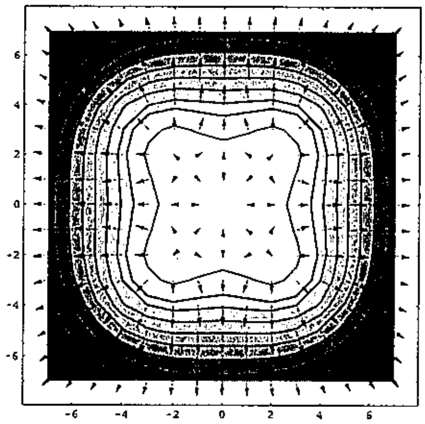


図 2:

図 1 は $z = 1.5$，つまり，ベースの表面からベースの厚みの高さの位置のベースに平行な平面上の磁位，電場の様子を描いたものです．これを見ると，4 つの磁石の中心線を結んだ正方形の外側では外側にはじかれる方向に力が働くが，その内側ではベースの中心方向に力が働くことが分かります．また，白くなっ

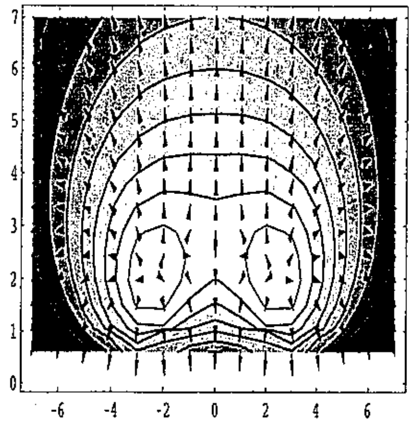


図 3:

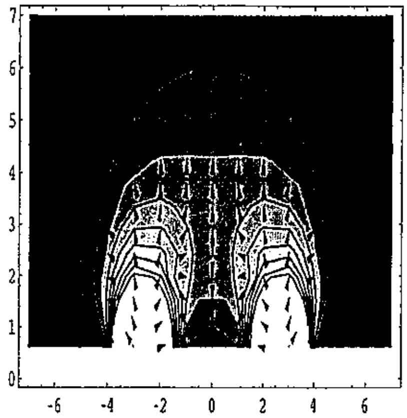


図 4:

ている 4 つの磁石の上では強く反発されるけれども, ベースの中心付近は黒くなっており, 反発ではなく, ベースの方に引き寄せられる状態になっていることが分かります.

図 2 は $z = 4$, つまり, ベースの表面からベースの厚みの 3.5 倍の高さの位置での磁位, 電場の様子を描いたものです. この場合, 図 2 のときとは磁場の様子がかなり異なり, 中心方向に力が働くのはベースの中心付近のみになり, かなり狭くなっていることが分かります. また, 中心付近が白くなっていて, この高さになると中心付近では引力ではなく反発する力が働くことが分かります.

図 3 はベースの中心を通りベースの辺に平行な垂直面内の磁位, 電場の様子を描いたものです. この図から, 高さによってどのように働く力がどのように変化するかが分かります. これから, ベースの中心付近では, 高さがベースの厚みの 2 倍くらいまでは下向きの (引) 力が働き, それより高い位置では上向きの (反発) 力が働くことが分かります.

図 4 はベースの対角線を通る垂直面内の磁位, 電場の様子を描いたものです. この図でも, 磁石の部分では反発力が働くけれども, ベースの中心付近では, 高さがベースの厚みの 2 倍くらいまでは下向きの

(引) 力が働き, それより高い位置では上向きの (反発) 力が働くことが分かります. また, 磁石より内側では中心方向に力が働くことが分かります.

以上のことから, 中心付近で回っているコマはベースの磁石により四方から弾かれ, 結果的に中心部分に来ることが分かります. また, コマはベースの中心付近では浮き上がったりせずに, ベースの上で安定し回っていることも理解できます. これは, 磁石のN極から出た磁力線は一度広がり, S極にもどることに依っています. つまり, ベースの中の磁石の表面とそこから横にずれたベースの中心付近では磁力線の向きが全く逆になっているからです. UCAS でコマを中に浮かせるポイントは安定に回っているコマを透明のボードである程度の位置まで持ち上げてやると言うことです. ベースの中心付近の表面上では反発力ではなく引力が働きます. しかし, それをある程度の高さまで持ち上げてやると, 反発力が働き, コマが中に浮くようになるのです.

ただし, これまでの話は重力のことを考えていないので, 実際には重力と反発力がつい合うところで静止することになります.

## 講評

どの答案も磁石の反発であることを見抜いて, 方位磁針, 棒磁石などでベース, コマの磁場をよく調べてありました. 多くの人が中心部分と周辺部分では磁場の向きが変わっていることに気付いていました. 図も非常によく描けていたものもありました. しかし, なぜ浮くかに関しての答としては, 「磁力の反発力により宙に浮く」と言う回答がほとんどでした.

ただ反発するだけではベースの上でコマを回したときにそのまま何もしなくても宙に浮かなければならないはずです. しかし, 実際にはずっとベースの上で安定に回っている. それを, 透明のボードで持ち上げていくと, あるところまで持ち上げたときにふわっと浮き上がります. このことに気が付いて, 高さによって働く力が変わると言うように, 高さによる変化の考察をしてくれた答案を高く評価しました.

## 3　課題3

### 課題

英語のアルファベット大文字26文字, 空白, 0と1から9までの数字, コンマ, ピリオド, 合計39文字からなる文字を $A, B, \cdots, Z,$ [　], 0, 1, ···, 9, 　,　. の順に並べ, 前から順に, 01から39まで, 番号を付けることにします. ただし, 39の次には01から繰る返した番号を付けます.

英文

I AM A BOY.

を数字であらわすと,

0927011327012702152539

となります. 文字の順番を一つずらすと, I AM A BOY. が,

J0BN0BCPZA

となり, 数字の列は

10280214280203162601

となります.

受け取った数字の列から元の文章を推定するその手順を順序良く書いてください. そして, その手法で以下の数字の列から元の文章を復元してください.

13271730250331300922232935132906072123

### 解説

この問題の暗号化法はシーザー暗号と呼ばれ, ローマ帝国のシーザーが連絡に利用した暗号法という言い伝えがあります.

シーザー暗号の暗号器は, 中心を重ねて回転するようにした, 半径の異なる二つの円盤に文字を書くここによって, 暗号化, 復号化が行われます. 回転によって, 文字をずらすことができます. 文字をずらす個数を暗号の鍵と呼ばれます.

暗号の種類には, 鍵が公開されている公開鍵暗号, 公開されていない非公開暗号があります. シーザー暗号は非公開鍵暗号の最簡単クラスの暗号です. したがって, 復号には鍵を見つけなければなりません. この場合は, 鍵を見つけることを, 暗号に対する攻撃と呼びます.

シーザー暗号に対する組織的攻撃法を構成することが課題です. 組織的とは, ここで例に示された暗号だけに通用するものではありません. 一般的にどのシーザー暗号にも通用しなければなりません. 通常, スペースを手がかりとし攻撃法行います. つまり, 繰返し現れる記号をスペースと仮定し、ずらしの個数を推定します.

講評

スペースを攻撃の基準にしている．英文にもローマ字文にも通用する．シーザー暗号の本質である，円盤の回転に気づいて復号法を考えている．の 3 点を評価しました．

## 4 課題 4

### 課題

平面上の点の座標を $(x, y)$ と表す. $x$, $y$ 両方が整数である点を整数格子点と呼びます. 例えば, $(0,0)$, $(3,2)$, $(6,7)$ などが整数格子点です. 以下では, 整数格子点を頂点とする多角形の面積に関して考察します.

1. 整数格子点を頂点とする四角形がその内部に, 整数格子点を含まない場合, その四角形の面積 1 でることを示してください. このとき, 四角形には頂点以外に, 整数格子点が含まれないことを示してください.
2. 整数格子点に頂点を持つ一般の多角形の面積を, その辺上の整数格子点と, 多角形の内部に含まれる整数格子点の数で表す関係式を導いてください.

### 解説

格子点の幾何学は, 数の幾何学と呼ばれてます. 初等整数論（整数の性質を研究する数学の一分野）と解析幾何学（座標を使って数式で記述する幾何学）とが基礎知識となります. もとは数学の一分野として出発しましたが, 20 世紀後半になって, コンピュータで図形や立体画像を処理するための基礎としてその重要性が再認識されました. コンピュータで図形や立体を取り扱う分野にはコンピュータグラフィクスがありますが, 数の幾何学はその基礎にもなっています. 特に, コンピュータで幾何学の問題を効率よくとくことを考える分野を計算幾何学, 数の幾何学に基づいて幾何学図形の性質を調べる分野をディジタル幾何学と呼びます. この問題は, ディジタル幾何学の問題のひとつである, 図形の面積を測る問題です. 医療画像処理の分野では腫瘍の広がりを推定することに応用されます.

さて, 問 1 はすぐにできます. 問 2 の結果は多角形の内部の格子点の数を $N$, 周上の格子点の数を $k$ とすると,

$$\text{面積} = N + \frac{k}{2} + 1$$

となります.

全ての多角形に対してこの公式が成立することを証明するためには以下のようにします. ここでは, 任意の多角形を必ず三角形に分解できる性質を利用します.

1 二つの多角形の面積, 内部の整数格子点の数, 境界の上の整数格子点の数をそれぞれ, $S_i$, $N_i$, $k_i$ とします. ここで, $i = 1, 2$ です. さて,

$$S_1 = N_1 + \frac{k_1}{2} + 1, \ \ S_2 = N_2 + \frac{k_2}{2} + 1$$

である二つの多角形を, ある辺で合弁します. このとき, 共通の辺上の整数格子点の個数を $k'$ とすると,

$$S = S_1 + S_2, \ N = N_1 + N_2 - (k' - 2), \, k = (k_1 - k') + (k_2 - k') + 2$$

が成立します. ここで, 合弁してできた多角形の面積, 内部の整数格子点の数, 境界の上の整数点の数をそれぞれ, $S$, $N$, $k$ とすると,

$$S = N + \frac{k}{2} + 1$$

が成立していることがわかります.

2 多角形をその頂点を頂点とする三角形に必ず分割できます. 上の関係を二つの三角形の合弁に置き換えることができます. したがって, 整数格子点を頂点とする三角形に対して面積の公式が成立することを証明すればよいことになります. さて, 多角形が三角形に分解できることを利用すると, 整数格子点を頂点とする任意の三角形を, 整数格子点を中に含まない三角形に分解できます. さらに, 整数格子点を中に含まない三角形の面積は問 1 の結果より 1/2 であり, 面積の公式を満たしています.

次に, 三角形の分解を逆にたどると, 中に整数格子点を含まない三角形を順に合成すると, 整数格子点を頂点とする任意の三角形に対して面積の公式が成立します. さらに, 分解を逆にたどると, 全ての多角形に対して面積の公式が成立します.

## 講評

問 1 はほとんどの参加者が正解していました. また, 問 2 の公式も推定していました. しかし, 証明はなされていませんでした. すべての解答で多数の例からこの公式を導いてました. その意味で答えは推定にしかなっていません. 三角形の合成で任意の多角形ができていることを明確に利用した解答は有りませんでしたが, この性質を利用していることが読み取れる解答を評価しました.