第4回数理科学コンクール

課題·解説·講評

千葉大学先進科学教育センター

平成13年11月3日

目次

はじめに

明治の文明開化以来, 我が国は欧米先進国の科学技術を効率よく吸収して発展してきました. 戦後もこの傾向は基本的には変わっていません. 現在, 我が国は大量の自動車や電子機器を輸出して経済大国となっていますが, これらの工業製品の基本原理はほとんど外国で考えられたものです. 欧米諸国との間に経済摩擦や文化摩擦が生じている現状を考えると, これからの我が国で大切なことは独創性のある個性的な人材を育成して, 新しい科学技術のフロンティアを切り開き, 世界に貢献することであると考えられます.

千葉大学では, 日本のみならず, 世界の科学技術の先端を担う若者を発掘し, 育成するための一助として, 本年度も, 第4回数理科学コンクールを開催しました. このコンクールの特色は次の通りです.

1. 自由にゆったり考える
   試験時間は6時間, 途中の休憩や参考書・ノート等の持ち込みは自由とする.
2. たのしい物理・数学の発見
   物理や数学のカリキュラムにとらわれず, 物理や数学の本質に根ざした, 考えて楽しい問題を提供する.
3. 多彩な才能の評価
   様々な参加者の優秀な能力やユニークな発想を多面的に評価するため, 問題をたくさん解いたものだけでなく, 1題に集中してすばらしい発想を出したものも表彰の対象にする. また, グループとしての総合能力を評価するため, 個人参加だけでなく, グループ参加も認める.
4. 人材の育成
   コンクール参加者の物理や数学の能力をさらに高めるため, コンクールの表彰式と講評会を行う.

過去3回のコンクールに引き続き, 多くの中高生の参加者があり, 楽しい雰囲気の中で, いろいろユニークなアイディアが生まれました. 中学生も, 高校生に負けず優秀でありました. そして, 答案を見ると, それぞれの問題に興味を持ちながら解答していることが読んでとれました.

第4回数理科学コンクールの課題の解説と提出された答案の評価を以下にまとめます. 解説に述べてあるように, 各課題は課題出題者の周りにある基本的な問題や最先端の問題, さらには歴史的に意味のある問題を元にして作成しました. 課題提出者一同, みなさんの素晴らしい洞察力と表現力を前にして, 大変感心いたしました.

参加者の皆さんが今後, 科学する心を磨き続け, 我国の科学の発展に貢献することを課題作成者一同希望します. 今後も諸君と共に科学することを楽しみたいと考えています. 千葉大学では今後も引き続きこのコンクールを実施する予定です. 物理・数学に興味がある中高生の積極的な参加を期待しています. 課題作成者もさらに研鑽をかさね, おもしろく, しかも科学の本質に迫る課題を考ていきます.

課題作成者

千葉大学教授　井宮　淳

千葉大学助教授　植田　毅

(五十音順)

平成13年11月3日

優秀者氏名

平成13年10月21日に開催しました第4回数理科学コンクールの参加者の皆さんのすばらしい答案の中から以下の参加者諸君を表彰することを決定しました.

第4回数理科学コンクール優秀者

金欅賞　清水達郎 甲斐大拓
　　　　グループ6 向谷地博子 河本いずみ 花島知美
銀欅賞　駒崎万集
　　　　グループ2 立川正人
　　　　グループ5 加藤茉奈
　　　　グループ11 山本拓史 岩瀬忠康 佐々木啓介 佐用観弥 久我斉明
　　　　グループ13 下沢拓 宮本大輔 渡辺篤史
学長賞　グループ5 坂口純 西尾怜美

課題	参加者名
1	清水達郎
	グループ5 加藤茉奈
	グループ11 山本拓史 岩瀬忠康 佐々木啓介 佐用観弥 久我斉明
2	清水達郎 甲斐大拓 駒崎万集
	グループ2 立川正人
	グループ6 向谷地博子 河本いずみ 花島知美
	グループ13 下沢拓 宮本大輔 渡辺篤史
3	清水達郎
	甲斐大拓
	グループ5 坂口純 西尾怜美
4	清水達郎
	グループ6 向谷地博子 河本いずみ 花島知美

千葉大学先進科学教育センター長
教授 金子克美
平成13年11月3日

1　課題 1

課題

蟻の行列を考えます．簡単のために，蟻は一列に行列をすると仮定します．蟻穴の出口から適当な距離だけ離れた場所に砂糖があります．

1. 一番目の蟻は，あてずっぽうに方向を決めて歩きます．単位時間に単位距離進むと方向を変えて，また，当てずっぽうに方向を決めて単位距離進みます．そして，砂糖を見つけることができると仮定します．
2. どの角でも，全ての蟻は一つ前の蟻よりも，少しずつ曲る角度を小さくします 少しずつ近道を見つけます．

これらの仮定のもとで，時間が十分たつと，蟻の穴から砂糖につながる行列はどのような曲線になるでしょうか．

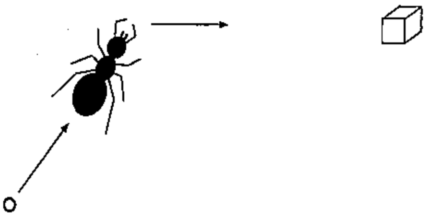

図 1: 蟻の行進

解説

この問題は，A.M. Brucksten 著 “Why the ant trails looks so stright and nice,” (Mathematical Intelligencer, Vo. 15, 59-32, 1993) に由来しています．答えは直感通り，巣穴と砂糖を結ぶ直線になります．さて，このことをどのように説明すれば良いのかが問題になります．

この問題の数学的背景は，曲線短絡流と呼ばれる問題です．シャボン玉は，石鹸水の引っ張る力によって球になります．この形が最も安定だからです．また，板に数本の釘を打ち付けてその頭にゴムを掛けると一番外にある釘を頂点とした凸 (へこみのない) の多角形の場合ゴムの引っ張る力が全体として最小になります．このように，自然は形を最も最適な形にする力を持っています．この例から類推すると，蟻の曲がり角に釘を立て，ゴムを道筋とし，全体として引っ張る力が弱くなる曲線を作れば良いことになります．

ここでは，もう少し数学的に説明してみましょう．最初の蟻の曲がり角を $\boldsymbol{p}_i\ i = 1, 2, \cdots n$ とします．ここで，$\boldsymbol{p}_1$ が巣の位置で，$\boldsymbol{p}_n$ が砂糖の位置です．そうすると，蟻の歩く道は $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \cdots, \boldsymbol{p}_n$ と点の位置の列で表すことができます．時間 t の角の位置を $\boldsymbol{p}_i(t)$ と表すと，条件 1,2 から，位置の時間的変化は

$$\boldsymbol{p}_i(t+1) - \boldsymbol{p}_i(t) = \alpha \frac{\boldsymbol{p}_{i+1}(t) - 2\boldsymbol{p}_i(t) + \boldsymbol{p}_{i-1}(t)}{2},\ i = 2, 3, \cdots, n-1,$$

と書けます．ここで，両端の点については常に，$p_1(t) = p_1$，$p_n(t) = p_n$ が成立していることに注意してください．

この式の右辺は図 2 に示すように点 $p_i(t)$ が，早さ α で，3 点 $p_{i+1}(t)$，$p_i(t)$，$p_{i-1}(t)$ の作る三角形の重心の方向に動くことを表しています．

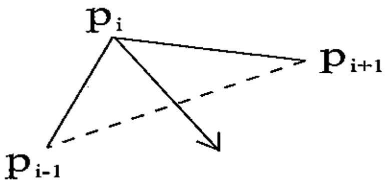

図 2: 頂点の移動

十分時間がたつと，$p_i(t+1)$ と $p_i(t)$ とが等しくなり，上の式の左辺は零になります．従って，右辺も零となり

$$p_{i+1}(t) - p_i(t) = -(p_{i-1}(t) - p_i(t))$$

が成立します．これは，$p_i(t)$ から $p_{i+1}(t)$ に向かう直線と $p_i(t)$ から $p_{i-1}(t)$ に向かう直線とが逆向きの半直線であること，すなわち 3 点 $p_{i+1}(t)$，$p_i(t)$，$p_{i-1}(t)$ が同じ直線上にあることを示しています．この関係が全ての角に対して成立します．つまり角の列が 1 つの直線に沿って並びます．さらに，両端の点が巣穴と砂糖とに固定されていることを考慮すれば，最終的な蟻の道筋は，巣穴と砂糖を結ぶ直線となります．

さて，図 3 に示すように，巣穴と砂糖の間に大きな障害物が有る場合を考えてみます．この場合，蟻は障害物の壁に沿って砂糖にたどり着くことになります．逆に考えると，蟻の道は障害物の外壁の形状を決めることになります．この手法は医学の分野で，レントゲン写真や MRI 映像で得られた画像から腫瘍の部分を決めることに使われます．画像の濃淡の違いや，見かけの模様 (テクスチャという．) の違いが障害物の役目をします．

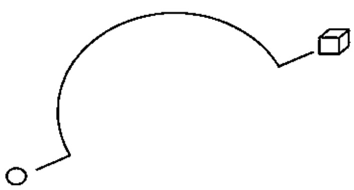

図 3: 障害をよける蟻の行進

また，図 4 に示すように，星形多角形の頂点が矢印のように動くと，星の角が小さくなり，次いで円になり，その円が小さくなって 1 点になり，最後に点が消えてしまいます．これは，ちょうど金平糖が水に解ける様子，あるいは口に含んでいる間に丸くなって，無くなってしまう様子を数学的に表しています．解ける順に薬を配置すれば，徐々に効果が現れる薬の錠剤を作ることが出来ます．

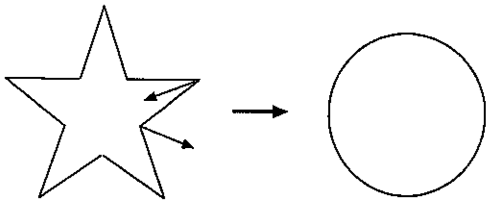

図 4: 星の平滑化

今度は, 頂点を動かす規則を図 4 と逆にしてみます. 星形がだんだんと鋭くなります. これは, 前とは逆に金平糖の角が大きくなっていく様子に対応します (図 5). 金平糖の解け方, 角の出来方は, 結晶の成長と関係しています. このように, 曲がり方が時間によって変化する曲線や曲面は結晶の成長の説明に使われます. また, 成長を制御することは, 半導体や集積回路の製造で利用されています.

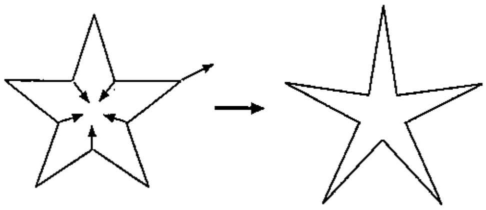

図 5: 星の先鋭化

講評

殆どの参加者が正解に達していました. そこで, 説明のわかりやすさ, 解析の手法に注目して優秀な答案を選びました. 高校生の清水達郎君は正解に達してはいませんが, 数学的に説明する方法を評価しました. また, 加藤茉奈さんの解答は, 解説で述べたことが数式を使わずに非常に明快に説明されていました.

現象を数理的に説明することは数学を駆使することとおなじことです. 言葉で正しく説明できれば, 誰でも数式の力を借りてさらに解析することができます. ただし, ここで利用する数学は 1980 年代から活発化した数学です. やっと最近この分野のまとまった本が出版され始めたところです. 2 年前にはこの分野の国際会議が千葉大学で開催されました. また, 理論応用の両面からこの分野の会議が毎年どこかで開催されています.

2　課題2

課題

ある地方豪族の家には代々，戦国時代に軍資金を隠した場所を記した古文書が伝えられている．その古文書には軍資金の在り処を以下のように書いているという．

出城，十河城の本丸にある松の木を基点に真直ぐ吉尾山へ行け，そこで，左に(直角に)向き，松の木から芳尾山までの距離と同じだけ進め．そこに，旗を立てよ．また，本丸にある松の木から由良山へ真直ぐ進め，そこで，右に(直角に)向き，松の木から由良山までの距離と同じだけ進め．そこに，旗を立てよ．軍資金は二本の旗の中間地点に隠してある．

しかし，この十河城およびこの豪族居城は長宗我部元親軍に包囲され，豊臣秀吉の援軍が間に合わず，落城してしまった．現在，芳尾山，由良山は残っているが，十河城は跡形もなく，それがどこにあったのかすら分からなくなっている．

さて，この軍資金を探し当てることが出来るでしょうか？出来ないと思う場合は，その理由を，出来ると思う場合は，その位置とその理由を説明してください．

解説

この問題は高校数学程度のベクトル解析の応用問題です．この問題と表現は違いますが，内容的に同じものが20年ほど前に自治医科大学の入試2次試験の数学の問題で出題されました．また，共立出版の物理数学 One Point シリーズ14巻の「ベクトルの積はなぜ必要か」の63ページにも同様のものが掲載されています(ちなみに，著者，青野 修氏は自治医科大学教授です.)．

この問題のポイントは右左90度の回転をどう表現するかがポイントとなります．高校程度の数学ですから，高校生にとっては考えやすかったかもしれませんが，中学生にとっては数学的にちゃんとした取り扱いをしようとすると難しかったと思います．

次に模範的な解答を示します．松の木の位置は分からない．もし，それが分からないにも関わらず，軍資金の在り処が特定できるのであれば，松の木の位置はもともと関係ないはず．ということは，基点はどこにとっても良いはずで，もっとも，簡単には由良山を基点とする．そのとき，一つの旗の位置は由良山になる．もう一つの旗の位置は由良山から芳尾山まで行き，芳尾山で反時計回りに90度向きを変え，由良山，芳尾山間の距離だけ進んだところになります．軍資金の在り処はその位置と由良山の中間地点となります．そこは，直角二等辺三角形の相似から由良山から由良山，芳尾山の中間地点まで行き，そこで反時計回りに90度向きを変え，由良山，芳尾山間の半分の距離だけ進んだところになります．地図上(図6参照)では高松琴平電鉄長尾線水田駅と新川に挟まれる住宅街になります．軍資金の在り処が特定されるとすればここ以外にあり得ません．

数学的な構造を見るために，簡単なベクトル解析を用いた解答を説明します．しかし，中学生にも分かりやすいように，ベクトルという言葉を用いずに矢印と表現することにします．

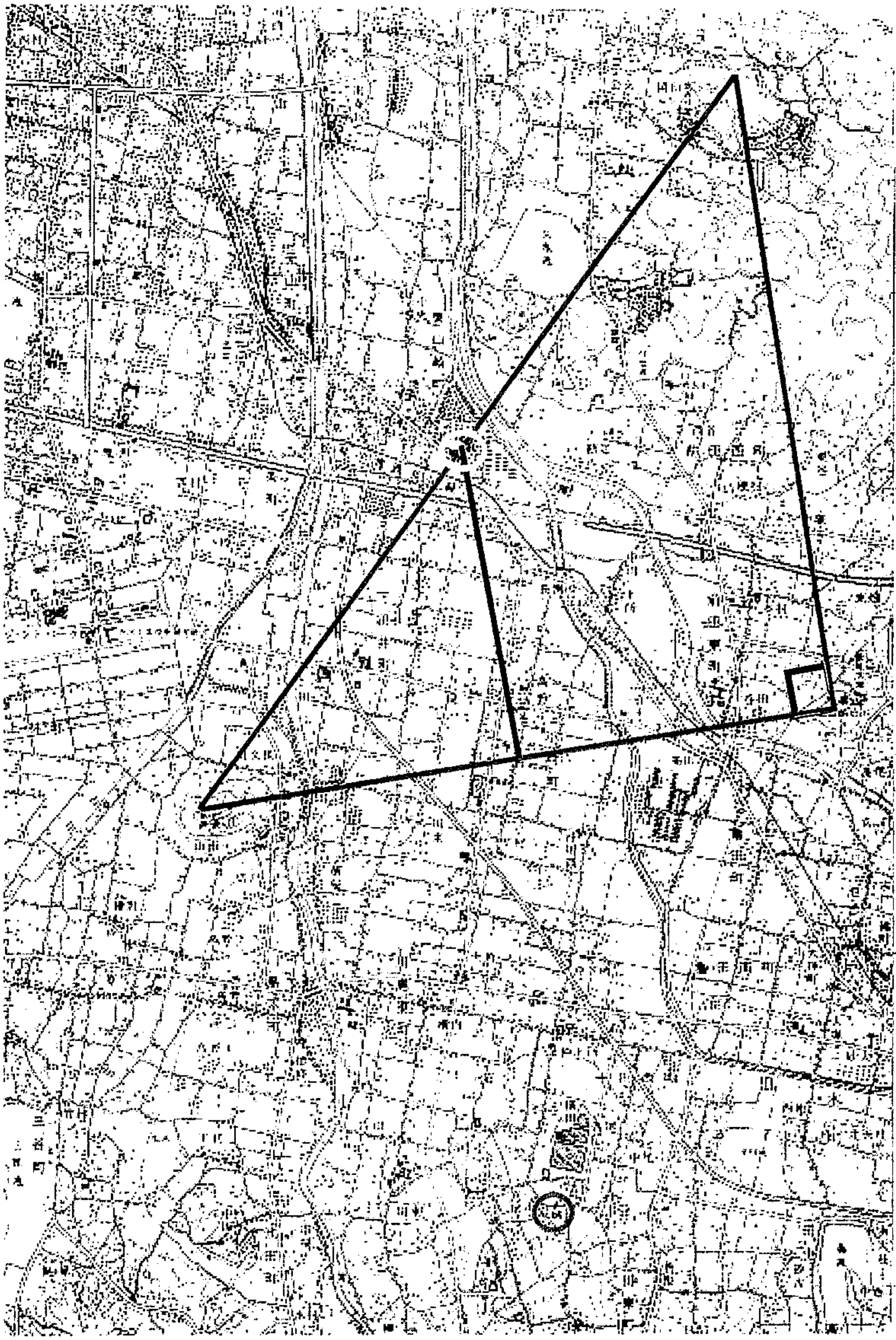

図 6: 地図上の作図

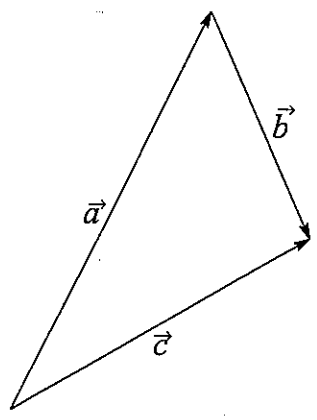

図 7: 矢印の計算

矢印は方向と長さを持っています．まず，矢印の足し算と引き算を定義しておきましょう．矢印 $\vec{a}$ と矢印 $\vec{b}$ を考えます．矢印 $\vec{a}$ と矢印 $\vec{b}$ を考えます．矢印の足し算は矢印 $\vec{a}$ の先端から矢印 $\vec{b}$ を描いたものになります (順序は逆でも同じ)(図 7 参照)．矢印 $\vec{a}$ と矢印 $\vec{b}$ を足したものを矢印 $\vec{c}$ とすると

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$$

という式が成り立ちます．したがって，

$$\vec{b} = \vec{c} - \vec{a}$$

となって，矢印の引き算は引く矢印 a の先端から引かれる矢印 c の先端へ引いた矢印ということになります．ここでは，これだけ理解しておけば十分です．

さて，問題の解答ですが，まず，どこでもいいので矢印の基点をとります (座標系を設定するのと同じ．しかも，城の位置とは何の関係もない.)．その基点からお城の松の木までの矢印を $\vec{p}$，由良山までの矢印を $\vec{u}$，芳尾山までの矢印を $\vec{y}$ とします．

まず，芳尾山経由の場合の旗の位置を考えましょう．松の木から芳尾山までの矢印は $\vec{y} - \vec{p}$ となります．芳尾山経由の場合の旗までの矢印 ($\vec{f_1}$ とする.) は，芳尾山までの矢印にこの矢印を左へ (反時計回りに)90 度回転させた矢印を足したものになります．ここで，矢印を反時計回りに 90 度回転させる操作を L を使って書くことにしましょう．矢印 $\vec{a}$ を 90 度回転させたものは $L\vec{a}$ と書きます．実際には R は高校数学の一次変換で習うように行列で書けます．2 次元空間 (平面) の場合，角度 θ だけ矢印を反時計回りに回転させる行列は

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

(L はここで $\theta = \pi/2$ としたもの) と書けますが，ここでは，

$$L(\vec{a} + \vec{b}) = L\vec{a} + L\vec{b}$$

という性質を持っているということのみを用いて，詳細には触れないことにします．

さて，これを用いると芳尾山経由の場合の旗までの矢印は

$$\begin{aligned}\vec{f_1} &= \vec{y} + L(\vec{y} - \vec{p}) \\ &= \vec{y} + L\vec{y} - L\vec{p}\end{aligned}$$

ここで，ある矢印 $\vec{a}$ について考えてみると，$R\vec{a}$ と $L\vec{a}$ は逆向きの矢印になっていますから，

$$R\vec{a} = -L\vec{a}$$

と書けます．なぜなら，$R\vec{a} + L\vec{a} = 0$ だから．

また，二つの旗の中間地点までの矢印は $(\vec{f_1} + \vec{f_2})/2$ と書ける．なぜこうなるかといえば，二つの矢印を隣り合う二つの辺とする平行四辺形を考えれば，$\vec{f_1} + \vec{f_2}$ は反対の頂点までの対角線を表し，その半分 $(\vec{f_1} + \vec{f_2})/2$ は二つの対角線の交点，つまり，二つの矢印 $\vec{f_1}$，$\vec{f_2}$ の先端の中点までの矢印となっているからです．

したがって，二つの旗の中間地点，つまり，軍資金の在り処までの矢印は

$$\begin{aligned}\frac{\vec{f_1} + \vec{f_2}}{2} &= \frac{\vec{y} + L\vec{y} - L\vec{p} + \vec{u} + R\vec{u} - R\vec{p}}{2} \\ &= \frac{\vec{y} + \vec{u}}{2} + \frac{L\vec{y} - L\vec{p} - L\vec{u} + L\vec{p}}{2} \\ &= \frac{\vec{y} + \vec{u}}{2} + \frac{L\vec{y} - L\vec{u}}{2} \\ &= \frac{\vec{y} + \vec{u}}{2} + L\left(\frac{\vec{y} - \vec{u}}{2}\right)\end{aligned}$$

となります．右辺の第 2 項は由良山と芳尾山の中間地点までの矢印を表し，第 2 項の $(\vec{y} - \vec{u})/2$ は由良山から由良山と芳尾山の中間地点までの矢印を表し，したがって，第 2 項はそれを反時計回りに 90 度回転したものになります．この問題の重要な点は軍資金の在り処が二つの旗の中間地点となっていることにあります．松の木までの矢印は時計回り，反時計回りに回転されたものが足し合わされ，消えてしまうから，松の木の位置が分からなくても軍資金の位置は特定できるのです．

この問題は高校数学で扱うベクトル解析，一次変換の内容です．大学に入って理学，工学を学ぶ場合，ベクトル解析，線形代数は非常に重要になります．高校の物理ではベクトルは扱いませんが，大学の物理では力学，電磁気，流体力学など全ての分野でベクトルやその微分，積分が現れます．工学においても，電気回路や画像処理，CG においてもベクトル解析，線形代数なしでは記述できません．そういう意味において，高校までにベクトル，一次変換の基礎を固めておくことが重要です．

講評

高校生では 2 次元の座標系を定義し，解いた解答が 2 つあり，いずれも正解に達していました．それとは別に，複素平面を用いて，複素平面では虚数単位 i をかける操作は反時計回り 90 度回転する操作を表すことを用いて取り扱った回答がありました．残念ながら計算ミスなどで完全な解答とはなっていませんでしたが，複素平面を応用したことを高く評価しました．

大学での物理では2次元の(粘性，摩擦を考えない場合の)流体力学は複素解析と表裏一体になっていること，また，波の伝わりを記述する波動方程式や量子力学における波動関数は複素数で，物理学や工学では複素数，複素平面，複素解析を応用しています.

高校までの数学は後に応用する必要があるから勉強していることを肝に命じて，機会があれば持てる知識を積極的に応用して欲しいと思います.

中学生では松の木の位置をいろいろな点にとって，軍資金の在り処がどこになるか作図した答案がほとんどでした．ほとんどの答案が正解に達していました．その中で，何を評価するか問題でしたが，具体例を多く示しているもの，考察の論理性がはっきりしているものという基準で評価しました.

答案の中には城の位置を地名から推定した例がありました．その推定はなかなか鋭く，実際に城のあった位置をよく予測していました.

問題文中では城はどこにあったか分からないとありますが，図6に示すように十河城のあった周辺は城と言う地名で呼ばれ，また，江戸時代になり，四国勢で最後まで長宗我部元親軍によく対抗したことを讃え，高松藩主松平氏よりその豪族の菩提寺が十河城址に建立されています．が，この問題の場合，城の位置の推定が全く間違った場所でも，正解に達します.

3　課題3

課題

水面に浮かんでいる2つの物体は互いにどのように振舞うでしょうか？会場にある，いろいろある球体を用いて実験し，その法則を見つけてください．また，その原因はどこにあるのでしょうか？実験を通して考えてみてください．

実験に際しては，床の振動，水の波，風の影響が出ないように注意してください．球の材質，大きさの組み合わせを変えて実験しましょう．また，両面テープで球におもり (硬貨など) をつけて，沈み方が変わった場合も考えてみましょう．球の表面を石鹸で洗ってみる，水面に洗剤を入れて見るなど，いろいろ，工夫してみましょう．

解説

界面や膜中に分散して存在する物体間には，表面張力を介して界面と平行な方向に力が働きます．この力は物体の大きさによらず，あらゆる物体間に働く普遍的な力です．働く力の大きさは物体の大きさと「濡れ」の性質に依存し，引力にも斥力にもなります．物体が非常に小さな場合には，二つの物体に働く力は物体間の距離に反比例します．これは奇しくも，2次元空間における重力や電気力と同じ法則となります．

この問題では，いろいろな素材でできたさまざまな大きさの球を用いて，どのような力が働くか，実験によりその規則性を探ってもらおうと言うものです．この力は「濡れ」の性質，つまり，水をはじくか，濡れやすいかに依存するので，いろいろな素材の球の組み合わせによってどんな力が働くか，また，大きさにも依存するので同じ素材の球同士でもさまざまな組み合わせがあります．また，この力の根源は表面張力ですので，界面活性剤を入れることにより，力の働き方も変わります．その変化を実験を通して観察してもらうのがねらいです．

次に模範的な解答を示します．界面 (水面) に物体を置くと界面が変形します．この変形を表面張力が元に戻そうとすることによって，二つの物体に力が働くことになります．

最も簡単な例として，ピンと張り固定した広いゴムのシートを考えましょう．このシートの上に重いボールを置くと，ゴムは伸び，ボールがあるところが窪みます．そこへもう一つボールを置くとそのボールの周りも窪みます．しかし，日常よく経験するように，しばらくすると二つのボールは次第に近づいていき，最後にはくっつきます．それは，そのほうがシートの変形量が小さく，ゴムの弾性エネルギーが得するからです．このゴムの弾性エネルギーが表面張力に対応します．また，このボールの例はゴムのシートがボールにまとわりつくことはないので，この実験で言えば，撥水性の (疎水性，水をはじく) ボールの場合に相当します．

物体の表面が親水性の (水にぬれやすい) 場合は界面が窪むのではなく，物体により引き上げられるようになる．その様子を図8に示す．図8(a) にあるように，撥水性の球の周りの水面は窪むが，(d) に見られるように親水性の球の周りの水面は引き上げられる．これらを区別するために，球表面から伸びる水面が水平面となす角 (メニスカス傾斜角)ψ(ギリシャ文字，プサイ) を下向きを正として (つまり，親水

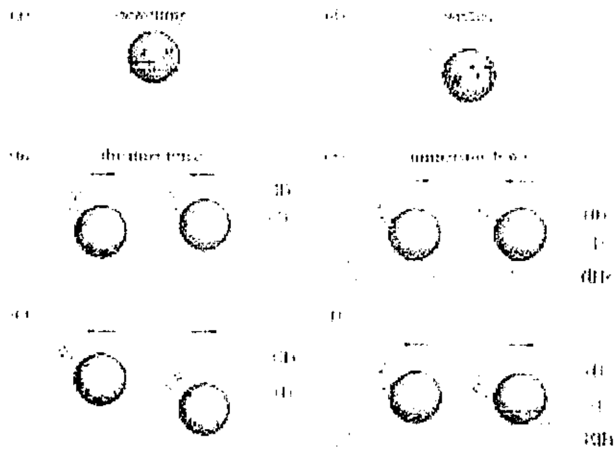

図 8: 球の周りの液体表面の形状

性の場合が正となるように) 定義する.

では，$\psi<0$ となる疎水性のもの同士だとどういう力が働くかと言うと，図 8(b) にあるように，引力が働く．また，逆に，図 8(e) のように，$\psi>0$ となる親水性のもの同士の場合でも引力が働く．しかし，疎水性のものと親水性のものの組み合わせの場合は，斥力が働く．このように，二つの物体に働く力の方向は，お互いの ψ の積の符号で決定される．

水面の変形が多いときほどエネルギーが損をしているので，働く力も大きくなる．その変形の大きさは近似的にはこの角度 ψ によって表すことができるであろう．また，球が水と接している円 (界面接触線) の半径 r が大きいほど，その分，水の表面が長くなるので，表面張力的には損になり，この場合も働く力が大きくなる．

実際，理論計算により，物体 1 と物体 2 に対して

$$
\begin{aligned}
Q_1 &= r_1 \sin\psi_1 \\
Q_2 &= r_2 \sin\psi_2
\end{aligned}
$$

を定義すると (ただし，r_1，r_2 はそれぞれ物体 1，2 の界面接触線の半径で，ψ_1，ψ_2 はそれぞれ物体 1，2 のメニスカス傾斜角)，二つの物体間に働く力 F は近似的に

$$F \propto \sigma Q_1 Q_2$$

と言う関係があることが分かっている．ただし，σ(ギリシャ文字，シグマ) は界面張力である．特に，二つの物体間の距離 L が十分小さい場合には

$$F \propto \sigma \frac{Q_1 Q_2}{L}$$

となる．これは，2 次元空間でのクーロン力 (や重力) と同じ法則であり，それに対応して，Q_1，Q_2 のことを毛管電荷と呼ぶ．

Q_1，Q_2 の定義にある r_1，r_2 は物体の大きさに関係するので，この力は一般に物が大きくなれば強くなる．実際，濡れ方が同等であるとして，物体の半径 R を変えた場合，撥水性のもの同士では

$$F \propto R^6/\sigma$$

であり，親水性のもの同士では

$$F \propto \sigma R^2$$

となることが分かっている．しかし，物体が大きくなると質量が R^3 で増え，また，水の抵抗も増えるので，移動速度が速くなるかどうかは場合による．

この実験は非常に見慣れた，日常茶飯事に起こっている現象を科学の対象として観察した．科学の本質は現象を不思議に思い，その原因を究明することであるから，科学する心を養ってくれればと思う．この問題では，多くのパラメーター (要因) があるので，それらを整理し実験をし，その結果から法則導く力が試される．また，物体の動きだけでなく，物体と水の界面の状況が本質的であり，現象の細かな観察が重要であることも学べる．また，この問題で取り扱った力は2次元版の重力，クーロン力と同等となっており，それらの (場の理論的な) 直感的解釈に役立つ．

講評

数人，実験をせずにピントの外れた議論をしたものがいました，実験を行ったほとんどの者は同種のものを受けべた場合，引力が働くことを見出していました．しかし，その引力の原因の考察となるとさまざまで，原因究明をあきらめるもの，静電気と考えるもの，重力とするものもありました．この重力と言うのは，微妙です．実は，物を置くと水面が変形するのは重力があるからで，鉛直に働く重力を水面が横方向に変換したと考えられなくはないからです．しかし，その重力と言うのが二つの物体間に働く万有引力という意味であれば，大きな間違いで，それは桁外れに小さいのです．

正解には至っていませんでしたが，考察の途中で毛管現象と言う記述をしたものがありました．この記述は非常に的を得た考察で，実際，この問題で取り扱った力は横毛管力と呼ばれています．

また，表面張力との関係に気付き，水面に洗剤を入れたり，球の表面に塗りつけてみるなどの試みがなされていました．それにより，働く力の現象を見出した答案もありました．非常に慎重によく実験された，良い答案でした．特に，実験で行ったことをよく整理し，分かりやすい表現で記述した答案があった，それを高く評価しました．

他方，実験において，水面の変形を注意深く観察しているものもあった，これも高く評価しました．

水面の変形，メニスカス傾斜角の図などを描き，その傾斜の度合いの違いにより力が働くという完璧な回答をした答案があった．しかし，ほとんど実験に関する記述はなく，これらの記述は参考書などの受け売りと考えられます．回答と言う面では評価できるが，科学する姿勢と言う意味ではあまり評価できません．人が言っていることが本当に正しいのか，確かめてみる良い意味での猜疑心，好奇心が重要です．

4　課題 4

課題

季節による星座の見え方や，星座の中を動く惑星の運動は，古代から人々の感心を呼んできました．天球を動く惑星や星は，赤経，赤緯を用いて，地球が中心にある球面の内側に張り付いているようにして，その見かけの位置を表現されます．さて，木星や土星のような惑星は，この天球上を一方向に動くのではなく，図 2 に示すように逆行することが有ります．この見かけの運動を説明するのに，地球が宇宙の中心にあると考える天動説では図 3 の左の図のように，惑星は地球を中心とする円を中心とする円の上を動くさらに小さな円の上を動いているとして説明されます．

惑星の見かけの運動だけを説明する場合，地球や惑星が太陽の周りを動いていると考えるのと地球が宇宙の中心に有って，上に述べたように 2 つの円を考えるのとどちらがいいのか，わるいのか，全く差がないのかを説明してください．

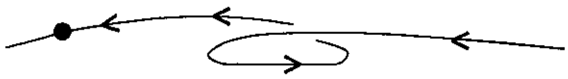

図 9: 天球上での惑星の逆行

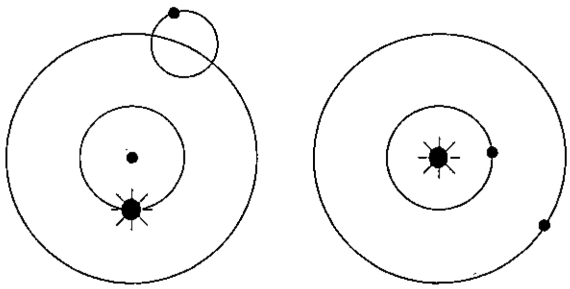

図 10: 天動説と地動説

解説

天動説と地動説との関係については天文学の教科書あるいは地学の教科書には書かれています．現在は，観測技術の進歩，物理学の進歩から，地球が太陽の周りを回っていることが実証されています．

星の動きや，星座の季節による変化を考える場合には太陽も昼間見える星として天球上の座標で表されます．このように，星や星座の地球上からの見かけの大まかな動きを説明する場合には，地球が太陽の周りを回っていることをあまり意識はしません．しかし，天の極近くの星の季節による微妙な位置ずれを説明するには地球が動いていることを考慮したほうが説明が容易です．

惑星の逆行については，天動説の小さな円板は，逆行を説明できるように考えられたものですから，当然，このことによって説明できます．物理の言葉で表現すれば，これらの運動は相対座標系で対象を観測

することになります.

地動説，天動説どちらの場合にも円盤が同じ平面にあると仮定して，惑星の天球上での位置を表す式を計算しておきましょう．また，地球を含む惑星の軌道を円で近似します．さて，まず天動説の場合，大きな円の半径を1，小さな円の半径を r とします．r が1に比べて非常に小さいとすれば，天球上の星の位置は t を時間として，

$$\theta = \omega t + \cos^{-1} \rho(1 + r\cos(\alpha - \omega)t)$$

と近似できます．ここで，ρ は1より少しだけ小さな数であり，ω, α は，それぞれ大きな円と小さな円が1回転するのにかかる時間の逆数です．また，地動説の場合は，地球の回転半径を1，外惑星の回転半径を $a > 1$ とすれば，

$$\theta = \omega t + \cos^{-1} \frac{1 - a\cos(\omega - \alpha)t}{\sqrt{a^2 + 1 - 2a\sin(\alpha - \omega)t}}$$

となります．ここで，ω, α は，それぞれ地球と外惑星とが1回転するのにかかる時間の逆数です．どちらもそれほど簡単な式ではありません．結果として，天動説の小さな円盤は，地球から見た惑星の位置を表す式の第2項を出来るだけ簡単な式で表すように導入された仕組みと考えることもできます.

講評

今では地動説が当たりまえなので，皆さん地動説に引っ張られていました．逆に言えば，天動説から地動説に考えを変えるには，それほど発想の転換が必要だったことかがわかると思います．与えられた条件の中で，何が説明できるかを詳細に解明した2組の解答を評価しました.