

第24回数理科学コンクール課題

令和3年11月19日

千葉大学先進科学センター

千葉大学大学院融合理工学府数学情報科学専攻情報科学コース

第24回数理科学コンクールの課題をお届けします。本年度は、感染症の流行を受けて、開催時期と開催方法を変更しました。数理科学コンクールの主題である、「自ら実験をして現象を考察する。」を引き続き実施するために、今回は実験機材を参加者に送ることにしました。機材の準備には、千葉大学大学院の学生の皆さんにも協力してもらいました。配送できる機材の大きさや種類には制限があるため、皆さんが受け取る機材の中には自分の使いたいものが入っていないかもしれません。しかし、与えられた機材だけを使って、実験の方法を考察して工夫することも科学者にとって重要な訓練です。

感染拡大防止のため3密を避けることから、機材は参加者の自宅宛てに送りました。そのため、今回の数理科学コンクールの課題の部では個人参加だけを対象としました。しかし、例年行っている数理科学コンクールのように、1題の課題に対して複数の考えをぜひ解答してください。むしろ、複数の解答を主催者は期待しています。なお、大変残念ではありますが、今回もロボットの部はやむを得ず中止としました。

開催案内に書かれている期日までに解答を千葉大学に返送してください。また、感染拡大防止の観点から、対面での優秀者表彰式、記念品贈呈式、講評会は開催しません。その代わりに、優秀者の参加番号を千葉大学先進科学センターのホームページ上に掲示して受賞をお知らせします。また、優秀者への賞状と記念品は受賞者の皆さんにお送りします。主催者一同、次回の数理科学コンクールでは、千葉大学で皆さんに会えることを待ち望んでいます。

千葉大学先進科学センター

センター長 教授 眞鍋佳嗣

千葉大学大学院融合理工学府数学情報科学専攻情報科学コース

コース長 教授 関屋大雄

1. 4つの課題を用意しました。いくつかの課題に解答してもかまいません。また、1つの課題にいくつ解答してもかまいません。例えば、実験をして見つけた解答と、実験をせずに考えた解答との2つの解答を提出してもかまいません。むしろ2種類以上の解答を歓迎します。その場合には、どうして答えが2つ以上になったのかも説明してください。
2. 用意した解答用紙を何枚使用してもかまいません。ただし、異なる番号の課題は同じ解答用紙に記入しないでください。また、1つの課題に1つ以上の解答用紙を使った場合は解答用紙の記入欄に課題ごとの通し番号と総枚数を記入してください。1つの課題に2つ以上の解答を提出する場合も同様に解答用紙の記入欄に課題ごとの通し番号と総枚数を記入してください。
3. 同封した機材以外を利用して実験を行った場合には、その機材名を解答用紙に記載してください。
4. 自宅にあるどのような資料を参考にしてもかまいません。インターネットで参考資料を検索した場合には、検索先の URL を答案に引用してください。そして、どの部分を参考にしたのかを答案に書いてください。
5. 今回は自宅で課題を解答するため、コンテストとしての保険に加入していません。刃物等を使用する場合は、怪我をしないように利用法をまず考え十分注意してください。課題に、火や炎を利用することは想定していません。つまり、火や炎を利用しないと考察できない課題は用意していません。

課題 1

日本には、ヨーロッパ全体にあるのと同じ台数とか、世界中の三分の一の台数とか言われるほどの X 線コンピュータ断層撮影装置 (X 線 CT スキャナー) があると言われています。実際、最近では近所のそれほど大きくない医院でも X 線 CT の検査ができるほど普及しています。外国で日本ほど日常的に頻繁に CT 検査をすることはまずありません。

CT とは Computed Tomography の略で、物体をさまざまな方向から X 線で撮影し、コンピューターで再構成処理を行うことにより、物体の断面画像など内部構造を得ることができます。異なる材料で構成された物質の場合だけでなく、同じ物質であっても密度の違いによりその差を計測することができます。

X 線 CT スキャナーは医療用のものの認知度が高いですが、工業用 X 線 CT スキャナーもあります。材料内部の亀裂や劣化をものを壊すことなく評価することができる分析装置です。また、同一試料の内部変化を継続的に観察するのも威力を発揮します。

今では、なくてはならない道具となった X 線 CT スキャナーですが、どのようにして物体の断面画像を得ているのでしょうか？ 簡単な例を用いて考えてみましょう。

問 1. 図 1(a) のような、正方形の測定対象物を考えます。物体に対して、図 1(b) のように、下から上に向けて 2 本、左から右に向けて 2 本の X 線ビームを平行に照射します。照射する X 線の強度を便宜的に 100 とします。物体に照射された X 線は物体内にある物質によりさまざまに吸収されます。

物体を 4 分割したそれぞれの領域に、図 1(c) に示す量の X 線を吸収する物質があるとき、上側、右側で物体内で吸収されずに透過して来た X 線の強度を測定するとそれぞれどのような値になるのでしょうか？

上側、右側で物体内で吸収されずに透過して来た X 線の強度を測定すると、それぞれの位置で図 1(d) のようになりました。4 つの領域、それぞれの X 線の吸収量はどのような値になるのでしょうか？

問 2. 正方形の物体、図 1(e) に示すように 3 方向から 3 本の X 線ビームを平行に入射させ、それぞれの反対側で物体内で吸収されずに透過して来た X 線の強度を測定すると、それぞれの位置で図 1(e) のようになりました。物体の 9 等分された領域、それぞれの X 線の吸収量はどのような値になるのでしょうか？

問 3. 物体を 16 分割したそれぞれの領域に、図 1(f) に示す X 線を吸収する物質があるとき、どのように X 線ビームを照射し、透過して来た X 線の強度を測定し、その測定結果を処理すると物体の 16 等分された領域、それぞれの X 線の吸収量を求められるか？ 近似値を求める方法でもよいのでその方法を説明してください。

問 4. X線CTの画像をより鮮明にするためには、分割数、即ち、一方向に平行に照射するX線ビームの本数を増やす必要があります。ビームの本数がとても多くなった場合にどのようにすれば物体内部各部の吸収量を計算できるでしょうか？方法を考えて説明してください。

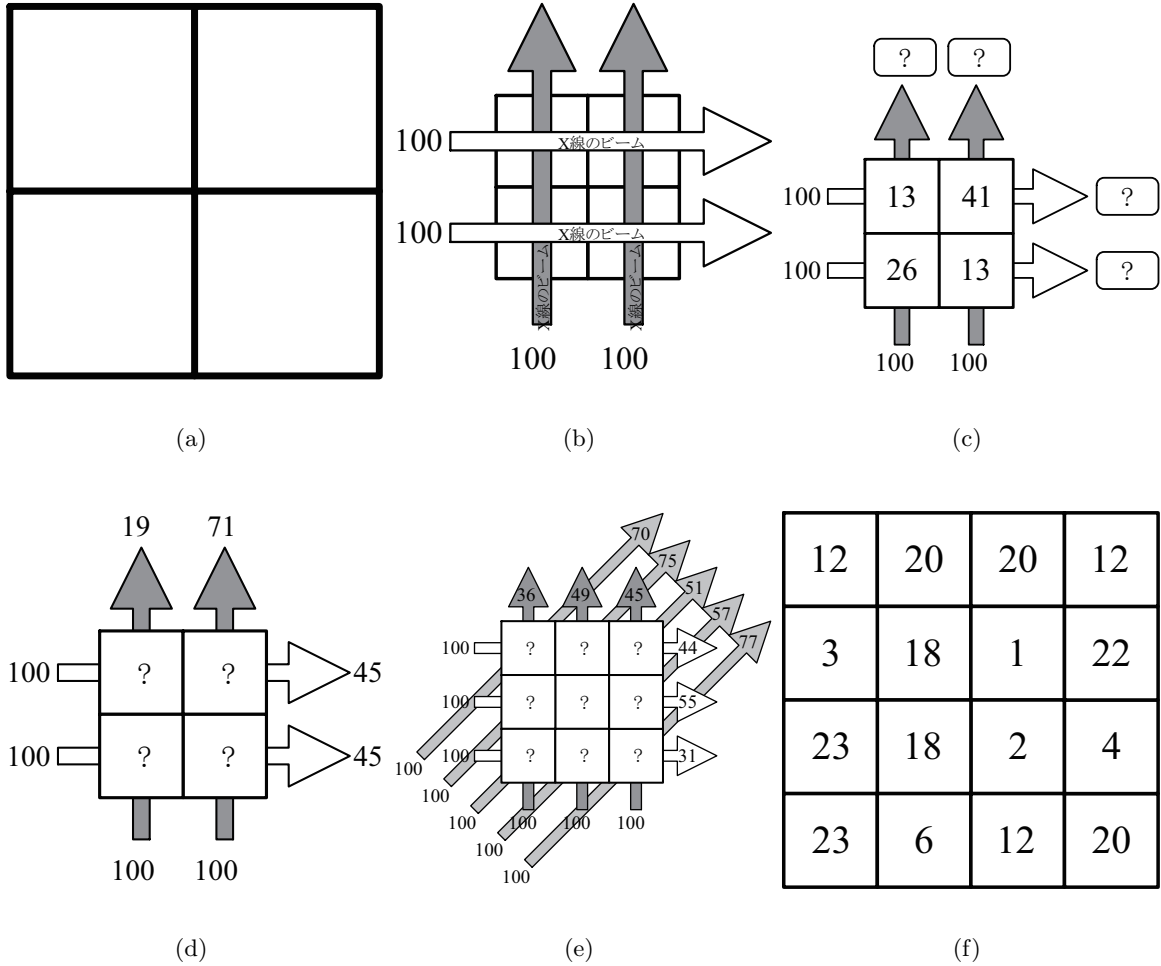


図 1: 断層像再構成の説明

課題 2

2019年、歌手・浜崎あゆみさんのデビューのきっかけとなったエイベックス株式会社 松浦勝人 専務 ((当時) (現在, 代表取締役会長)) との出会いから別れまでが, ノンフィクション作家, 小松成美氏により, 2人へのインタビュー取材を元にフィクション小説『M 愛すべき人がいて』として出版された。それをドラマ化したテレビ朝日の「M 愛すべき人がいて」の中で浜崎あゆみはニューヨークへ行き, 発声練習をさせられる。その時, ボイストレーナーから, 口の前にあるろうそくの炎を揺らさずに歌え, できるようになるまで練習するように指示される。

そんなことは可能なのか?どのようにすれば実現できるのか, そして, 発声においてどのような意味, 効果があるのか, 科学的に論証してください。

課題 3

鉄道が発明される以前に、たくさんの物資を載せて移動できる移動手段は船を使うことでした。現代の船舶は、航海中の位置を決めるためには GPS を利用しています。それ以前はロラン、さらにさかのぼれば、沿岸の地図を使っていた。その頃は、大洋横断航路ではなく、沿岸航路でした。沿岸航路では、沿岸の地形を頼りに航海をしていた。近代的な技術が開発される以前には、船乗りには種々の数理的才能が要求されていました。現在でも、装置が故障した場合には、伝統的な手法と、船乗りの能力とで操船することが要求されます。これは、航空機の操縦でも同様です。

そこで、地形図を利用して、沿岸を航行すること考えよう。同封の地図は、国土地理院発行の与那国島の最高峰である宇良部岳の周辺の地形図です。

地図の中の新川鼻の沖を西から東に向かって航行するときに、船から眺めた地形がどのように見えるかを作図して描く方法を考えてください。

課題 4

音楽は音の芸術であるか音の組合せと進行が重要な表現手段です。音楽を記録する楽譜は、作曲者が演奏者に音の組合せ方、音の進行を指示する図表です。現在の楽譜は5本の横線の組の中である五線譜の上に、音の高さ、一度に出す音の組合せを記述し、進行の程度を表すために、音の基本的な長さを記述する音符が利用されます。五線譜と音符、さらに基本の音の位置を決める調号、拍子記号、さらに、音の強さや、連続的な流れを支持する種々の演奏記号が加わります。音を弦で発音させる場合、元の長さを半分にして出る音と元の音との違いを1オクターブといいます。古典的な西洋音楽では1オクターブの間は12の音に分かれています。そのため鍵盤楽器の1オクターブの間に、黒鍵と白鍵盤を合わせて12個の鍵盤があります。従って、和音とは12の音の中のいくつかの音の組合せと考えることができます。

楽曲の中に隠れる数学的な性質を解析することを考えてみます。数学的には、倍音が組み合わせられると心地良い響きとなります。和音は正12角形の中の特定の3頂点(場合によっては4頂点)でできる、3角形(4角形)で表されます。従って、楽譜に沿った楽曲の進行とは、12角形に含まれる3角形(4角形)が時間的に回転することになります。和音はポップスやジャズではコードと呼ばれ、時間的なコードの変化をコード進行と呼ぶことがあります。

古典的な楽曲の作曲技法として、カノン、フーガが代表的です。J.S. バッハはそれまでの作曲技法を集大成したと言われます。そのためバッハは数学的な作曲技法を駆使して、楽曲の中に数学的な構造を埋め込んでいます。

そこで、12音の間の変換、和音の成す3角形の12角形上での回転を数学的に記述して、同封のバッハの楽曲の構造を説明してください。バッハのカノンを解析する前に、練習問題として、やはり同封のパッフェルベルのカノンに適用して試してください。パッフェルベルのカノンは2つの編曲版を同封しました。