第26回数理科学コンクール課題

令和５年７月17日

千葉大学先進科学センター
千葉大学大学院融合理工学府数学情報科学専攻情報科学コース

第 26 回数理科学コンクールの課題です．本年度から, 対面開催でのコンクールを復活しました．それに合わせて, 今回から「ロボットの部」も復活しました．過去 3 回の経験から, 課題の部は, 遠隔開催も引き続き実施することとしました．そして, 本年度より「人工知能の部」を開催します．人工知能の部は完全に遠隔開催としました．

数理科学コンクールの主題である,「自ら実験をして現象を考察する．」を引き続き実施するために,

遠隔開催参加者には実験機材を送ることにしました．　機材の準備には，千葉大学の学生の皆さんにも協力してもらいました．配送できる機材の大きさや種類には制限があるため，皆さんが受け取る機材の中には自分の使いたいものが入っていないかもしれません．　しかし，　与えられた機材だけを使って, 実験の方法を考察して工夫することも科学者にとって重要な訓練です.

今回から, 対面開催の参加者と遠隔開催の参加者と共通の課題対面参加者のための課題, 遠隔参加者のための課題, 3 種類の課題を用意しました．それぞれ, 4 つの課題に取り組んでください．しかし, 例年行っている数理科学コンクールのように，１題の課題に対して複数の考えをぜひ解答してください．むしろ, 複数の解答を主催者は期待しています．対面開催への参加者は従来通りに, コンクール当日の提出締切時間までに, 答案を提出してください．また, 遠隔開催への参加者は, 開催案内に書かれている期日までに解答を千葉大学に返送してください.

千葉大学先進科学センター
センター長 教授 松浦 彰
千葉大学大学院融合理工学府数学情報科学専攻情報科学コース
コース長 教授 塩田 茂雄

1. 対面開催の参加者と遠隔開催の参加者と共通の課題対面参加者のための課題, 遠隔参加者のための課題, 3 種類の課題を用意しました.
2. 指定した課題に対して, いくつの課題に解答してもかまいません. また, 1 つの課題にいくつ解答してもかまいません. 例えば, 実験をして見つけた解答と, 実験をせずに考えた解答との 2 つの解答を提出してもかまいません. むしろ 2 種類以上の解答を歓迎します. その場合には, どうして答えが 2 つ以上になったのかも説明してください.
3. 用意した解答用紙を何枚使用してもかまいません. ただし, 異なる番号の課題は同じ解答用紙に記入しないでください. また, 1 つの課題に 1 つ以上の解答用紙を使った場合は解答用紙の記入欄に課題ごとの通し番号と総枚数を記入してください. 1 つの課題に 2 つ以上の解答を提出する場合も同様に解答用紙の記入欄に課題ごとの通し番号と総枚数を記入してください.
4. 遠隔開催の参加者は, 同封した機材以外を利用して実験を行った場合には, その機材名を解答用紙に記載してください.
5. 遠隔開催の参加の自宅にあるどのような資料を参考にしてもかまいません. インターネットで参考資料を検索した場合には, 検索先の URL を答案に引用してください. そして, どの部分を参考にしたのかを答案に書いてください.
6. 遠隔開催の参加者は自宅で課題を解答するため, コンテストとしての保険に加入していません. 刃物等を使用する場合は, 怪我をしないように利用法をまず考え十分注意してください. 課題に, 火や炎を利用することは想定していません. つまり, 火や炎を利用しないと考察できない課題は用意していません.
7. 対面開催, 遠隔開催, どちらへの参加も課題に関する質問は監督者に質問してください. どんな質問でもどしどし質問してください.
8. ロボットの部は, 第 1 日目にロボットの動作に関するプログラムの講習を受けてください. 第2日目 にプログラムを作成し, 第 2 日目の午後 3 時以降に動作評価のためのコンテストを実施します.
9. 人工知能の部は, 課題を別途, 登録した住所に送ります.

   AIcontest@chiba-u.jp

   宛てのメールに添付して提出してください.
10. 答案作成にインターネット上の記事, 動画を参考にした場合は, それれの url 等, 記事, 動画の所在を引用として明記してください.

課題 1

(共通課題)

作図問題と折り紙の関係を幾何学の問題として数学的に考えてみよう．平面幾何学の中で定規 (目盛がなく, 直線を引くことができる器具) とコンパスとを使って作図する問題では, 以下の 5 つの操作

1. 与えられたの 2 点を通る直線を作図できる.
2. 与えられたの 1 点を中心とし, それ以外与えられた 1 点を通る円を作図できる.
3. 互いに平行でないの 2 直線の交点を作図できる.
4. 与えられた円と直線との高々2 個の交点を作図できる.
5. 与えられた 2 円の高々2 個の交点を作図できる.

を有限回施して作図できる図形, 又は描いた図形から得られる量 (辺の長さ等) を解とすることです. この操作は, 代数的には 2 次方程式を有限回解いてその解を求めることに相当します．また, 定規とコンパスで可能な作図において, すべての新しい点は,

- 2 つの円の交点
- 円と直線の交点
- 2 つの直線の交点

のいずれかです．従って, 定規とコンパスとを使って作図する問題は上の 3 つの操作を有限回施して作図できる図形, 又は描いた図形から得られる量 (辺の長さ等) を解とすることです．定規とコンパスで可能な作図においての基礎となるのはユークリッド幾何学の 5 つの公準

第 1 公準 与えられたの 2 点を直線で結ぶことが可能である.

第 2 公準 与えられたの 2 点を結んだ線分は両側に延長して直線にできる

第 3 公準 与えられた 1 点を中心にして任意の半径の円を描画可能である

第 4 公準 全ての直角は等しい（角度である）.

第 5 公準 1 つの直線と直交する 2 線分を延長しても交わらない．(平行線公準)

に基づく操作を定規とコンパスで実現したことと考えることができます．第 5 公準から, 1 つの直線が 2 つの直線に交わり, 同じ側の内角の和が 2 つの直角より小さいならば, この 2 つの直線は限りなく延長されると, 2 つの直角より小さい角のある側において交わるであることが分かります.

一方, 紙の折り方に関して

1. 2 点 p_1, p_2 が与えられたとき, 2 点を通るただ 1 つの折り方がある.

2. 2 点 p_1, p_2 が与えられたとき, p_1 を p_2 に重ねるただ 1 つの折り方がある.

3. 2 直線 l_1, l_2 が与えられたとき, l_1 を l_2 に重ねるような折り方がある.

4. 1 点 p_1 と 1 直線 l_1 が与えられたとき, l_1 に垂直で p_1 を通るただ 1 つの折り方がある.

5. 2 点 p_1, p_2 と 1 直線 l_1 が与えられたとき, p_1 を l_1 上に重ね, p_2 を通る折り方がある.

6. 2 点 p_1, p_2, 2 本の直線 l_1, l_2 が与えられたとき, p_1 を l_1 上に重ね, かつ, p2 を l2 上に重ねる折り方がある.

7. 1 点 p_1 と 2 直線 l_1, l_2 が与えられたとき, p_1 を l_1 に重ね, l_2 に垂直な折り方がある.

の 7 つの性質は, 折り紙公理とよばれています.

ユークリッドの公準に基づく作図操作と折り紙公理との関係を数学における公理の立場から比較して, 作図操作と折り紙公理の相違点や類似点を数学的にまとめてください. ただし, 数学における公理とは

「ある体系を構築する場合に, 導入される最も基本的な仮定.」

の集合です. また, 幾何学の 5 つの公準は, 幾何学の問題を考える上で, 公理として採用されます. 詳しくは, ユークリッド幾何学の公理ともよばれます. 第 5 公準を見直して, 平行線が交わることがあるすれば, ユークリッド幾何学ではない幾何学として, 非ユークリッド幾何学が構成されます.

課題 2

(共通課題)

ガソリンエンジンは内燃機関の 1 種であり, その代表的なものです. ここでは, エンジンはレシプロエンジンと呼ばれ, 爆発から回転運動を取り出す装置です. 世界的に環境保護の立場から, ガソリンエンジン, ディーゼルエンジンなどの内燃機関を搭載した自動車を電気自動車に置き換えていく動きが加速しています. しかし, 極寒・極暑で, 人里から離れた場所では, 現在までの運用実績による信頼性から自動車だけではなく, 発電機などにも今なお, レシプロエンジンが利用されます. また, 船舶の駆動系も同様です. この状態はしばらく解決できないかもしれません.

内燃機関では, 機械内部で発生させる爆発から回転運動をとりだしています. その方法の概要は閉じた空間で爆発を起こし, その爆発から発生する膨張による平行運動を回転に変えます. このようなエンジンをレシプロエンジンといいます. 爆発を起こす場所を気筒 (シリンダー) といいます. レシプロエンジンの開発の歴史は, 気筒を増やすことと, その配置を変えることです. レシプロエンジンの性質性能を評価する指標の 1 つが, 気筒数です. エンジンの気筒数は 1 気筒, 2 気筒, 3 気筒, 4 気筒, 5 気筒, 6 気筒また, 気筒の配置は, 直列, V 字, 水平対向などがあります. 水平対向とは気筒を水平に配置し, 回転軸の両側からピストンを往復させる形式エンジンです. 水平対向 6 気筒エンジンを搭載した車種を製造・販売する有名な自動車メーカーの 1 つがポルシェです. さて, レシプロエンジンが爆発によるピストンの往復運動を回転運動に変換することから, 装置全体に振動が発生します. 自動車設計者, 航空機設計者にとって一番の問題は, ピストンの上下運動から発生する振動を抑えることです. そのために, 気筒数を増やし続けたとも言えます. 気筒内での爆発を連続的に動作さる機構の 1つが, 4 サイクルエンジンです. 気筒の燃焼室内で, 燃料の爆発を起こすために, 4つの過程「吸気・圧縮・爆発燃焼・排気」を行います. 気筒数とエンジン本体の振動の関係を解析し, 振動を抑えるのに適した気筒数を解析してください. ピストンの往復運動は最上位点, 最下位点で瞬間的に停止します. この点をそれぞれ, 上死点, 下死点とよびます. 2 つの死点から, ピストンが反対方向に動き出すことから偶力による振動が発生します. この振動をレシプロエンジンの 1 次振動とよびます. この振動によって, クランク 1 回転間にエンジン本体が 1 回上下に振動します. ピストンが死点から運動方向を変えるときに気筒（シリンダー）の内壁に力がかかります. 回転する軸にクランクで結ばれたシリンダーヘッドが内壁に掛ける力の方向は上死点, 下死点で反対方向になります. したがって, シリンダーヘッドがシリンダー内壁を押し付ける偶力により, 回転軸 1 回転の間に 2 回振動が発生します.この振動を 2 次振動と呼びます. それぞれの気筒から, 1 次振動, 2 次振動が発生します. これ以上の次数の振動も発生します. しかし, 影響が小さいので, 気筒数, 気筒配置, 死点位置を組み合せて, 1 次振動, 2 次振動を抑えることが問題になります. 死点位置の組合せとは, 軸が回転中にピストン間で死点が角度でどれだけずれかるかの設定です. 例えば, 2 気筒のレシプロエンジンで, ピストン 1 が上死点にあるとき, ピストン 2 が下死点にあるとき, 死点配置は 180 度ずれているといいます. 以下では 4サイクルのレシプロエンジンを考えます.

問 1 直列 n 気筒のエンジンのピストンに, 端から順に, 1 から n までの番号を付けます. 1 次振動, 2 次振動を最小にする死点の配置を求めて下さい.

問 2 水平対向 $2n$ 気筒のエンジンのピストンに, 端から順に, 1 から n までの番号を付けます. 1 次振動, 2 次振動を最小にする死点の配置を求めて下さい.

レシプロエンジンより振動の少ないエンジンとしてロータリーエンジンが知られています. ロータリーエンジンはピストンの上下による振動の発生しない星形 3 気筒エンジンと考えられます. しかし, その構造から回転軸が擂粉木運動をするため, 違った機構でエンジンに振動が発生します.

問 3 ロータリーエンジンの軸の擂粉木運動を最小にする方法を考えてください.

考える素材として, 1 気筒 4 サイクルエンジンの動作模型が用意してあります. また, 以下の url に動作の説明があります.

https://www.youtube.com/watch?v=fazwVbPnCw0

https://www.youtube.com/watch?v=edeEQ7tPKMg

https://www.youtube.com/watch?v=cTSvLtQqPn0

https://www.youtube.com/watch?v=DKF5dKo_r_Y

https://www.youtube.com/watch?v=BXQ27pU3_7E&t=240s

課題 3

(共通課題)

この世では, 一般に, あるもの（台）の上に置いてある物体を動かす (運動させる) ためには, ある大きさ以上の力を加える必要があります. これは, 「物体が力を受けると, その力の方向 · 向きに加速度を生じ, その加速度の大きさは力に比例し, 物体の質量に逆比例する. 」というニュートンの運動の第 2 法則に反しているように見えます. これは, 経験上よく知られているように, 台と物体の接触面に摩擦力がはたらいているからです.

摩擦現象について, 観察に基づく経験的な摩擦の基本法則 (アモントン・クーロンの法則)) があります. その法則は次の 4 つの項目からなります.

1. 摩擦力は垂直荷重に比例する.
2. 摩擦力は見かけの接触面積には無関係である.
3. 運動摩擦の摩擦力は, 滑り速度には無関係である.
4. 静止摩擦力は運動摩擦力よりも大きい.

摩擦の法則を検証してください (4 項のうちの一つでもよい.). 特に, 何故「見かけの接触面積」に無関係なのか, 摩擦の原因とは何かについて考察してください. 検証は実験的にでも理論的にでも構いません.

実験を行う場合は, 以下の項目を考え, 実験計画を明示し, 測定結果は表にまとめたり, グラフを描いて考察してください.

- 何を検証するのか（実験の目的）
- どのような道具, 器具を用いるのか
- どのような物理量を何を用いて測定するのか
- 測定結果（表, グラフ）
- その測定結果からどのようなことが言えるのか考察する

課題 4A

(対面課題)

会場に物体浮揚実験キットが数台用意してあります. 実際に物体を浮揚させ, 以下の点について物理的に考察してください. .

問 1 どのような原理で物体は浮揚しているのか, 物体が浮揚している位置について説明しなさい.

問 2 物体が浮揚する条件は何でしょうか?

問 3 液体を浮揚させた場合を考えます. 液滴の大きさによって形はどのように変わるのか. また, その形はどのように決まっているか.　を考察してください.

課題 4B

(遠隔課題)

与えられた問題を計算機で実行する算法の手順 (アルゴリズム) の実行に要する基本処理の手数の総数によって問題の分類を行うことが行われます. 整数の演算を例にアルゴリズムの手数を見積もる手法を考えましょう. 10 進数の乗算を考えます. この時, 1×1 から始まり 9×9 で終わる 1 桁の整数の乗算が基本になります.

10 進数

$$X = x_{n-1} \times 10^{n-1} + x_{n-2} \times 10^{n-2} + \cdots + x_1 \times 10 + x_0$$

を $X = \langle x_{n-1}, x_{n-2}, \cdots, x_1, x_0 \rangle$ と表すことにします. ただし, $0 \leq x_i < 9 (i = 0, 1, 2 \cdots, n-2)$ $x_{n-1} \neq 0$ です.

問 1 2 数 $X = \langle x_{n-1}, x_{n-2}, \cdots, x_1, x_0 \rangle$ $Y = \langle y_{n-1}, y_{n-2}, \cdots, y_1, y_0 \rangle$ の積を計算するのに要する積の回数 (九九の表を参照する階数) を求めなさい. ただし, 計算では桁上がりを考えません.

$0 \leq x_i, y_i < 10$, $n \geq 1$ に対しては, 2 桁の零以上の整数は

$$x = x_1 \times 10 + x_0, \ \ y = y_1 \times 10 + y_0 \tag{1}$$

と表現されます. 従って, 2 数の桁上がりを考えない積は

$$x \times y = x_1 \times y_1 \times 10^2 + (x_1 \times y_0 + x_0 \times y_1) \times 10 + x_0 \times y_0 \tag{2}$$

となり, 積の回数は $\sharp\times = 4$ です.

積

$$\begin{aligned} Z &= z_2 \times 10^2 + z_1 + z_0 \\ Z &= X \times Y \end{aligned}$$

に対して

$$\begin{aligned} z_2 &= x_1 \times x_2 \\ z_1 &= x_0 y_1 + x_1 y_0 \\ &= (x_0 + x_1) \times (y_0 + y_1) \\ &= x_0 y_0 + x_0 y_1 - x_1 y_0 + x_1 y_1 \\ &= z_0 + z_1 + z_2 \\ z_0 &= x_0 \times y_0 \end{aligned}$$

より,

$$\begin{aligned} z_2 &= x_1 \times y_1 \\ z_1 &= (x_1 + x_0) \times (y_1 + y_0) + (-z_2) + (-z_0) \\ z_0 &= x_0 \times y_0 \end{aligned}$$

であるから, 工夫をすれば積の回数を 3 回に削減できることが分かります.

数を表現する基数を D と記すことにします. 十進法では $D=10$, 二進法では $D=2$ であり, インターネットのアドレスでは $D=256=2^8$ が利用されます.

4 桁の数 $\langle x_3, x_2, x_1, x_0 \rangle$ は

$$X = x_3 D^3 + x_2 D^2 + x_1 D + x_0$$

であるから

$$\begin{aligned} X &= x_{21} D^2 + x_{20} \\ x_{21} &= x_3 D + x_2 \\ x_{20} &= x_1 D + x_0 \end{aligned}$$

と表現できます. 2 数 $X = x_{21} D^2 + x_{20}$ $Y = y_{21} D^2 + y_{20}$ の積 $Z = z_{22} D^4 + z_{21} D^2 + z_{20}$ は

$$\begin{aligned} z_{22} &= x_{21} \times y_{21} \\ z_{21} &= (x_{21} + x_{20}) \times (y_{21} + y_{20}) + (-z_{22}) + (-z_{20}) \\ z_{20} &= x_{20} \times y_{20} \end{aligned}$$

によって, 2 桁の数の積 3 回で計算できます. そして, 3 桁の数は 3 回の 3 桁の数の積 3 回で計算できます. $n = 2^m$ 桁の数の積を計算するために九九を参照する階数を $T(n)$ とすれば,

$$\begin{aligned} T(1) &= 1, \\ T(2) &= 3, \\ T(4) &= T(2^2)) = 3T(2) = 3T\left(\frac{4}{2}\right) \end{aligned}$$

が成立していることが分かります.

問 2 基数 D より D^n を利用して, 大きな数を 2 分割して計算を実現することを行うと, n 桁の数同士の乗算に要する時間 $T(n)$ と $2n$ 桁の数同士の乗算に要する時間 $T(2n)$ との間には,

$$T(2n) = 3T(n) + cn, \;\; T(1) = 1$$

$n = 2^m$ が成立することを説明しなさい. ただし, c は定数であり, cn は計算の中間で得た値の加算を実行し並べ替える手間が, 数の桁数 n に依存することを表しています.

問 3 c を零として, すなわち, 加算と数の並べ替えは瞬時に実行されるとした場合 $T(n)$ を n の関数として

$$T(n) = Cn^{\alpha} + n \text{ の } \alpha \text{ 次以下の多項式部分}$$

と表すことを考えます. α は 2 以下であることを説明しなさい.

問 4(高校生を対象とした問) $n = 2^m$ とする. n 桁の数を上位 $n/2$ 桁と下位 $n/2$ に分けて計算することを考える. $c = 0$ とすれば,

$$T(2n) = 3T(n)$$

より, $T(n) = An^{\log_2 3}$ になることを示しなさい. ただし, A は定数です.

次に, 3 桁の零以上の整数

$$X = x_2 \times 10^2 + x_1 \times 10 + x_0,\ Y = y_2 \times 10^2 + y_1 \times 10 + y_0$$

の桁上がりを考えない積

$$\begin{aligned} Z &= z_4 \times 10^4 + z_3 \times 10^3 + z_2 \times 10^2 + z_1 + z_0 \\ Z &= X \times Y \end{aligned}$$

を考えましょう. 基数 10 を D と表せば, X, Y は共に, D の 2 次多項式, Z は 4 次多項式と考えることができるので,

$$\begin{aligned} X(D) &= x_2D^2 + x_1D + x_0 \\ Y(D) &= y_2D^2 + y_1D + x_0 \\ Z(D) &= z_4D^4 + z_3D^3 + z_2D2 + z_1D + z_0 \end{aligned}$$

と置けば,

$$Z(D) = X(D)Y(D)$$

です. ここで, $X(D)$, $y(D)$ の係数から $Z(D)$ の係数を求めることが, 2 数の積を計算することになります. $Z(D)$ に $D = -2, -1, 0, 1, 2$ を代入すれば, 連立方程式

$$\begin{aligned} Z(-2) &= 16z_4 - 8z_3 + 4z_2 - 2z_1 + z_0 \\ Z(-1) &= z_4 - z_3 + z_2 - z_1 + z_0 \\ Z(0) &= 0z_4 - 0z_3 + 0z_2 - 0z_1 + z_0 \\ Z(1) &= z_4 + z_3 + z_2 + z_1 + z_0 \\ Z(2) &= 16z_4 + 8z_3 + 4z_2 + 2z_1 + z_0 \end{aligned}$$

を得ます. 証明は省きますが, この連立方程式は解を持ち,

$$\begin{aligned} z_4 &= (Z(-2) - 4Z(-1) + 6Z(0) - 4Z(1) + Z(2))/24 \\ z_3 &= (-Z(-2) + 2Z(-1) + 0Z(0) - 2Z(1) + Z(2))/12 \\ z_2 &= (-Z(-2) + 16Z(-1) - 30Z(0) + 16Z(1) - Z(2))/24 \\ z_1 &= (Z(-2) - 8Z(-1) + 0Z(0) + 8Z(1) - Z(2))/12 \\ z_0 &= 0Z(-2) + 0Z(-1) + Z(0) + 0Z(1) + 0Z(2) \end{aligned}$$

です．そして，

$$
\begin{aligned}
Z(-2) &= X(-2)Y(-2) = (4x_2 - 2x_1 + x_0) \times (4y_2 - 2y_1 + y_0) \\
Z(-1) &= X(-1)Y(-1) = (x_2 - x_1 + x_0) \times (y_2 - y_1 + y_0) \\
Z(0) &= X(0)Y(0) = x_0 \times y_0 \\
Z(1) &= X(1)Y(1) = (x_2 + x_1 + x_0) \times (y_2 + y_1 + y_0) \\
Z(2) &= X(2)Y(2) = (4x_2 + 2x_1 + x_0) \times (4y_2 + 2y_1 + y_0)
\end{aligned}
$$

を考えれば, 積の数が 5 回で済むことがわかります.

問 5 $n = 2^m$ 桁の数を数を 2 分割して積を計算する場合に習って, $n = 3^m$ 桁の数を 3 分割して計算をする場合積の回数について

$$T(n) = 5T(n/3)$$

が成立することを説明しなさい.

3 桁の 2 つの零以上の 2 数の積を計算した手法に習って, さらに桁数の多い数の乗算の積の回数を解析しましょう．まず, 5 桁の 2 数 $X = \langle x_4, x_3, x_2, x_1, x_0 \rangle$, $Y = \langle y_4, y_3, y_2, y_1, y_0 \rangle$ とそれらの積 $Z = \langle z_{10}, z_9, z_8, z_7, z_6, z_5, z_4, z_3, z_2, z_1, z_0 \rangle$ を D の多項式で表すと,

$$
\begin{aligned}
X(D) &= x_4 D^4 + x_3 D^3 + x_2 D^2 + x_1 D + x_0 \\
Y(D) &= y_4 D^4 + y_3 D^3 + y_2 D^2 + y_1 D y_0 \\
Z(D) &= z_{10} D^{10} + z_9 D^9 + z_8 D^8 + z_7 D^7 + z_6 D^6 + z_5 D^5 + z_4 D^4 + z_3 D^3 + z_2 D^2 + z_1 D + z_0
\end{aligned}
$$

となる．D に $0, \pm 1, \pm 2, \mathbf{3}, \pm 4, \mathbf{5}$ を代入すると $\{z_i\}_{i=0}^{10}$ を未知数とする 11 元連立方程式を

$$z_{10} d_i^{10} + z_9 d_i^9 + z_8 x_i^8 + z_7 d_i^7 + z_6 d_i^6 + z_5 d_i^5 + z_4 d_i^4 + z_3 d_i^3 + z_2 d_i^2 + z_1 d_i + z_0 = Z(d_i)$$

$i = 0, 1, 2, 3, \cdots, 10$ ただし,

$$d_0 = -5, d_1 = -4, d_2 = -3, d_3 = -2, d_4 = -1, d_5 = 0, d_6 = 1, d_7 = 2, d_8 = 3, d_9 = 4, d_{10} = 5$$

とする．このとき, 詳細は省略するが, この連立方程式の解を書き下すことができて,

$$z_i = l_{i10} Z(d_{10}) + l_{i9} Z(d_9) + l_{i8} Z(d_8) + l_{i7} Z(d_7) + l_{i6} Z(d_6) + l_{i5} Z(d_5) + l_{i4} Z(d_3) + l_{i2} Z(d_2) + l_{i1} Z(d_1) + l_{i0} Z(d_0)$$

となる．ここで, $Z(d_i) = X(d_i) Y(d_i)$ である.

問 6

2 つの 5 桁の零以上の整数の積を上にまとめた方法で計算する場合, 積の回数は何回必要か見積もってください．　ただし, $\{Z(d_j)\}_{j=0}^{10}$ から z_i を計算する重み付和の計算において, 重みをかける部分の積は考えないことにします.

問 7

p を素数とする. 2 つの p 桁の零以上の整数の積を計算する場合, 積の回数は何回必要かを見積もってください.

2 次関数

$$y = a_2x^2 + a_1x + a_0$$

が 3 点 $(-1, y_0)$, $(0, y_1)$, $(1, y_2)$ を通過するとき, a_0, a_1, a_2 を決めて関数を決定することを考えよう. 2 次関数の係数が決まれば, x_0, x_1, x_2 と異なる点 x_4 で値を計算できます. さて, 通過する点の値を 2 次関数に代入すれば, 3 元の連立方程式

$$\begin{aligned} a_0 - a_1 + a_2 &= y_0 \\ a_0 &= y_1 \\ a_0 + a_1 + a_2 &= y_2 \end{aligned}$$

を得ます. この方程式の解は

$$\begin{aligned} a_0 &= y_1 \\ a_1 &= -\frac{1}{2}y_0 + \frac{1}{2}y_2 \\ a_2 &= \frac{1}{2}y_0 - y_1 + \frac{1}{2}y_2 \end{aligned}$$

です.

2 桁の零以上の 2 数の乗算は, まず数 $X = \langle x_1, x_0\rangle$, $Y = \langle y_1, y_0\rangle$, を多項式

$$X(d) = x_1d + x_0 \tag{3}$$

$$Y(d) = y_1d + y_0 \tag{4}$$

と考えて, 3 点 $(-1, X(-1)Y(-1))$, $(0, X(0)Y(0))$, $(1, X(1)Y(1))$, 次いで, を通過する 2 次関数

$$Z(d) = X(d)Y(d) = z_2d^2 + z_1d + z_0$$

の係数 z_2, z_1, z_0 を決めることになります. そして同様に, 3 桁の零以上の 2 数の乗算は数 $X = \langle x_2, x_1, x_0\rangle$, $Y = \langle y_2, y_1, y_0\rangle$, を多項式として 5 点 $(-2, X(-2)Y(-2))$, $(-1, X(-1)Y(-1))$, $(0, X(0)Y(0))$, $(1, X(1)Y(1))$, $(2, X(2)Y(2))$, を通過する 4 次関数

$$Z(d) = z_4d^4 + z_3d^3 + z_2d^2 + z_1d + z_0$$

の係数を決めることになります.

ロボットの部

課題

1 階の自習室に, RAPIRO が用意してあります．各自でロボットの動作課題を考え, その動作を実現しなさい．どのような動作課題を考えたかレポートを作成してください．動作の独創性, 面白さを評価します．動作実演は 7 月 17 日の午後 3 時に始めます．それまでに, 動作プログラムを完成させてください.

人工知能の部

AI, データ・サイエンスに関する報道は落ち着きを見せてきています. AI, データ・サイエンスの手法がいろいろな現場で普通の考え方になってきました, また, AI, データ・サイエンスの課題を取り扱い, 解決するためのプログラムも種々公開せれています, そこで, 千葉大学数理科学コンクールでは, 本年度より「人工知能の部」を開催します. 人工知能の部は遠隔開催とします.

課題

Wolfram cloud が提供する Wolfram 言語の機械学習機能を利用して, 千葉大学先進科学センターが用意するテ解説書を, インターネットを通じて取得し事前学習をおこないます.

課題とデータを 8 月 26 日までに課題を登録した住所に送ります. 8 月 27 日 10:00 時からから 16:0 時の間に課題に取り組んでください.

答案は, 8 月 27 日 16:30 までに,

AIcontest@chiba-u.jp

宛てのメールに添付して提出してください. ただし, 添付する解答のファイルの形式は pdf としてください. 手書きの答案をスキャナー, スマートホンで pdf 変換したものでも構いません. どうしても pdf ファイルにできない場合は他の形式でも受け付けます.

第 26 回数理科学コンクール課題

令和 5 年 8 月 27日

千葉大学先進科学センター
千葉大学大学院融合理工学府数学情報科学専攻情報科学コース

第 26 回数理科学コンクールの課題です. 本年度から, 対面開催でのコンクールを復活しました. それに合わせて, 今回から「ロボットの部」も復活しました. 過去 3 回の経験から, 課題の部は, 遠隔開催も引き続き実施することとしました. そして, 本年度より「人工知能の部」を開催します. 人工知能の部は完全に遠隔開催としました.

AI, データ・サイエンスに関する報道は落ち着きを見せてきています. AI, データ・サイエンスの手法がいろいろな現場で普通の考え方になってきました, また, AI, データ・サイエンスの課題を取り扱い, 解決するためのプログラムも種々公開せれています, そこで, 千葉大学数理科学コンクールでは, 本年度より「人工知能の部」を開催します. 人工知能の部は遠隔開催とします.

千葉大学先進科学センター

センター長 教授 松浦 彰

千葉大学大学院融合理工学府数学情報科学専攻情報科学コース

コース長 教授 塩田 茂雄

人工知能の部

注意事項

1. Wolfram cloud が提供する Wolfram 言語の機械学習機能を利用して, 千葉大学先進科学センターが用意するテ解説書を, インターネットを通じて取得し事前学習をおこないます.

2. 課題とデータを 8 月 25日までに課題を登録した住所に送ります. 8 月 27 日 10:00 時から 16:00時の間に課題に取り組んでください.

3. 答案は, 8 月 27 日 16:30 までに,

   aicontest@chiba-u.jp

   宛てのメールに添付して提出してください.

4. ただし, 添付する解答のファイルの形式は pdf としてください. 手書きの答案をスキャナー, スマートホンで pdf 変換したものでも構いません. どうしても pdf ファイルにできない場合は他の形式でも受け付けます.

5. 答案作成にインターネット上の記事, 動画を参考にした場合は, それれの URL 等, 記事, 動画の所在を引用として明記してください.

課題 1　2 つの検査（検査 1，検査 2）結果で風邪と診断されたグループと花粉症と診断されたグループのデータがあります.

花粉症

個人番号	1	2	3	4	5	6	7
検査 1	6.2	9.9	7.7	6.9	8.9	4.3	8.6
検査 2	2.3	6.7	3.2	4.5	4.3	4.6	2.0

風邪

個人番号	8	9	10	11	12	13	14
検査１	2.1	0.9	3.1	4.1	6.2	4.9	5.1
検査２	6.0	5.3	3.2	5.8	1.3	3.1	1.8

1. 花粉症, 風邪を特徴量空間にプロットしなさい.
2. 機械学習を用いて, 横軸に検査 1，縦軸に検査 2 をとり, 花粉症, 風邪の境界線を引きなさい.
3. 機械学習を用いて, 2 つの検査結果が (5.7, 5.0) である場合, どちらと判断されるか, また, それぞれ疾患である確率を求めなさい.
4. 与えられたデータだけからより明確に (5.7, 5.0) の診断を下すにはどのようにすればよいか.
　工夫した（改善された）, 特徴量空間プロット, 花粉症, 風邪の境界線プロット, (5.7, 5.0) の診断確率を示しなさい.

課題 2　ある病の診断に対して, 7つの項目の検査を行い, 正常, 症状 1, 症状 2 と診断されたグループのデータがあります.

正常

個人番号	検査 1	検査 2	検査 3	検査 4	検査 5	検査 6	検査 7
1	33	21.21	54.55	1.5	30.30	2	1.44
2	20	35.00	25.00	0.0	45.00	6	1.95
3	18	27.78	16.67	0.0	38.89	3	2.22
4	31	12.90	32.26	3.5	51.61	5	1.52
5	28	10.71	50.00	0.0	46.43	7	1.23
6	30	6.67	6.33	3.0	60.00	5	1.37
7	27	3.70	2.22	2.0	51.85	1	2.11
8	33	6.00	4.85	2.0	57.58	2	1.32
9	57	0.53	31.58	1.5	56.14	11	1.55
10	20	15.00	20.00	2.0	50.00	8	1.53
11	14	14.29	28.57	4.0	57.14	4	1.71
12	36	8.33	36.11	2.0	66.67	5	1.42
13	30	16.67	36.67	4.0	30.00	6	1.42
14	37	0.81	45.95	4.0	54.05	7	1.41
15	11	45.46	45.46	0.0	36.36	6	2.95
16	17	11.77	35.29	5.0	58.82	2	1.59
17	34	8.82	32.35	1.5	55.88	6	1.34
18	18	22.22	33.33	0.0	33.33	4	1.78
19	27	22.22	29.63	0.0	37.04	5	1.46

症状 1

個人番号	検査 1	検査 2	検査 3	検査 4	検査 5	検査 6	検査 7
20	27	14.82	18.52	7.0	51.85	7	1.57
21	47	6.83	59.57	2.0	61.70	5	1.15
22	19	10.53	5.26	2.0	68.42	4	1.16
23	14	35.71	14.29	0.0	35.71	3	1.21
24	11	26.67	45.45	0.0	54.55	3	0.91
25	15	19.93	33.33	1.0	60.00	7	1.13
26	26	14.29	11.54	3.5	46.15	10	1.33
27	7	16.00	71.43	0.0	42.86	3	1.21
28	23	16.67	65.22	0.0	43.48	4	1.04
29	18	16.09	50.00	2.5	61.11	5	1.36
30	11	9.09	27.27	0.5	18.18	2	0.64
31	26	11.54	26.92	6	38.46	6	1.44
32	15	13.33	53.33	1.5	40.00	4	0.83
33	19	36.84	21.05	1.5	36.84	3	1.45
34	19	10.53	78.95	0.0	73.68	4	1.13
35	15	6.67	53.33	0.0	46.67	5	1.23
36	32	6.25	68.75	0.0	15.63	5	1.05
37	33	15.15	15.15	2.0	60.61	5	0.92
38	42	28.57	23.81	1.5	35.71	5	1.48

症状 2

個人番号	検査 1	検査 2	検査 3	検査 4	検査 5	検査 6	検査 7
39	11	9.09	18.19	1.5	54.55	3	1.50
40	21	0.00	36.36	3.0	59.09	4	1.27
41	11	27.27	54.55	0.0	27.27	6	1.00
42	13	15.39	23.08	1.0	53.85	3	1.38
43	16	6.25	43.75	1.0	93.75	4	0.94
44	11	0.0	27.27	1.0	54.55	1	1.09
45	13	0.0	38.46	3.0	38.46	1	0.69
46	29	3.45	41.38	2.0	51.72	5	0.50
47	17	0.00	64.71	3.0	64.71	2	0.80
48	22	0.00	77.27	1.0	77.27	1	0.66
49	16	6.25	56.25	0.0	25.00	1	0.28
50	12	33.33	58.33	0.0	50.00	2	1.12
51	18	22.22	44.44	0.0	55.56	5	1.60
52	23	0.00	39.13	1.0	47.83	4	0.87
53	12	0.00	91.67	0.0	83.33	4	0.25
54	7	14.29	57.14	0.0	85.71	4	1.09
55	44	13.64	59.09	0.0	40.91	1	0.41
56	11	18.18	63.64	1.0	27.27	2	0.59
57	24	12.50	25.00	1.0	45.83	3	1.41

1. 7 つの項目のうち, どのような組み合わせの何個の項目の検査を組み合わせたデータを用いると, 2 次元もしくは 3 次元の特徴量空間で, 正常, 症状 1, 症状 2 を明確に分類できるか考えなさい.

2. 3 組のデータ

   (24, 33.33, 25.00, 2.5, 41.67, 7, 2.19)
   (12, 0.00, 91.67, 0.0, 75.00, 2, 1.00)
   (24, 12.50, 25.00, 1.0, 45.83, 3, 1.42)

   はそれぞれ, どのような確率でどの状態であると同定されるかを考察してください.

* データは全て「数式処理ソフト Mathematica による多変量解析（現代数学社）」より