第25回数理科学コンクール課題解説

令和5年3月1日 千葉大学先進科学センター

目 次

1　はじめに

明治の文明開化以来, 我が国は欧米先進国の科学技術を効率よく吸収して発展してきました. 戦後もこの傾向は基本的には変わっていません. 現在, 我が国は大量の自動車や電子機器を輸出して経済大国となっていますが, これらの工業製品の基本原理はほとんど外国で考えられたものです. 欧米諸国との間に経済摩擦や文化摩擦が生じている現状を考えると, これからの我が国で大切なことは独創性のある個性的な人材を育成して, 新しい科学技術のフロンティアを切り開き, 世界に貢献することであると考えられます.

千葉大学では, 日本のみならず, 世界の科学技術の先端を担う若者を発掘し, 育成するための一助として, 本年度も, 第 25 回数理科学コンクールを開催しました. 前回に引き続き本年度も感染症の流行を受けて, 開催時期と開催方法を変更しました. 数理科学コンクールの主題である, 「自ら実験をして現象を考察する. 」を引き続き実施するために, 今回は実験器材を参加者に送ることにしました.

このコンクールの特色は次の通りです.

1. 自由にゆったり考える

   試験時間は 2 日, 自宅で時間を自由に使い, 解答を導く. また, インターネットの検索も条件を付けて可としました.

2. たのしい物理・数学の発見

   物理や数学のカリキュラムにとらわれず, 物理や数学の本質に根ざした, 考えて楽しい問題を提供する.

3. 多彩な才能の評価

   様々な参加者の優秀な能力やユニークな発想を多面的に評価するため, 問題をたくさん解いたものだけでなく, 1 題に集中してすばらしい発想を出したものも表彰の対象にする.

   .

4. 人材の育成

   コンクール参加者の物理や数学の能力をさらに高めるため, ホームページ上に表彰者の名前と講評を掲載する.

過去 24 回のコンクールに引き続き, 多くの中高生の参加者があり, いろいろユニークなアイディアが生まれました. 中学生も, 高校生に負けず優秀でありました. そして, 答案を見ると, それぞれの問題に興味を持ちながら解答していることが読んでとれました.

第 25 回数理科学コンクールの課題の解説と提出された答案の評価を以下にまとめます. 解説に述べてあるように, 各課題は課題出題者の周りにある基本的な問題や最先端の問題, さらには歴史的に意味のある問題を元にして作成しました. 課題提出者一同, みなさんの素晴らしい洞察力と表現力を前にして, 大変感心いたしました.

参加者の皆さんが今後, 科学する心を磨き続け, 我国の科学の発展に貢献することを課題作成者一同希望します. 今後も諸君と共に科学することを楽しみたいと考えています. 千葉大学では今後も引き続きこのコンクールを実施する予定です. 物理・数学に興味がある中高生の積極的な参加を期待しています. 課題作成者もさらに研鑽をかさね, おもしろく, しかも科学の本質に迫る課題を考えていきます.

課題作成者

千葉大学教授　石井久夫
千葉大学名誉教授　井宮　淳
東京慈恵会医科大学教授　植田　毅
(五十音順)

令和５年３月１日

2　優秀者氏名

令和 4 年 11 月 26 日と 27 日に開催しました第 25 回数理科学コンクールの参加者の皆さんのすばらしい答案の中から以下の参加者諸君を表彰することを決定しました.

第 25 回数理科学コンクール優秀者

金欅賞	中村颯人	江澤功真	高野琉衣	土屋晴奈	松井大輝
銀欅賞	西本圭佑	北村涼太	林 哲彦	吉澤汀子	中田才絢
	阿部ひなた	兼本悠良	井ノ上要	松野裕智	田邊陽子
学長賞	羽鳥寿真	本山松明	大場杜輔		

課題		参加者名		
1	江澤功真	高野琉衣	土屋晴奈	吉澤汀子
	中田才絢	松井大輝	兼本悠良	羽鳥寿真
	本山松明	大場杜輔		
2	江澤功真	井ノ上要		
3	中村颯人	林 哲彦	土屋晴奈	
4	中村颯人	高野琉衣	西本圭佑	北村涼太
	阿部ひなた	松井大輝	松野裕智	田邊陽子

千葉大学先進科学センター
センター長 教授　　　　眞鍋佳嗣
千葉大学大学院融合理工学府
数学情報科学専攻情報科学コース
コース長 教授　　　　大澤範高

課題の部

3　課題 1

網目の形状とその性質, 利用法について考えてみましょう．社会生活でよく目にし, 世話になる網目は, 四角形と六角形が多く, 衣服を作る生地は縦糸と横糸があります．微視的に見れば生地は四角形の網目になっています．織機の性質から生地の網目は四角形になったとも考えられます．しかし, 四角形だからこその性質もあります.

少し網目を大きくして, 漁網や洗濯ネットを例に, 四角形と六角形の網目の違いを数学的に考えてください．考察の参考として, 四角形の網目として洗濯ネットを, 六角形の網目として, 石鹸を入れる網を用意しました.

解説

この課題は, チェビシェフ網 (Tchebycheff net) に基づく曲面構成です. 古くは船体の形状, 曲面を含む屋根 (その内側となる天井) の設計, 施工に利用されてきた曲面設計法です. 曲面設計と建築意匠設計とが結びついた分野を Architectural Geometry(適切な訳語が定着していないので, 英語をそのまま使います. 欧文専門書の題や, 国際会議の会議名として利用されています.)

伸縮する四角形から構成される網は曲面への適合性が良いため, 曲面設計に利用されるだけでなく, 種々の用途に利用されています. ボールを保管する網, 卵を入れる網, また, 飲料水や酒瓶を並べて保管する場合に間隙要撃材などに利用されています. さらに, 衣服などにも利用されます.

課題では, 空間変形に対して, どのような網構造の追従性が良いか, すなわち近似性が良いかを考えてもらうことを意図しました. チェビシェフ網は２群の曲線群からなる網目構造です. チェビシェフ網から構成される曲面は合同ではない四角形で構成される多面体です.このような多面体で近似された曲面を離散曲面と呼ばれることがあります. 離散曲面の中で, 四角形だけで面が構成される場合がチェビシェフ網です.

チェビシェフ網を利用すれば曲面上の網の交点で２つの異なる空間ベクトルを決めることができるので, その点での法線ベクトルが計算できます. したがって, 網の交点として決まる点で, 近似すべき曲面と法線を合わせて, 曲面を近似することが可能となります. また, 網が構造的に４点の近傍点を持つため, 位相幾何学的には平面上の格子点配列と同等となります. そのため, 計算機の中では, 法線ベクトルの２次元配列として表現できます. そのため, チェビシェフ網は, CG(コンピュータ・グラフィックス) では曲面設計のための重要な手段です. また, 建築意匠で利用されている有名な例は, 代々木の第一体育館の屋根です. 2 本の高い柱を結ぶ主ワイヤーは吊り橋になっており, 主ワイヤーから垂らした側ワイヤーによってチェビシェフ網を構成し,きれいな曲面屋根を構成しています. 代々木体育館の設計は丹下健三, 構造設計は坪井善勝を代表とし, 川口衞らが参加しています.

講評

布, 網に関して, 二次元的な変形を考察した解答が多数ありました. 一方, 教材として付けた洗濯網は, 洗濯機の中で, 洗濯中には水流によって３ 次元的に変形します. 洗濯の対象によって水流によってもまれても中に入れた衣類にしわが生じないように, 全体としてしなやかに変形するように設計されていると考えることができます. 一方, 玄関などに敷かれるマット裏補強は６角形網になっています.端から捲れあがっても「しわくちゃ」にならないように設計されていると考えることができます. 衣服の素材である織物はその製造法から４ 角形の細かな網から構成されています. 結果的に, 身体の動きに追従性の良い曲面が構成できるようになっています. 曲面設計の本質に気づいた解答を高く評価しました.

4　課題 2

計算手順を記述する言語を計算機言語 (プログラミング言語) といいます. C 言語, Python など, いろいろなプログラム言語が開発されています. 各計算機言語には種々の命令セットが複数用意されています.

一方, ほとんどの命令は適切に決めた一つの命令から構成できます. そこで, 命令が 1 種類しかない計算機言語を考えます. 言語 SJ は以下のように定義されます.

$$\texttt{SJ} : a, b, l$$

$$\texttt{SJ} : a, b_{=}, l$$

a に示す番地に蓄えられた値から b に示す番地に蓄えられた値を引き, その値が負であれば, ラベル l の命令にジャンプ, そうでなければ, 値を a に示す番地に蓄える. $b_{=}$ は b で表される数値である. この言語 SJ で動作する計算機で取扱うことができるデータは整数のみです.

この言語を使って, 計算の基礎となる演算を構成すること考えます,

問 1 番地 a と番地 b とのデータを交換するプログラムを作成してください.

問 2 カウンター (計数器) とは, 繰返しの回数を計数し, 事前に決めたある回数に達した場合に, 次の処理に移る機構です. SJ でカウンターを構成してください.

問 3 番地 a に蓄えられた数値の符号を判定し, 数値の値が正, 零, 負に対応して, 番地 b に 1, 0, -1 を蓄積する処理を SJ で構成してください.

問 4 四則演算を構成することを考えます. 減算は定義通りですから, 加算, 乗算, 除算を構成してください.

解説

電子計算機による情報表現の基本は 2 進数です．そして, 情報処理の基本は整数の四則演算です．この課題では, 命令セットの 1 つである計算機 (OISC:One Instruction Set Computer) によって計算の基本演算を構成する課題です.

もっとも簡単な交換は, 補助領域 c を, 1 つ用意すれば実現できます.

次に四則演算を考えます．減算は SJ の定義そのものです．ゼロからある値を引けば負の数になります．この数を命令 SJ の引数とすれば加算が実現できます.

乗算 $a \times b$ は a に a を b 回加えることによって実現できます．以上をまとめると,

$$a \times b = \underbrace{a + a + \cdots + a}_{b}$$

です．そして, 整数 a, b の除算 a/b は

$$a = c \times b + r, 0 \leq r < b$$

を満たす c とします．したがって, c は, a から b が除算できる最大回数です．c は $a \div b$ の整数部分 $[a \div b]$ です．以上より, 乗算の場合には加算の回数を計数するカウンターが, 除算の場合は a から b が除算できるかを判定する大小比較演算が必要となります.

2 つの記憶領域のそれぞれに蓄えた値 a と b との同値判定は命令 SJ の実行結果が零であると次に進めばよいので, 命令 1 つですみます．a, b の値が必要な場合には補助領域に値を蓄えておくことにします.

命令 SJ によるカウンターは, ループを 1 回繰り返すたびに, 記憶領域に蓄えた数値から 1 づつ減じることで実現できます．また, 零を蓄えた記憶領域に数値を 1 ずつ加え, 事前に他の記憶領域に蓄えた値との大小比較をすることでも実現できます．後の方法は, 事前に繰返し回数が決められず, 計算結果から繰返し回数が決まる場合に有効です.

2 つの数 x と y との大小判定は中間領域に $z_1 = x - y, z_2 = y - x$ を記憶しておき, z_1, z_2 から 1 を減じて, どちらかが零になれば, 2 数 x, y の大小が判定できます. 従って, 除算の場合には, $a := a - b$ とb との大小判定を, 除算が 1 回実行される度に判定する必要があります．ただし, $a := a - b$ は a の値を $a - b$ に置き換えることを意味します.

整数の絶対値は, $a_=$ が正であればそのまま, $a_=$ が零より小さければ, $-a_=$ を出力すればよいので, 零との大小比較が必要です.

以上の説明に従って, 四則演算を SJ で実現してください.

OISC は命令セットを削減して計算効率を上げる計算機の設計指針 (計算機機構学 Architecture) と関係があります. 計算の基本を単純にすると結果として計算中に消費される電力が少なくなります. すなわち省エネルギー計算が実現されるため, 非常に重要な技術となります.

いろいろなシステム (OS:Operating System 基本システム) の上で実行される Appl(Application System 応用システム) を作成することを, 大学でも演習で行います．一方, 電子計算機を設計する立場から見れば, 電子計算機の動作を記述する OS の動作を理解し, 電子計算機を動作させる設計することが本質になります.

講評

SJ による計算の記述, 問に対する SJ の動作の考え方を記述した解答を評価しました.

5　課題 3

アメリカ · ラスベガスにあるカジノホテル「ルクソール・リゾート＆カジノ」は図のようにピラミッド型をしています．外壁は全面ガラス (アクリル板かもしれないが) になっています．通常の高層ビル (外壁が垂直に立っているビル) ではゴンドラを吊って, 窓拭きをしています．もちろん, 全面ガラス張りのピラミッド型のホテルも窓拭きをしなければなりません．どのようにすれば奇麗に効率的に窓拭きができるか, 物理的 (力学的) に考えてみてください.

図 1: カジノホテル「ルクソール・リゾート＆カジノ

解説

ピラミッド型の建物の中は, ドーム球場のように大きな空間の中央の大部分はカジノになっていて, 客室は壁面に沿って配置されています. 2005年にこのホテルに泊まった時, 部屋の窓側の壁は斜めになっていて, とても圧迫感がありました. エレベーターも斜めの壁面に沿って動きます. こんな構造にしたばかりにメインテナンスに苦労しているんだろうなというのが利用した感想でした. 宿泊した当時でも老朽化を感じましたが, 残念ながら既に取り壊すことが決定しています.

さて, この課題を見て, 何だこりゃ?と思った人もいるかもしれません. この課題を出題したのは, 出題者が1999年に国際会議でラスベガスを訪れたときに, 実際に, ルクソールホテルの窓拭きの光景を見て, 不思議に思ったことがあったからです.

建物を見ているときには窓拭きのことなど考えもしませんが, その光景を見て, 確かに, どんな形の建物でも外壁や窓の掃除は必要だなと考えさせられました.

その方法が効率がいいのかどうなのかは分かりませんが, 実際にはこのように窓拭きをしていました. 図2の左図はホテルの外壁の1面が半分拭かれた状態です. 流石に砂漠の中にできた街ラスベガ

図 2: 実際の窓拭きの様子 (1999年)(左) 半分拭き終わった状態, (中) 窓拭き用巨大ブラシがぶら下がった状態, (右) 窓拭き用ブラシ

スだけあって, 拭いていない部分には黄土色の砂が付着していることが分かります. 拭いた部分とそうでない部分が中心から少し左に寄ったところにある縦の線 (三角形の二等分線に近い) で分かれていることから拭き方が分かります. 図2の中図のように, ピラミッドの頂点からワイヤーで吊るした大きなブラシで拭いています. ブラシがどういうものかと言えば, 図2の右図にあるようなものです. 巨大ブラシは横長のフレームに1.5mほどの長さのブラシが縦に17対34本取り付けられています. フレームの中心部分とピラミッドの頂点を結ぶワイヤーが1本, フレームの左右2カ所ずつ, 計4ヵ所にワイヤーが取り付けられ, その4本のワイヤーを束ねたものが別の1本のワイヤーでピラミッドの頂点と繋がっています.

図2右図には下にトランシーバーを持った人が写っています. 下まで降ろした, ブラシのフレームの右端をピラミッドの外壁の右端に合わせてワイヤーで引っ張り上げているのではないかと考えられます.

このような方法は壁面が垂直に立っている場合, ブラシを壁面に押し付ける力がはたらかないため用いることができません. 壁面が傾斜している場合, 重力によりブラシが壁面に押し付けられるため, この方法を用いることが可能になります. 壁面が傾斜していることを巧みに用いた方法と言えます.

さて, 私が疑問に思ったのは, ワイヤーがフレームの中央に 2 本ついているだけでこのブラシを全面を拭くように制御できるのか？ということです. 簡単に考えると, ブラシを 1 本のワイヤーでブラシを頂点に向かって引けば, 重力により壁面の中心線に向かって落ちてきて端の部分を拭けないのではないかと思えます.

まず, ブラシのフレームを棒状の物体として, 平面内での棒状物体の運動について考えてみましょう. 棒状物体の運動は重心の運動と重心の周りの回転運動により記述されます. 棒状物体を静止させるためには, 物体にはたらく全ての力の和が 0 であることと, 物体にはたらく力のモーメント (トルク) の和が 0 になる必要があります.

このブラシの場合, 左右に 4 本のワイヤーでつられているので, はたらく力のモーメントは釣り合っており, 回転運動については考える必要はないと思われます. したがって, 棒状物体は水平を保ち運動するとして, その重心の運動について考え, 棒が壁面全体を掃けるかということになります.

ピラミッドが 1 辺 L の正三角形の側面からできているとして, ブラシの長さを l として, 壁面の底辺に沿って x 軸をとり, 中点を原点とし, 正三角形の壁面の中心線に沿って上向きに y 軸をとって考えます. ブラシには重力, ワイヤーによる張力 T, 壁面からの摩擦力がはたらくので, 運動方程式は

$$
\begin{aligned}
a_x &= -T\frac{x}{\sqrt{x^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}L-y\right)^2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\mu\frac{v_x}{\sqrt{v_x^2+v_y^2}} \\
a_y &= -mg+T\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}L-y}{\sqrt{x^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}L-y\right)^2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\mu\frac{v_y}{\sqrt{v_x^2+v_y^2}}
\end{aligned}
$$

のように書けます. ここで, m, μ はそれぞれブラシの質量および動摩擦係数, また, a_x, a_y, v_x, v_y はそれぞれ, ブラシの重心の加速度および速度の x, y 成分です.

この運動方程式から求まる重心の軌道が壁面の端からブラシの長さ l 以上に離れなければよいことになります.

ブラシの重心が最初 $\left(\frac{L}{2}-\frac{l}{2}, 0\right)$ にあったとして, 張力 T がそれほど強くない重力の 1.41 倍, 動摩擦係数を 0.955 の場合のブラシの重心は図 3のようになります. この場合, 重力により軌道が中心線

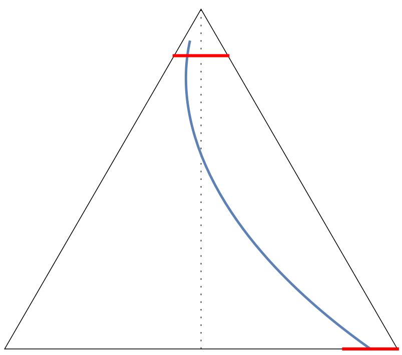

図 3: ブラシのワイヤーを引く力が重力の 1.41 倍の場合の重心の軌道 (青い実線)

の方に曲げられて全面を拭くことは無理だということが分かります. しかし, 張力 T を重力の 4.93 倍にするとブラシの重心は図 4のような軌道を描きます. この場合には壁面の端に沿て移動しているの

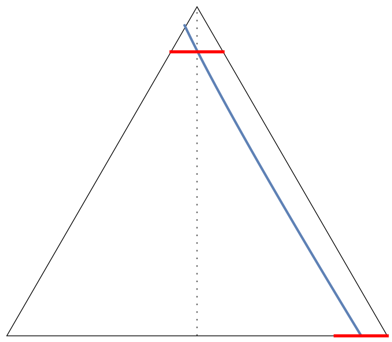

図 4: ブラシのワイヤーを引く力が重力の 4.93 倍の場合の重心の軌道 (青い実線)

で, 全面を拭くことが可能であることが分かります.

もともと, ブラシを半分壁面からずらして置き, 引き上げるようにすると, ブラシの重心は図 5のような軌道を描きます．より余裕をもって全面を拭けることが分かります.

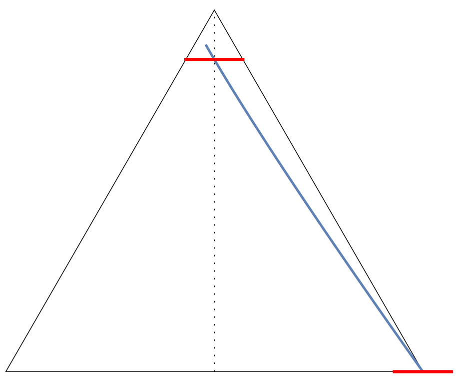

図 5: ブラシの半分を外壁の外に出して配置し, ワイヤーを重力の 5 倍の力で引き上げた場合の重心の軌道 (青い実線)

確かに, この方法で外壁全面を拭けることが分かります．ブラシの幅が長い方が効率的に拭けることも分かります．とはいえ, 重量が大きくなるため, 限界があります.

講評

出題を決めたときに,「壁面に吸着し移動するルンバのようなお掃除ロボットのようなもので掃除する」という解答が続出するかと恐れていましたが, そう言うことではないということを示すために,「物理的 (力学的) に考えてみてください」と入れてありました．その効果かどうかは分かりませんが, そのような答案は少なかったです.

頂点から水を流し, 洗い流すというアイデアが複数出ていました．いいアイデアのように思いますが, 砂はガラスにこびりつき水を流すだけではきれいにぬぐえません．最近流行りのマイクロバブルの水流で洗えば, バブルがはじけるときの衝撃波でしっかり砂が洗い落とせる可能性はあります．し

かし, 近年, フーバーダムの水位が下がりラスベガスは深刻な水不足に見舞われていて, 庭の芝生に散水時間に制限が設けられたりしている状況なので, 現実的な方法ではありません.

形や壁全面がガラスであることからモップなり, ブラシなりを移動させるための足場をどうするかに苦労したようでした.

シンプルではあるけれど, 効率を上げるための面白い同じアイデアが複数の答案で提案されていました. 頂点に滑車を置き, ケーブルカーのように裏と表の壁面にブラシをぶら下げるというアイデアです. これであれば, ブラシは釣り合っているのでブラシを移動させるための力は摩擦に抗する分のみになり, 同時に 2 面拭けるので効率的です. 効率の面で高く評価しました. しかし, 重力により中心に引き寄せられることへの考察が足りませんでした.

その中で, シンプルで確実な方法を提案がありました. 実際の方法のように頂点からワイヤーを底面まで降ろし, そのワイヤーでブラシを引っ張り上げるのではなく, そのワイヤーをガイド (レール) として, ブラシを上下に移動させワイヤーの端を底面に沿って移動させながら拭いて行くというものです. これは, ブラシが上下, 左右 2 次元的ンコントールされ, 確実に全面を拭くことができます. ブラシの大きさを考えるとかなりの質量になるので, ガイドになるワイヤーがたわまない様にピンと張る必要があるのでそれなりの力で引っ張らないといけない, それを移動させる必要がありますが, 非常に良いアイデアで高く評価しました.

6　課題 4

物体に摩擦や空気抵抗, 外からの力がはたらかなければ, 物体は同じ速さで同じ向きにずっと運動し続けます. このとき, 物体の質量と速度をかけたもの (これを運動量という) は一定となります (これを物理学では運動量保存則と言います). 物体が回るとき (回転運動) も, 摩擦や空気抵抗, 外からの力がはたらかなければ, 物体は同じ速さで同じ向きにずっと回り続けます. 回転運動にも運動量保存則と同様の法則があり, 角運動量保存則と呼ばれます. 角運動量は, 1 秒あたりに物体が回転する角度 ω(角速度) と慣性モーメント I の積で定義されます. 角運動量保存則とは, 摩擦や空気抵抗, 外からの力がはたらかない場合, 角速度 ω と慣性モーメント I の積 $I\omega$ が一定であるというものです. 慣性モーメントは運動 (並進運動) での質量に相当するもので, 以下に回転し難いか, 回転し始めたらいかに止まり難いかを表す量です.

慣性モーメントの説明をする前に, 回転とはどういうものか考えてみましょう. 円盤に細い軸が付いたコマを思い出してください. 軸が細いのは接地面との摩擦を小さくするためです. 円盤が大きくて重いコマの方が長く安定して回るという経験をしたことがあるかもしれません.

したがって, 慣性モーメントは大きく, 重いものほど大きくなるものです. 正確には, 回転の軸 (中心) からの距離の 2 乗とそこにある質量をかけたものを物体全体について足したものになります (実際には積分する).

例えば, フィギュアスケートのスピンでは, エッジと氷との摩擦, 空気抵抗を無視すれば $I\omega$ は一定です. 始め, 手を広げた状態で回り始めたのち, 腕を身体にひきつけ, 腕をそろえて頭上に差し上げると I が小さくなり, ω が大きくなって, 速い回転になります.

このような現象は身近な回転椅子を使っても確かめることができます. 回転椅子にあなたが足を床につけて座っているとき, 勢いをつけて足を床から話すと, 椅子ごと回転し, 手を伸ばしたり縮めたりすることで回転速度を変えることができます. また, 椅子に腰掛けて足を床から浮かして静止している場合は, 上半身を左にひねると下半身が右に回転し, 続けて, 上半身を右にひねって元に戻すと下半身も元にもどり, 結局, もとの姿勢と同じになります. これは, 上記の角運動量で考えると, 体には外から力が働かず, 回転前後で体全体の角運動量はゼロ (無回転) のままとなっています.

回転についての以下の現象について考えてください.

問 1 スペインのフィギュアスケート選手 (男子シングル), ハビエル · フェルナンデス (図左, 身長 173 cm, 体重 70 kg) 選手が日本の羽生結弦選手 (図右, 身長 172 cm, 体重 57 kg) に比べ 4 回転ジャンプするのが難しい理由を物理的に説明してください.

問 2 持ち上げた猫の背中を下にして手を離すと, 猫は体を回転させて足から着地することができます. 猫の重心まわりには, 回転させる外からの力はかからないにもかかわらず, 猫は足から着地します. この現象について, 猫の上半身 (腰から頭) と下半身 (腰から尻尾まで) それぞれの動きに注目して説明してください.

問 3 今, あなたは宇宙ステーションの中で静止しています. ここで体を適当に動かして, 最初と同じ位置にちょうど後ろ向きに姿勢を変えて静止した状態にするにはどうすれば良いでしょうか？静止した回転椅子の例からわかるように, 単に体をひねるだけではうまくいきませんね. できるだけ効率良く姿勢をターンする動作を提案し, そのときの体の動きも説明してください. (「効率良く」というの

は, 「素早く」, 「少ないステップで」, 「やりやすい動作で」など, 好きな意味にとってください.)

図 6: フィギュアスケートの回転.

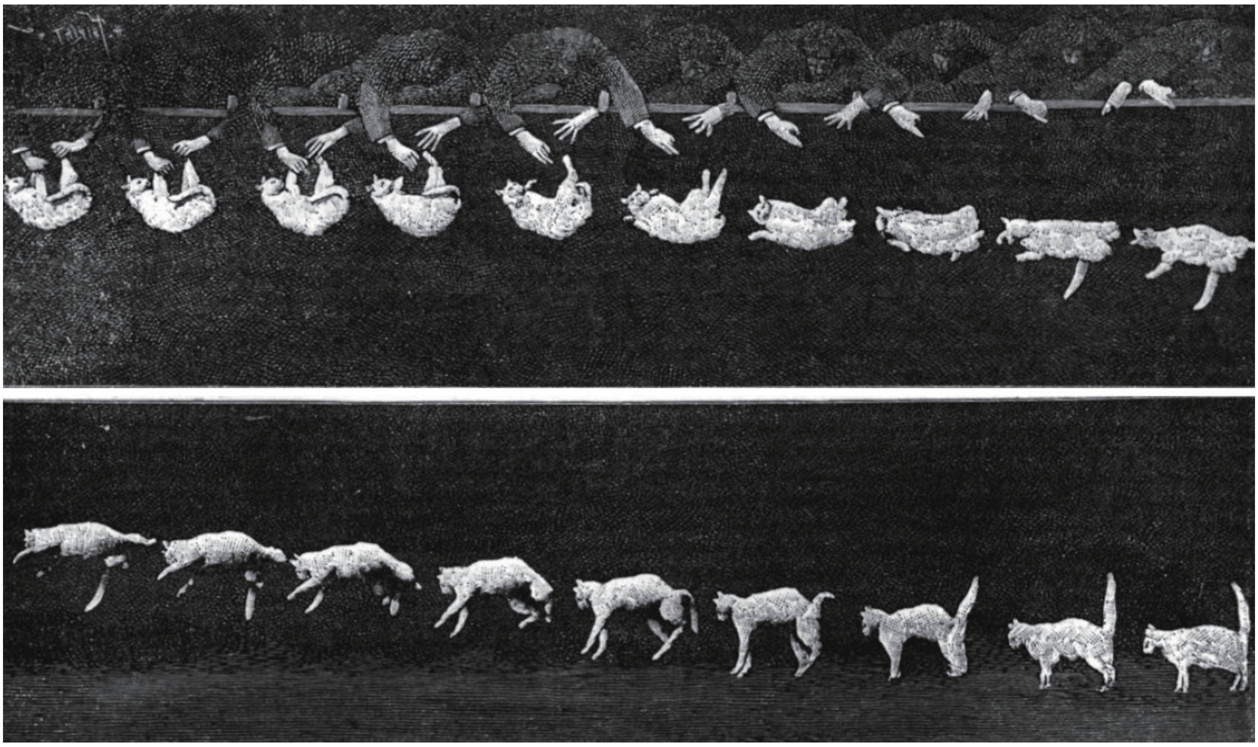

図 7: 猫の着地のようす.

解説

最近話題になっている書籍,『「ネコひねり問題」を超一流の科学者たちが全力で考えてみた.』(グレゴリー·J· クバー　著, 水谷淳　訳,　ダイヤモンド社) を読んで, 今回の問題を出すことにしました. (以下の解説もこの本から一部引用しています.) ”なぜネコを逆さまにして落としても途中で向きを変えることができるのか?”は, 昔から多くの科学者を悩ませてきました. 問題にも書いたように, 椅子に腰掛けて足を床から浮かして静止している場合は, 上半身を左にひねると下半身が右に回転し, 続けて, 上半身を右にひねって元に戻すと下半身も元にもどり, 結局, もとの姿勢と同じになります. これを避けて, 最初と最後で姿勢を入れ替えるにはどうすればよいのかとなります. そのためには, 慣性モーメント I という, いわば回転しにくさを表すものと, 角運動量 L を理解する必要があります. 今回の問題は, 問 1 で, まずフィギュアースケートを題材に回りにくさを考えて, I や L になれてもらってから, 問 2 でネコが体をひねる写真からその理屈を考えて, さいごに問 3 で無重力空間で体の向きを変える方法を考えてもらう問題となっています.

問 1 まず, 式を使わずに考えて見ましょう. 羽生選手とフェルナンデス選手の身長はほぼ同じで, フェルナンデス選手の方が体重があります. 両選手の比重には大差がないでしょうから, フェルナンデス選手の方が質量が大きくかつ回転軸からより遠くに体重が分布していることになり, 慣性モーメントが大きいことになります. (スケートのスピンで手を広げていることになり, 回転しにくいことになります.) 次に考えないといけないのは, 飛ぶ高さ (滞空時間) です. フェルナンデス選手の方が体重があり, 筋力も強いでしょうが, 重い分ジャンプに不利に働くので, トータルでは, 滞空時間に大差が無いとしましょう (これが近似的に成り立つことは後で示します). 結局, 慣性モーメントの差が効いて, フェルナンデス選手の方が不利であることが分かります. この現象を, 大学で習う物理を使って式で示すと以下のようになります.

> 4 回転ジャンプを余裕をもって飛ぶには長い滞空時間と速い回転 (自転) 速度が必要です. ハビエル・フェルナンデス (身長 173 cm, 体重 70 kg) 選手と羽生結弦選手 (身長 172 cm, 体重 57 kg) は身長はほぼ同じですが, 体重は 1.22 倍です. すなわち, フェルナンデス選手の方が身体の幅が広いと言えます. 人の身体を円柱と単純化して考えてみます. 羽生選手の身長を L , 半径を r, 体重を m とし, フェルナンデス選手の身長を L' , 半径を r', 体重を m' とし, 体の密度が同じであると仮定すると
>
> $$m' = \rho L \pi r'^2 = \rho L \pi r'^2 = 1.22m = 1.22 \rho L \pi r^2$$
>
> となります. したがって, $r' = 1.11r$ となります. 滞空時間は重心の運動ですので, 跳躍時, 足が氷を離れるまでの蹴る力は一定であるとして, 運動方程式は
>
> $$ma = F - mg$$
>
> 踏切の時間を Δt とすると, 足が離れたときの速度は
>
> $$v = \left(\frac{F}{m} - g \right) \Delta t$$

となる．足が離れた後の運動方程式は $ma = -mg$ であるから, 滞空時間は

$$t = \sqrt{\frac{2v}{g}} = \sqrt{\frac{2\left(\frac{F}{m} - g\right)\Delta t}{g}} = \sqrt{2\left(\frac{F}{mg} - 1\right)\Delta t}$$

となる．したがって, 踏切時間が一定であるとすると, 滞空時間は $\frac{F}{m}$ で決まります．跳躍力は足の筋力によると考えられ, 筋力は足の筋肉の段面積に比例すると考えられるので

$$\frac{F}{m} \propto \frac{r^2}{Lr^2} = \frac{1}{L}$$

となります ($\propto$ は比例の意味)．したがって, 滞空時間は 2 人ともほぼ同じになると考えられます．では, 回転 (自転) 速度 (角速度) はどうなるでしょうか? 角運動量の運動方程式は

$$\frac{dL}{dt} = I\frac{d\omega}{dt} = N \propto rF$$

したがって, 慣性モーメントは $I \propto mr^2 \propto r^2 \times r^2 = r^4$

$$\omega \propto \frac{r \times r^2}{r^4} = \frac{1}{r}$$

したがって, 羽生選手の角速度を ω とすると, フェルナンデス選手の角速度 ω' は

$$\frac{\omega'}{\omega} \propto \frac{r}{r'} = \frac{1}{1.11} = 0.90$$

となり, フェルナンデス選手の方が不利であることになります．

問 2 問題にも書いたように, 中空に浮いたままで体をひねると上半身と下半身が別方向に動き, 逆方向にひねるともとに戻ってしまいます．これを角運動量保存則にそって考えてみましょう．角運動量は, 大きさが $I\omega$ で方向は回転軸の方向のベクトルで表されます．ベクトルの向きは, 回転した時に右ねじが進む方向に定義されています．体をひねる前は静止しているので角運動量は 0 です．ひねっている間は上半身の角運動量と下半身の角運動量のベクトルの和が 0 (上半身の角運動量ベクトルが下半身の角運動量ベクトルと逆向きになっていて足すと 0) となり, 最後にもとに戻ったときも静止していて角運動量は 0 です．角運動量保存則が示すのは, ネコひねりの最初と最後はともに回転がとまって角運動量は 0 のままであるということであって, 回転を終えた時に最初と別の方向を向いていても問題ありません．このあたりは, 昔の学者さんたちを惑わしたようです．その後, 角運動量の総和が 0 のまま, ネコが姿勢を変えるメカニズムがいろいろと議論されてきました．ネコひねりのメカニズムに関しては, Wikipedia の「ネコひねり問題」を見た人も多いと思います．ここでは 2 つのモデルを説明しましょう．

まず, 100 年以上前に提案された ”tuck and turn model”で考えてみましょう．課題の図 7 の写真をみてみると, 上段の左から 5 番目あたりまでで, 猫は前足を曲げて引き込み (tuck) する一方, 後ろ足は伸ばしています．この状態で前半身と後ろ半身の間でひねると, 下半身の方が慣性モーメントが大きいので小さく回転し, 逆に上半身は大きく回転します (下の段の左から 3 つ目くらいまで)．その後, 前足を伸ばして後ろ足を引き込むことで, 前半身の慣性モーメントの方を大きくしてひねると, 前半身はあまり回転せず, 後ろ半身が大きく回転して, 最終的に反転を終了して無事着地しています (下

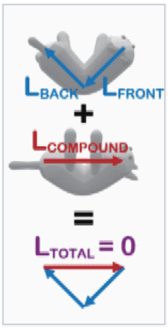

図 8: 落下するネコのモデル．2 つの独立した部位が回転することにより全体としての角運動量をゼロに保っている．

の段の右端)．このモデルでネコひねりは納得できそうですが, 実際に体を反転させるには体を 180 度以上大きくひねる必要があるのですが, 写真を見る限りそんなに極端には体をひねっていません．そこで, 次のような ”Bend and twist model”がその後提案されています．

Bend and twist model では, 図 8のようにネコが体をくの字に曲げて (bend), 上半身と下半身をひねる (twist) というモデルです．(Wikipedia [https://ja.wikipedia.org/wiki/ネコひねり問題] にある元図は動画になっているのでわかりやすい) 図のように上半身の角運動量ベクトル L_{front} はネコの上半身の回転軸に沿って体の中心に向かい, 下半身の角運動量ベクトル L_{back} は下半身の回転軸に沿って尻尾のほうに向かっています．この二つのベクトルを足しても 0 にならないので, 角運動量保存則が成り立つには, 図のような $L_{compound}$ のベクトルも存在し, 3 つのベクトルの和が 0 となります．ネコ全体は $L_{compound}$ を回転軸として回転します．この回転とひねりにより顔の向きが変わることが組み合わさって, ネコが下を向くことになります．くの字に曲げた姿勢の慣性モーメントは大きいため回転量は大きくはないでしょう．このとき, 大事なのは, 上半身と下半身の回転が同じ方向になるので体がねじれずに方向転換できる点です．その気で図 7 の写真を見直すと, 上の段の左から 4 つめから 6 つ目当たりが Bend and twist になっているように見ます．ここで上半身と下半身がねじれずに方向転換ができていますね．その後, 体を伸ばして着地姿勢へ推移しています．今はこのモデルが妥当だと考えられています．

問 3 ネコひねりで出てきた機構を考えると, 無重力下で向きを変えるいろいろな動きが考えられます．「できるだけ効率良く」ターンを考えるように問題ではお願いしましたが, いろいろなターンの方法があり, なかなか効率を比較するのは難しそうです．実は, 1960 年代初めにデイトン大学の研究者たちがライト ＝ パターソン空軍基地の科学者と協力して, 宇宙飛行士が体の動きだけで向きを変えるための様々な方法を考え, ”Weightless Man: Self-Rotation Techniques”(P. V. Kulwicki, E. J. Schlei, P. L. Vergamini, Technical documentary report No. AMRL-TDR-62-129, 1962) に報告しています．そこで提案されているターンを幾つか紹介しましょう．文章で書いてもわかりにくいので, Youbube の動画 https://www.youtube.com/watch?v=8UXf-KHqJDU を (宇宙空間では無く地上での動きを示したものではありますが) 参考にしてください．この動画の最初に Z.1, Cat Reflex とあるのが, tuck and twist モデルです．”気をつけ ”の姿勢からスタートして, まず脚を広げて下半身の慣性モーメントを大きくしてから体をひねります．次に脚を閉じて腕を横に広げてもう一度ひねり,

腕を下ろすと体の位置が回転しています．次に Bend and twist が出てきます．”気をつけ”の姿勢から体を横に曲げ, 手を伸ばします．このままフラフーフのように体をツイストするものです．上記のネコのモデルと同様にくの字の上下のパートが連動して動いて向きを変えることができます．Z.3, Lasso (投げ縄) があります．両腕を真上にあげて同じ方向に投げ縄のように回転させます．両腕の回転による角運動量ベクトルの和を打ち消すように体が回転するので所定の方向で止めれば良いでしょう．ちなみに, 両腕を斜め 45 度に V の字に突き出して, 左右で逆方向に回転させると bend and twist のくの字のネコと同じ状況になるので体が前後に回転していきますね．Z.4:Pinwheel では脚を斜め横に広げて回していますね．原理は投げ縄と同じですね．この動画には, その他ユニークな動きが紹介されています．それぞれ無重力下で行うとどのような動きになるか想像してみてください．tuck and twist や Losso など慣性モーメントの異なる部位が互いに逆方向に回ることを利用した方法は, 一回の動作で回転する量がすくなく, 効率は悪そうです．そうすると bend and twist のように体の上半身下半身の角運動量を打ち消しながら体を回転する方法が効率が良いといえるでしょう．なお, 問 1 − 3 に関連した物理に関しては, ライフサイエンス物理学 (廣川書店：Sternmheim, Kane 著, 石井千穎／監訳)PP.150-151 に関連した解説が載っています．興味のある方は参照ください．

講評

多くのみなさんがトライしてくれました．ありがとうございます．

問 1 はちゃんと計算するのは大学レベルですが, ある程度感覚的に皆さん解いてくれました．直感的には羽生さんの方が有利だと思われますね．単に体重差からイメージした答え, 体重差は胴回りの太さの違いにつながる点に気がついた答え, ジャンプの滞空時間の違いを力積に基づいて考慮していた答え, など, それぞれにいろいろ考えて考えてくれました．また, ジャンプの前後の慣性モーメントの違いに着目して解析した答案もありました (おもしろそうでしたが, 解答用紙の最後のページが同封されていませんでした．残念です!)．慣性モーメントが回転のしやすさの指標になっていることは皆さん理解してくれたようです．

問 2 は Tuck and twsit モデルの考え方で説明してくれた解答も幾つかありました．また, ネコひねりの Wikidpedia を参考にして Bend and twist モデルに沿った答えも多く見受けられました．ただ, どういうことが起きているのかが消化不良な解答が多かったように思います．私も, このモデルは納得するまでに時間がかかりました．

問 3 は Tuck and twist モデルを活かした解答が多めでした．なかには, 回転椅子の上での実演を写真にして送ってくれたユニークな答案もありました (楽しませてもらいました！ありがとう!)．掟破りの解答としては, 手に持ったボールを投げて回転をはじめてもう片方の手に持ったボールを投げて回転をとめるという答案がありました．採点をしていて思わず問題文を読み直してみましたが, ボールを使ってはだめとは書いていません．「そうきたかーーー!!」と採点中に思わず叫んでしましました．面白い解答ですが, このままだとボールが無くなるともう姿勢変更できません．で, 考えたのですが, ボールにひもをつけておいてはどうでしょうか?二つのボールを投げ終わって所定の方向に回転したらひもを引いてピンと張れば姿勢を保てそうに思います．そのあと, そっと糸をたぐってボールを手元に引き戻せば繰り返し使えそうですね．(ボール投げの場合, 回転以外に, 体の重心が動いてしまう

ことも考慮する必要がありますね. うまく, もとの位置に逆向きで戻るには微妙なタイミングが要求されそうです.) みなさん, 楽しい解答をありがとうございました.

参考文献

[1] ルクソール・リゾート＆カジノ:
https://ja.wikipedia.org/wiki/%E3%83%AB%E3%82%AF%E3%82%BD%E3%83%BC%E3%83%AB_(%E3%83%9B%E3%83%86%E3%83%AB)

[2] ハビエル・フェルナンデス:
https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/c/ce/2015_Grand_Prix_of_Figure_Skating_Final_Javier_Fern%C3%A1ndez_IMG_9445.JPG/520px-2015_Grand_Prix_of_Figure_Skating_Final_Javier_Fern%C3%A1ndez_IMG_9445.JPG

[3] 羽生弓弦: https://kahoku.news/images/2015/08/27/20150827khg000000000000c/097_size5.jpg

[4] 猫: https://ja.wikipedia.org/wiki/%E3%83%8D%E3%82%B3%E3%81%B2%E3%81%AD%E3%82%8A%E5%95%8F%E9%A1%8C
https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/7/7f/Falling_cat_1894.jpg

[5] 落下するネコのモデル: https://ja.wikipedia.org/wiki/%E3%83%8D%E3%82%B3%E3%81%B2%E3%81%AD%E3%82%8A%E5%95%8F%E9%A1%8C
https://ja.wikipedia.org/wiki/%E3%83%8D%E3%82%B3%E3%81%B2%E3%81%AD%E3%82%8A%E5%95%8F%E9%A1%8C#/media/%E3%83%95%E3%82%A1%E3%82%A4%E3%83%AB:Cat_fall_150x300_6fps.gif