

第25回数理科学コンクール課題

令和4年11月26日

千葉大学先進科学センター

千葉大学大学院融合理工学府数学情報科学専攻情報科学コース

第25回数理科学コンクールの課題をお届けします。本年度は、感染症の流行を受けて、開催時期と開催方法を変更しました。数理科学コンクールの主題である、「自ら実験をして現象を考察する。」を引き続き実施するために、今回は実験機材を参加者に送ることにしました。機材の準備には、千葉大学大学院の学生の皆さんにも協力してもらいました。配送できる機材の大きさや種類には制限があるため、皆さんが受け取る機材の中には自分の使いたいものが入っていないかもしれません。しかし、与えられた機材だけを使って、実験の方法を考察して工夫することも科学者にとって重要な訓練です。

感染拡大防止のため3密を避けることから、機材は参加者の自宅宛てに送りました。そのため、今回の数理科学コンクールの課題の部では個人参加だけを対象としました。しかし、例年行っている数理科学コンクールのように、1題の課題に対して複数の考えをぜひ解答してください。むしろ、複数の解答を主催者は期待しています。なお、大変残念ではありますが、今回もロボットの部はやむを得ず中止としました。

開催案内に書かれている期日までに解答を千葉大学に返送してください。また、感染拡大防止の観点から、対面での優秀者表彰式、記念品贈呈式、講評会は開催しません。その代わりに、優秀者の参加番号を千葉大学先進科学センターのホームページ上に掲示して受賞をお知らせします。また、優秀者への賞状と記念品は受賞者の皆さんにお送りします。主催者一同、次回の数理科学コンクールでは、千葉大学で皆さんに会えることを待ち望んでいます。

千葉大学先進科学センター

センター長 教授 眞鍋佳嗣

千葉大学大学院融合理工学府数学情報科学専攻情報科学コース

コース長 教授 大澤 範高

1. 4つの課題を用意しました。いくつかの課題に解答してもかまいません。また、1つの課題にいくつ解答してもかまいません。例えば、実験をして見つけた解答と、実験をせずに考えた解答との2つの解答を提出してもかまいません。むしろ2種類以上の解答を歓迎します。その場合には、どうして答えが2つ以上になったのかも説明してください。
2. 用意した解答用紙を何枚使用してもかまいません。ただし、異なる番号の課題は同じ解答用紙に記入しないでください。また、1つの課題に1つ以上の解答用紙を使った場合は解答用紙の記入欄に課題ごとの通し番号と総枚数を記入してください。1つの課題に2つ以上の解答を提出する場合も同様に解答用紙の記入欄に課題ごとの通し番号と総枚数を記入してください。
3. 同封した機材以外を利用して実験を行った場合には、その機材名を解答用紙に記載してください。
4. 自宅にあるどのような資料を参考にしてもかまいません。インターネットで参考資料を検索した場合には、検索先の URL を答案に引用してください。そして、どの部分を参考にしたのかを答案に書いてください。
5. 今回は自宅で課題を解答するため、コンテストとしての保険に加入していません。刃物や回転椅子等を使用する場合は、怪我をしないように利用法をまず考え十分注意してください。課題に、火や炎を利用することは想定していません。つまり、火や炎を利用しないと考察できない課題は用意していません。

課題 1

網目の形状とその性質, 利用法について考えてみましょう. 社会生活でよく目にし, 世話になる網目は, 四角形と六角形が多く, 衣服を作る生地は縦糸と横糸があります. 微視的に見れば生地は四角形の網目になっています. 織機の性質から生地の網目は四角形になったとも考えられます. しかし, 四角形だからこそその性質もあります.

少し網目を大きくして, 漁網や洗濯ネットを例に, 四角形と六角形の網目の違いを数学的に考えてください. 考察の参考として, 四角形の網目として洗濯ネットを, 六角形の網目として, 石鹼を入れる網を用意しました.

課題 2

計算手順を記述する言語を計算機言語 (プログラミング言語) といいます。C 言語, Python など, いろいろなプログラム言語が開発されています。各計算機言語には種々の命令セットが複数用意されています。

一方, ほとんどの命令は適切に決めた一つの命令から構成できます。そこで, 命令が 1 種類しかない計算機言語を考えます。言語 SJ は以下のように定義されます。

$$SJ : a, b, l$$
$$SJ : a, b_-, l$$

a に示す番地に蓄えられた値から b に示す番地に蓄えられた値を引く, その値が負であれば, ラベル l の命令にジャンプ, そうでなければ, 値を a に示す番地に蓄える。 b_- は b で表される数値である。この言語 SJ で動作する計算機で取扱うことができるデータは整数のみです。

この言語を使って, 計算の基礎となる演算を構成すること考えます。

問 1 番地 a と番地 b とのデータを交換するプログラムを作成してください。

問 2 カウンター (計数器) とは, 繰返しの回数を計数し, 事前に決めたある回数に達した場合に, 次の処理に移る機構です。SJ でカウンターを構成してください。

問 3 番地 a に蓄えられた数値の符号を判定し, 数値の値が正, 零, 負に対応して, 番地 b に 1, 0, -1 を蓄積する処理を SJ で構成してください。

問 4 四則演算を構成することを考えます。減算は定義通りですから, 加算, 乗算, 除算を構成してください。

課題 3

アメリカ・ラスベガスにあるカジノホテル「ルクソール・リゾート&カジノ」は図のようにピラミッド型をしています。外壁は全面ガラス(アクリル板かもしれないが)になっています。通常の高層ビル(外壁が垂直に立っているビル)ではゴンドラを吊って、窓拭きをしています。もちろん、全面ガラス張りのピラミッド型のホテルも窓拭きをしなければなりません。どのようにすれば綺麗に効率的に窓拭きができるか、物理的(力学的)に考えてみてください。



図 1: カジノホテル「ルクソール・リゾート&カジノ」

課題 4

物体に摩擦や空気抵抗, 外からの力がはたらかなければ, 物体は同じ速さで同じ向きにずっと運動し続けます. このとき, 物体の質量と速度をかけたもの (これを運動量という) は一定となります (これを物理学では運動量保存則と言います). 物体が回るとき (回転運動) も, 摩擦や空気抵抗, 外からの力がはたらかなければ, 物体は同じ速さで同じ向きにずっと回り続けます. 回転運動にも運動量保存則と同様の法則があり, 角運動量保存則と呼ばれます. 角運動量は, 1 秒あたりに物体が回転する角度 ω (角速度) と慣性モーメント I の積で定義されます. 角運動量保存則とは, 摩擦や空気抵抗, 外からの力がはたらかない場合, 角速度 ω と慣性モーメント I の積 $I\omega$ が一定であるというものです. 慣性モーメントは運動 (並進運動) での質量に相当するもので, 以下に回転し難いか, 回転し始めたらいかに止まり難いかを表す量です.

慣性モーメントの説明をする前に, 回転とはどういうものか考えてみましょう. 円盤に細い軸が付いたコマを思い出してください. 軸が細いのは接地面との摩擦を小さくするためです. 円盤が大きくて重いコマの方が長く安定して回るという経験をしたことがあるかもしれません.

したがって, 慣性モーメントは大きく, 重いものほど大きくなるものです. 正確には, 回転の軸 (中心) からの距離の 2 乗とそこにある質量をかけたものを物体全体について足したものになります (実際には積分する).

例えば, フィギュアスケートのスピンでは, エッジと氷との摩擦, 空気抵抗を無視すれば $I\omega$ は一定です. 始め, 手を広げた状態で回り始めたのち, 腕を身体にひきつけ, 腕をそろえて頭上に差し上げると I が小さくなり, ω が大きくなって, 速い回転になります.

このような現象は身近な回転椅子を使っても確かめることができます. 回転椅子にあなたが足を床につけて座っているとき, 勢いをつけて足を床から話すと, 椅子ごと回転し, 手を伸ばしたり縮めたりすることで回転速度を変えることができます. また, 椅子に腰掛けて足を床から浮かして静止している場合は, 上半身を左にひねると下半身が右に回転し, 続けて, 上半身を右にひねって元に戻すと下半身も元にもどり, 結局, もとの姿勢と同じになります. これは, 上記の角運動量で考えると, 体には外から力が働かず, 回転前後で体全体の角運動量はゼロ (無回転) のままとなっています.

回転についての以下の現象について考えてください.

問 1 スペインのフィギュアスケート選手 (男子シングル), ハビエル・フェルナンデス (図左, 身長 173 cm, 体重 70 kg) 選手が日本の羽生結弦選手 (図右, 身長 172 cm, 体重 57 kg) に比べ 4 回転ジャンプするのが難しい理由を物理的に説明してください.

問 2 持ち上げた猫の背中を下にして手を離すと, 猫は体を回転させて足から着地することができます. 猫の重心まわりには, 回転させる外からの力はかからないにもかかわらず, 猫は足から着地します. この現象について, 猫の上半身 (腰から頭) と下半身 (腰から尻尾まで) それぞれの動きに注目して説明してください.

問 3 今, あなたは宇宙ステーションの中で静止しています. ここで体を適当に動かして, 最初と同じ位置にちょうど後ろ向きに姿勢を変えて静止した状態にするにはどうすれば良いでしょうか? 静止し

た回転椅子の例からわかるように、単に体をひねるだけではうまくいきませんね。できるだけ効率良く姿勢をターンする動作を提案し、そのときの体の動きも説明してください。（「効率良く」というのは、「素早く」、「少ないステップで」、「やりやすい動作で」など、好きな意味にとってください。）



図 2: フィギュアスケートの回転.

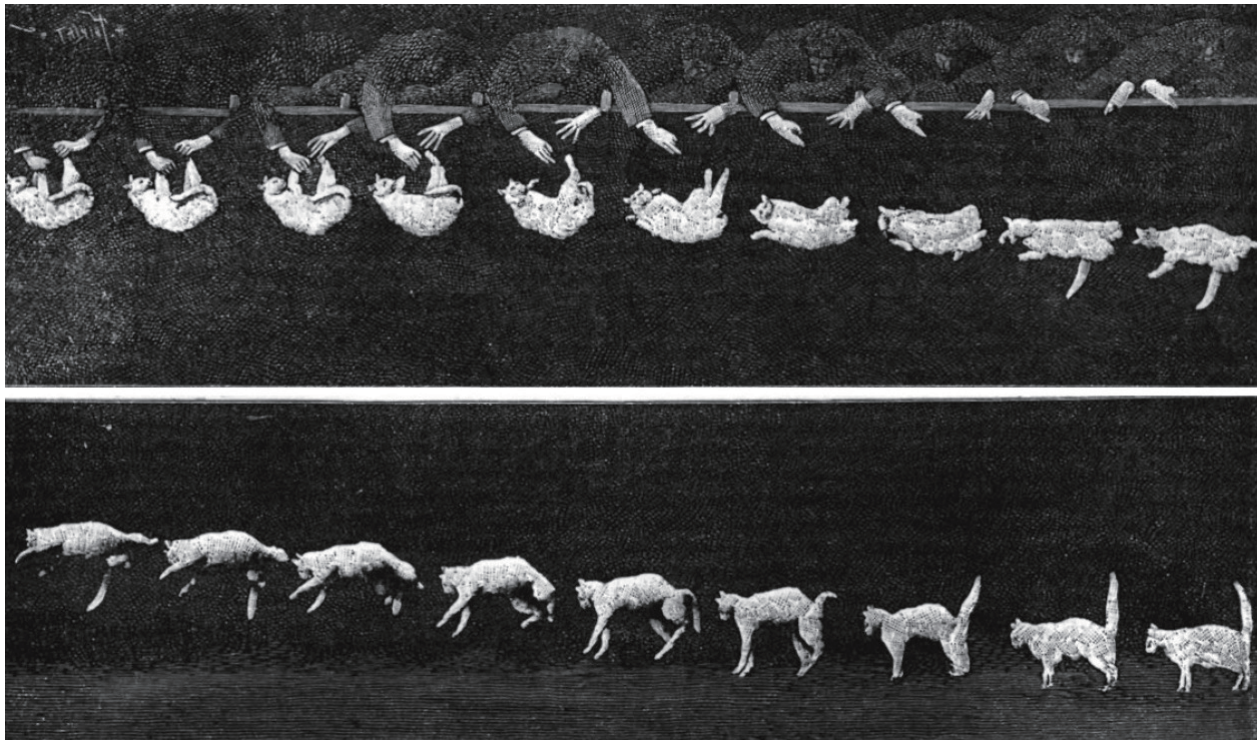


図 3: 猫の着地のようす.