第24回数理科学コンクール課題解説

令和４年３月１日 千葉大学先進科学センター

目 次

1　はじめに

明治の文明開化以来, 我が国は欧米先進国の科学技術を効率よく吸収して発展してきました. 戦後もこの傾向は基本的には変わっていません. 現在, 我が国は大量の自動車や電子機器を輸出して経済大国となっていますが, これらの工業製品の基本原理はほとんど外国で考えられたものです. 欧米諸国との間に経済摩擦や文化摩擦が生じている現状を考えると, これからの我が国で大切なことは独創性のある個性的な人材を育成して, 新しい科学技術のフロンティアを切り開き, 世界に貢献することであると考えられます.

千葉大学では, 日本のみならず, 世界の科学技術の先端を担う若者を発掘し, 育成するための一助として, 本年度も, 第 24 回数理科学コンクールを開催しました. このコンクールの特色は次の通りです.

1. 自由にゆったり考える

   試験時間は 2 日, 自宅で時間を自由に使い, 解答を導く. また, インターネットの検索も条件を付けて可としました.

2. たのしい物理・数学の発見

   物理や数学のカリキュラムにとらわれず, 物理や数学の本質に根ざした, 考えて楽しい問題を提供する.

3. 多彩な才能の評価

   様々な参加者の優秀な能力やユニークな発想を多面的に評価するため, 問題をたくさん解いたものだけでなく, 1 題に集中してすばらしい発想を出したものも表彰の対象にする. 本年度は感染症の流行を受けて, 開催時期と開催方法を変更しました. 数理科学コンクールの主題である, 「自ら実験をして現象を考察する. 」を引き続き実施するために, 今回は実験器材を参加者に送ることにしました.

4. 人材の育成

   コンクール参加者の物理や数学の能力をさらに高めるため, コンクールの講評会を行う.

過去 23 回のコンクールに引き続き, 多くの中高生の参加者があり, いろいろユニークなアイディアが生まれました. 中学生も, 高校生に負けず優秀でありました. そして, 答案を見ると, それぞれの問題に興味を持ちながら解答していることが読んでとれました.

第 24 回数理科学コンクールの課題の解説と提出された答案の評価を以下にまとめます. 解説に述べてあるように, 各課題は課題出題者の周りにある基本的な問題や最先端の問題, さらには歴史的に意味のある問題を元にして作成しました. 課題提出者一同, みなさんの素晴らしい洞察力と表現力を前にして, 大変感心いたしました.

参加者の皆さんが今後, 科学する心を磨き続け, 我国の科学の発展に貢献することを課題作成者一同希望します. 今後も諸君と共に科学することを楽しみたいと考えています. 千葉大学では今後も引き続きこのコンクールを実施する予定です. 物理・数学に興味がある中高生の積極的な参加を期待しています. 課題作成者もさらに研鑽をかさね, おもしろく, しかも科学の本質に迫る課題を考ていきます.

課題作成者

千葉大学教授　井宮　淳
東京慈恵会医科大学教授　植田　毅
(五十音順)

令和 4 年 3 月 1 日

2 優秀者氏名

令和 3 年 11 月 27 日と 28 日に開催しました第 24 回数理科学コンクールの参加者の皆さんのすばらしい答案の中から以下の参加者諸君を表彰することを決定しました．今年度は, コロナ禍のなかで 2 年目の開催でした．課題に 1 人で取り組み, 3 題以上の課題に, 一定水準以上の解答を提出した個人に敢闘賞を贈ることにしました.

第 24 回数理科学コンクール優秀者

金欅賞	松野佑亮
	池田裕輝
	藤江王裕
銀欅賞	立川ことね
	米田将太朗
	佐瀬大星
	羽鳥寿真
	川口海斗
	中村友里愛
	津田有里菜
	木並俊介
	田中翔大
学長賞	高野琉衣
敢闘賞	土屋晴奈
	下川大晴
	竹田 陽
	山本響輝

課題	参加者名
1	松野佑亮, 池田裕輝, 藤江王裕
	土屋晴奈, 下川大晴, 竹田陽 , 山本響輝
2	立川ことね, 津田有里菜, 木並俊介
	土屋晴奈, 下川大晴, 竹田陽 , 山本響輝
3	松野佑亮, 池田裕輝, 藤江王裕, 米田将太朗, 川口海斗
	土屋晴奈, 下川大晴, 竹田陽 , 山本響輝
4	高野琉衣, 羽鳥寿真, 中村友里愛, 田中翔大
	山本響輝, 佐瀬大星

千葉大学先進科学センター長

教授 眞鍋佳嗣

3　課題 1

日本には, ヨーロッパ全体にあるのと同じ台数とか, 世界中の三分の一の台数とか言われるほどの X 線コンピュータ断層撮影装置 (X 線 CT ー) があると言われています. 実際, 最近では近所のそれほど大きくない医院でも X 線 CT の検査ができるほど普及しています. 外国で日本ほど日常的に頻繁に CT 検査をすることはまずありません.

CT とは Computed Tomography の略で, 物体をさまざまな方向から X 線で撮影し, コンピューターで再構成処理を行うことにより, 物体の断面画像など内部構造を得ることができます. 異なる材料で構成された物質の場合だけでなく, 同じ物質であっても密度の違いよりその差を計測することができます.

X 線 CT ーは医療用のものの認知度が高いですが, 工業用 X 線 CT ーもあります. 材料内部の亀裂や劣化をものを壊すことなく評価することができる分析装置です. また, 同一試料の内部変化を継続的に観察するのにも威力を発揮します.

今では, なくてはならない道具となった X 線 CT ーですが, どのようにして物体の断面画像を得ているのでしょうか? 簡単な例を用いて考えてみましょう.

問 1 図 1(a) のような, 正方形の測定対象物を考えます. 物体に対して, 図 1(b) のように, 下から上に向けて 1 筋 2 本, 左から右に向けて 1 筋 2 本の X 線ビームを平行に照射します. 照射する X 線の強度を便宜的に 100 とします.

物体に照射された X 線は物体内にある物質によりさまざまに吸収されます.

物体を 4 分割したそれぞれの領域に, 図 1(c) に示す X 線を吸収する物質があるとき, 上側, 右側で物体内で吸収されずに透過して来た X 線の強度を測定するとそれぞれどのような値になるでしょうか？

上側, 右側で物体内で吸収されずに透過して来た X 線の強度を測定すると, それぞれの位置で図 1(d) のようになりました. 4 つの領域, それぞれの X 線の吸収量はどのような値になるでしょうか?

問 2 正方形の物体, 図 1(e) に示すように 3 方向から 3 本の X 線ビームを平行に入射させ, それぞれの反対側で物体内で吸収されずに透過して来た X 線の強度を測定すると, それぞれの位置で図 1(e) のようになりました. 物体の 9 等分された領域, それぞれの X 線の吸収量はどのような値になるでしょうか?

問 3 物体を 16 分割したそれぞれの領域に, 図 1(f) に示す X 線を吸収する物質があるとき, どのように X 線ビームを照射し, 透過して来た X 線の強度を測定し, その測定結果を処理すると物体の 16 等分された領域, それぞれの X 線の吸収量を求められるか? 近似値を求める方法でもよいのでその方法を説明してください.

問 4 X 線 CT ーの画像をより鮮明にするためには, 分割数, 即ち, 一方向に平行に照射する X 線ビーム

の本数を増やす必要があります．ビームの本数がとても多くなった場合にどのようにすれば物体内部各部の吸収量を計算できるでしょうか? 方法考えて説明してください.

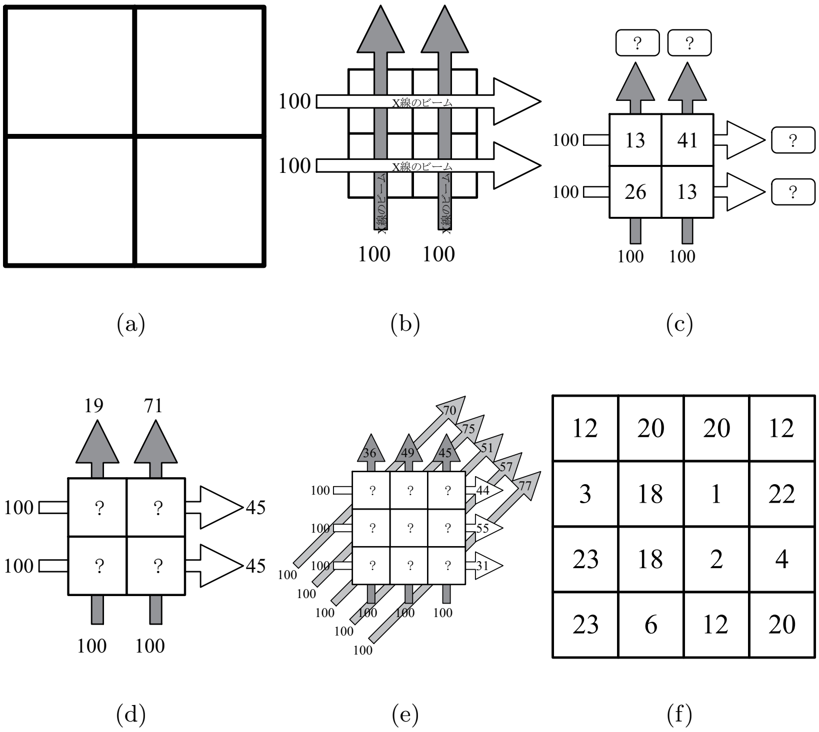

図 1: 断層像再構成の説明

解説

日本の病院ではX線CT, MRIによる断層, 3次元画像による診断は非常によく行われます．巷のそれほど大きくない,（病床数がそれほど多くはない, 病院ではなく）医院でもCT検査が気軽に受けられます．実際, 日本には多くのCTが存在していて, 世界中の1/3が日本にあるとも, ヨーロッパ全体にある数と日本にある数が同じであるとも言われます．MRIであれば放射線への暴露はありませんが, X線CTではかなりの放射量を被曝してしまいます．世界の一般人の平均被爆量は3.0mSvですが, 日本の平均値は5.97mSvです．そのうち, 65%が医療診断被爆です．

見かけ, 機能は似ていますが, X線CTに比べMRIの原理はかなり複雑です．X線CTの原理は「比較的」簡単なので考えてもらいました．

まず, 物体内でX線を吸収する割合が異なる物質の分布が分かっている場合, その物体にX線のビームを当て, 物体を挟んだ反対側で検出した場合にどれだけの割合のX線が透過してくるかを考えてみましょう．このような問題を順問題と言い, 簡単に答えを得ることができます．

問1の前半の図1(c)に関する問題がこれにあたります．図1(c)の?に入る数値は, 上側左, 上側右, 右側上, 右側下の順に次のように計算できます．

$$
\begin{aligned}
100-(26+13) &= 61\\
100-(13+41) &= 46\\
100-(13+41) &= 46\\
100-(26+13) &= 61
\end{aligned}
$$

しかし, **問1**の後半の図1(d)に関する問題のように, 外部に透過して来たX線の量から, 内部各部分のX線吸収率を求める問題は, 逆問題と言い, 非常に難しい問題となります．ここではその簡単な例に触れてもらいました．X線CTで画像を構成するにはそのような複雑な数学的処理がなされているということを知っていてください．さて, 図1(d)に関する問題の場合, 4つの？を上段左, 上段右, 下段左, 下段右の値をそれぞれa, b, c, dとすると, これらに関して

$$
\begin{aligned}
100-(a+b) &= 45\\
100-(c+d) &= 45\\
100-(c+a) &= 19\\
100-(d+b) &= 71
\end{aligned}
$$

という4元の連立方程式が成り立ちます．これを解けばa, b, c, dが求まりそうなものですが, 4つの連立方程式の一つが独立ではなく, 例えば, $b=55-a$, $c=81-a$, $d=-26+a$のように, 一つの変数が決定できません．これが, 逆問題の難しいところです．X線CTはそれを克服して実現されているのです．

さて, ではどのように問題を解くのでしょうか? 情報が足りないので増やす必要があります．図2(a)のように斜めに入射させたビームによる計測を追加します．斜めのビーム1つの情報があれば$a=30$, $b=25$, $c=51$, $d=4$となることが分かります．

しかし, 連立方程式を立て, 解くだけでは拡張性がないので, 計算速度の速い, 逆投影法という方法で 4 つの領域の吸収量を決定する手順を説明します. 図 2(b) から, 上の段の左右 2 カ所に上のビームの透過強度を割り当て, 下の段の左右 2 カ所に下のビームの透過強度を割り当て, 図 2(c) とする. 次に, 図 2(d) から, 左の上下 2 カ所に左のビームの透過強度を割り当て, 右の上下 2 カ所に下のビームの透過強度を割り当て, 図 2(e) とする. 同様に図 2(f) から, 図 2(g) のように透過強度を割り当てます. 図 2(h) から, 図 2(i) のように透過強度を割り当てます.

このように作った 4 つの数値の組を各区画毎に和を取ります.

$$\begin{pmatrix} 45 & 45 \\ 45 & 45 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 19 & 71 \\ 19 & 71 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 70 & 24 \\ 24 & 96 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 66 & 75 \\ 49 & 66 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 200 & 215 \\ 137 & 278 \end{pmatrix}$$

また, 図 1(d) の 4 つの透過強度の和を取り, 2 で割ったものに 200 を足します.

$$(19 + 71 + 45 + 45)/2 + 200 = 290$$

各区画にこの値から和を取った各区画の値を引いたものを割り当て, 3 で割ると

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 290-200 & 290-215 \\ 290-137 & 290-278 \end{pmatrix} \times \frac{1}{3} &= \begin{pmatrix} 90 & 75 \\ 153 & 12 \end{pmatrix} \times \frac{1}{3} \\ &= \begin{pmatrix} 30 & 25 \\ 51 & 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

のように, 内部の吸収率が得られます. この手続きを各区画の吸収強度を a, b, c, d として, 実行してみると

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} 100-(a+b) & 100-(a+b) \\ 100-(c+d) & 100-(c+d) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 100-(a+c) & 100-(b+d) \\ 100-(a+c) & 100-(b+d) \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} 100-a & 100-(b+c) \\ 100-(b+c) & 100-d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 100-(a+d) & 100-b \\ 100-c & 100-(a+d) \end{pmatrix} \\ = &\begin{pmatrix} 400-(4a+b+c+d) & 400-(a+4b+c+d) \\ 400-(a+b+4c+d) & 400-(a+b+c+4d) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2}\left(100-(a+c)+100-(b+d)+100-(a+b)+100-(c+d)\right)+200 = 400-(a+b+c+d)$$

$$\begin{aligned} &\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 400-(a+b+c+d)-(400-(4a+b+c+d)) & 400-(a+b+c+d)-(400-(a+4b+c+d)) \\ 400-(a+b+c+d)-(400-(a+b+4c+d)) & 400-(a+b+c+d)-(400-(a+b+c+4d)) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3a & 3b \\ 3c & 3d \end{pmatrix} \times \frac{1}{3} \\ &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \end{aligned}$$

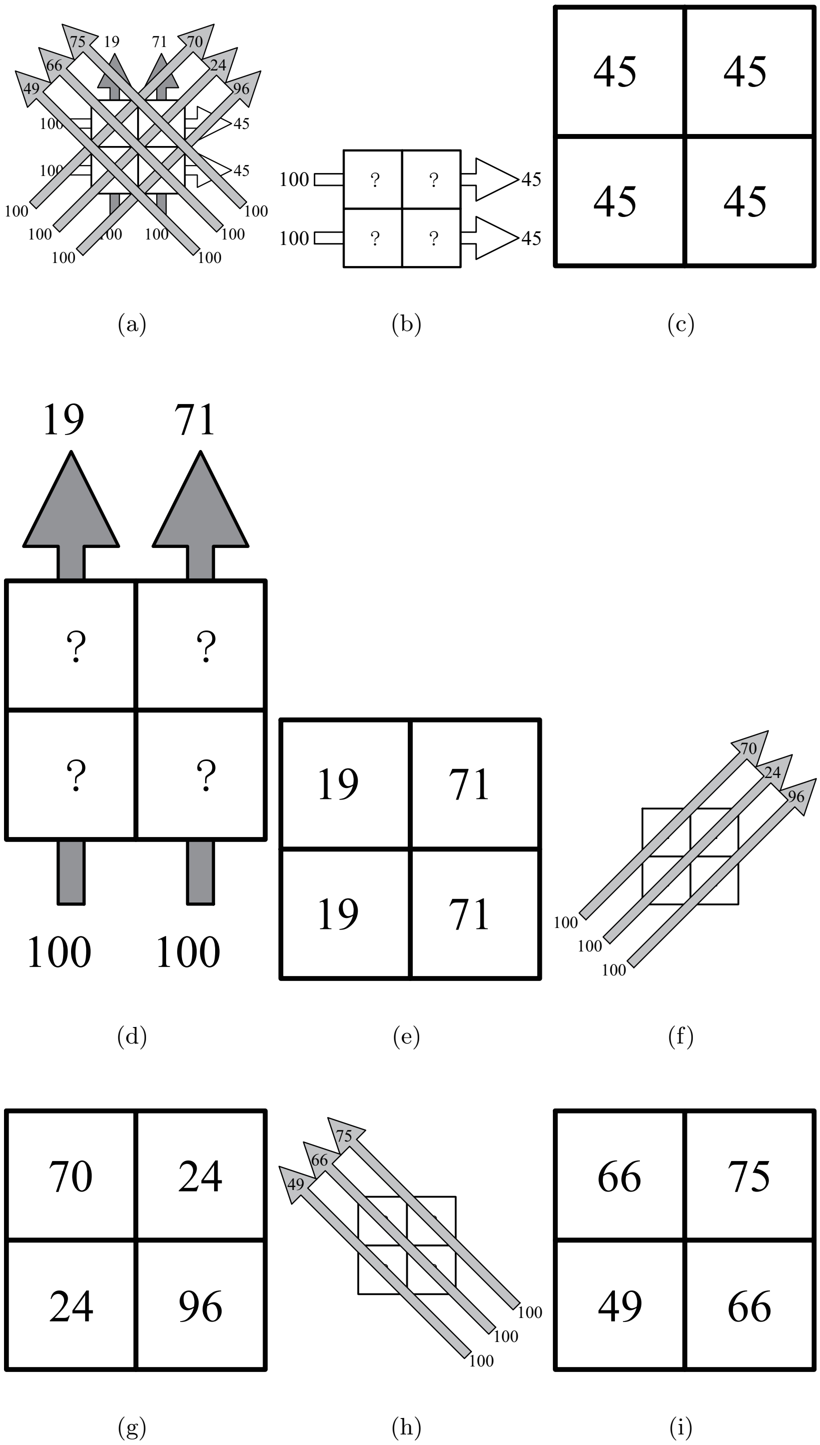

図 2: 断層像再構成の手順

となり, 確かに, この手続きで内部の吸収強度が得られることが分かる.

問 2 についても, 9 元の連立方程式

$$100 - (a + b + c) \quad = \quad 44$$

$$
\begin{aligned}
100-(d+e+f) &= 55\\
100-(g+h+i) &= 31\\
100-(a+d+g) &= 36\\
100-(b+e+h) &= 49\\
100-(c+f+i) &= 45\\
100-a &= 70\\
100-(b+d) &= 75\\
100-(c+e+g) &= 51\\
100-(f+h) &= 57\\
100-i &= 77
\end{aligned}
$$

が書けます．しかし，この場合もこの連立方程式を解くと $a=30$, $c=26-b$, $d=25-b$, $e=14$, $f=6+b$, $g=9+b$, $h=37-b$, $i=23$ のような解となり，右下がりの対角成分は決まるものの，それ以外は一つの不定な変数が残ります．

この場合に逆投影法を用いると，中心の部分だけ正しい値が計算できることが分かります．それを改善するため，測定した透過データに前処理を行うフィルター補正逆投影法というのが開発されています．

X 線 CT はわずか数ミリの腎臓結石もクリアに映し出せるほど高精細になっています．そのためにはどれほど多くのビームが必要かを考えてみてください．画像にするまでに膨大な量の測定と処理が行われていることを理解してください．逆投影法の詳細に興味があれば調べてみてください．

講評

1 問目からいきなり答えの出ない状態になり戸惑った人が多かったですね．それにもかかわらず，自ら仮定を入れるなど様々な工夫を凝らしてくれていました．中には逆投影法に近い方法に到達したものもありました．

それぞれの工夫で，拡張性がありそうなものを高く評価しました．

4 課題 2

2019 年, 歌手・浜崎あゆみ さんのデビューのきっかけとなったエイベックス株式会社 松浦勝人 (専務 (当時), 現在, 代表取締役会長 CEO)) との出会いから別れまでが, ノンフィクション作家, 小松成美 氏により, 2 人へのインタビュー取材を元にフィクション小説『M 愛すべき人がいて』として出版された. それをドラマ化したテレビ朝日の「M 愛すべき人がいて」の中で浜崎あゆみはニューヨークへ行き, 発声練習をさせられる. その時, ボイストレーナーから, 口の前にあるろうそくの炎を揺らさずに歌え, できるようになるまで練習するように指示される.

そんなことは可能なのか?どのようにすれば実現できるのか, そして, 発声においてどのような意味, 効果があるのか, 科学的に論証してください.

解説

この問題を出題したのは, このドラマのこのシーンを見たとき, 中学生か高校生のころ, 民謡歌手の金沢明子さんが何かのCM（調べたら, 日東あられのCMだったらしい）でろうそくの炎を揺らさずに歌っているシーンを思い出し, これは物理的にはどういうことなのか?説明できるものなのか?と疑問に思ったからです.

そういうことなので, 可能かどうかという点については可能です. ではそのときに何が起こっているのか, なぜ普通に歌うとろうそくの火は消えるのか説明しなければなりません.

まず, その説明に入る前に, 音（音波）とは何かについて考えましょう. 電車が走っているときのレールの振動やクオーツ時計の中で振動している水晶の振動のように, 固体の振動も音波の一種です. しかし, ここでは狭い意味の音波, 人間や動物が聞き取れる空気の振動の伝わりと考えましょう. 具体的には, 空気の圧力（気体分子の密度）変化の波が空間的に伝わっていきます. 音は波長, つまり圧力変化の繰り返しの単位の距離の逆数が音の高さ, 圧力の変化の大きさが音の大きさ（音量）を表します. 空気は振動しているので, 理想的には空気分子は一定の場所で往復運動をするだけです. つまり, スタジアムで観客がウェーブを作ることがありますが, この場合, 人が立つか座るかを順次隣に伝えています. 重要なことは, 人は移動していないということです. 音の場合, 空気の進行方向の振動なので気体分子のその方向への往復運動はありますが一方向の流れは生じません. 空気の振動により炎が振動することが考えられますが, 声の周波数の範囲は概ね100Hz〜1000Hzですので, 速すぎてわからないと言えるでしょう.

しかし, 実際に炎の前で歌ってみると炎は揺れたり消えたりします. その原因は吐息の影響と考えられます. ではその影響をなくすことはできるのでしょうか？

息は空気の流れなので, 流体力学を用いて考えます. 日本人成人の気管の直径は女性で15 mm程度で, 呼気の平均速度は392 cm/sと言われています. 空気の密度, 粘性係数は1.293 kg/m^3, 1.83×10^{-5} Pa·sですから, 慣性力/粘性力で定義されるレイノルズ数を考えると4154となり, 層流から乱流に遷移したばかりの流れということが分かります.

さらに, 気管から口腔に出てきた場合さらに乱流度が上がります. 層流は蛇口を少しだけひねって水を出した時に水が流れが止まっているかのように流れている状態で乱流とは蛇口を大きく開き飛沫が飛ぶほど流れている状態です.

空気の流れは気管から出て口腔内に広がり, 口から放出されます. 空気の密度が口の中で一定であると仮定して, 物質保存則を用いると, ここで単位時間に流れる空気の体積は一定なので

$$\begin{aligned}
\text{体積流量} &= \text{流速} \times \text{断面積} \\
&= 392 \times 10^{-2}\text{m/s} \times \pi \left(9 \times 10^{-3}\right)^2 \\
&= v_{\text{口}} \times \pi\,(\text{口の半径})^2
\end{aligned}$$

が成り立ちます.

口をすぼめた場合, 口の半径は7.25×10^{-3}ほどと考えられ, この時口から流れ出る空気の速さは

$$v_{\text{口}} = 392 \times 10^{-2}\text{m/s} \times \left(\frac{9 \times 10^{-3}}{7.25 \times 10^{-3}}\right)^2 = 6.0\text{m/s}$$

かなり速くなります．大きく口を開けた場合, 口から流れ出る空気の速さは

$$v_{\text{口}} = 392 \times 10^{-2}\text{m/s} \times \left(\frac{9 \times 10^{-3}}{3.0 \times 10^{-2}}\right)^2 = 0.35\text{m/s}$$

となり, およそ 1/20 になります．さらに, 口を大きく開けた場合, 空気は外に大きく広がるので, ロウソクに直撃する空気の量を少なくできます．

これから, 口を大きく開けることはロウソクの炎を消さない, 揺らさない大きな要素になると考えられます．発声練習ではお臍の下に力を入れて, 口を大きく開けてとよく言われます．ロウソクを揺らさないように発生することは口を大きく開けていることの証明になるのかもしれません．

その他, 空気がロウソクを直撃しなければいいので, 口からではなく, 鼻から息を出せばよいことになります．口を閉じていても歌えるので, 鼻歌, ハミング, 地声でもよいのかもしれません．

ロウソクの炎を揺らさずにボイストレーニングをするのは http://baion-voice.com/3656 によると, お勧めできないとのことなので念のため！

講評

解答にはたくさんネットで検索した結果を書いた例が見られました．多くの皆さんが同じサイトを見て同じことを書いていました．

https://music-planet.jp/blog/ボイストレーニングで洋楽を歌おう！練習方法や/#i-13
https://muscle-voice.club/voice/candle-fire-training/
https://hatuseirensiyu.com/entry66.html
https://detail.chiebukuro.yahoo.co.jp/qa/question_detail/q125476722

ただ, 科学的考察をするのが目的なので, 検索したものをまとめて, 発声学的な方法, テクニックのみに終始しているものはあまり評価できません．検索をし, その上で流体力学的な考察をしたもの, 検索に頼らず, 自力で科学的に考察したものを多少不備, 矛盾があったとしても高く評価しました．

5　課題 3

鉄道が発明される以前に, たくさんの物資を載せて移動できる移動手段は船を使うことでした. 現代の船舶は, 航海中の位置を決めるためには GPS を利用しています. それ以前はローラン, さらにさかのぼれば, 沿岸の地図を使っていた. その頃は, 大洋横断航路ではなく, 沿岸航路でした. 沿岸航路では, 沿岸の地形を頼りに航海をしていた. 近代的な技術が開発される以前には, 船乗りに種々の数理的才能が要求されていました. 現在でも, 装置が故障した場合には, 伝統的な手法と, 船乗りの能力とで操船することが要求されます. これは, 航空機の操縦でも同様です.

そこで, 地形図を利用して, 沿岸を航行することを考えよう. 同封の地図は, 国土地理院発行の与那国島の最高峰である宇良部岳の周辺の地形図です. 地図の中の新川鼻の沖を西から東に向かって航行するときに, 船から眺めた地形がどのように見えるかを作図して描く方法を考えてください.

解説

幕末を舞台にしたドラマの中に, 以下のような台詞を含む場面がありました.

> やっと, 日本に連れて行ってくれる船を見つけた. 日本に近づくと, あれが, 俺の知っている XXX の岬だ. あっちは YYY の頂だ. . .

この時代, 鎖国が徳川幕府の国是であり, 日本人による海運は沿海輸送に限られていました. この場面は, 遭難した漂流民が外国船で日本国に戻ってくる光景を思い出したことの描写です. 有名な漂流民として, 伊勢国白子の大黒屋光太夫や, 土佐高知藩知行中ノ浜村の万次郎 (ジョン万次郎) が記録に残っています. その他, 多数の漂流民がロシア沿岸に流れ着き, 当地に残り日本語教師となった者もいます. 横道にそれるが, 帝政ロシアからソビエト連邦時代も通して, ロシアには, 日本, 日本語研究の長い歴史があります. 本題の, 海運と地図, 海図の関係に戻りましょう. 古代より, ローマ道, インカ道のような街道の整備と, 沿海海運路の整備は帝国の繁栄のための動脈でした. 航海の指針として最初に作成された図は, 沖から見える岬, 頂, 特徴的な建造物の見え方を記した図でした. このような図を対景図 (view) という. 現在の航海は GPS や電子海図に頼っています. しかし, 装置が故障した場合には, 陸地に近づくにつれて対景図が必要になります. 19 世紀に英国や米国で出版された種々の国の対景図を電子検索で閲覧することが, 現在可能です. その中に, 当時の日本国沿岸の対景図も多数存在しています. 欧米列国が日本国を海から調査していたことが窺えます.

さて, 課題は地図 (等高線図) から対景図を作成する課題である. 以下のようにすれば, 作図が可能です.

1. 沖から陸を見る方向を決める. この方向を視線方向と呼ぶ.
2. 沖に視線と直交する直線を引く. この直線を基線と呼ぶ.
3. 基線上に複数の基点を決める. 十分な数の基点を等間隔に配置する.
4. 基点から視線方向と平行な直線を引く, この直線群を視線と呼ぶ.
5. 視線と地図上の等高線とが最初に交わった点の標高を基点の高さとする. この高さを基点高と呼ぶ.
6. 地図の上で, 基線側の等高線の分布を考慮し, 基点高の示す点を滑らかな曲線で結ぶ.

上の処理の 5 番目, 6 番目の処理は, コンピュータ・グラフィクスにおいて物体を表現する場合の隠れ面処理による遮断部分の消去に相当します. 写真測量法 (Photogrammetry) は, 画像計測を利用して, 3 次元物体を非接触に復元計測する分野です. 狭義の写真計測は光学写真による計測を意味するが, 広義の写真計測は計測データからのデータ処理も含んでいます. その時に利用される重要な数学的技法の 1 つが画法幾何学 (Descriptive Geometry) です. 画法幾何学の典型的な利用法の 1 つが設計図から, 建造物の見かけを図化する応用です. 画法幾何学を数学的にまとめたのは, ガスパール · モンジュです. 当初, ガスパール · モンジュは軍事的な建設学の問題から画法幾何学をまとめたと伝えられています. 対景図の作成もやはり軍事上重要な技術であることに間違いはありません. コンピュータ・グラフィクスに留まらず, 多数の画像列の同化, 画像列の中の移動物体の追跡などは, 画像情報を利用した自律ロボット

の制御, 自動運転などの数学基礎として現在も研究が続いています. 例えば, 紙面上の製図器具による作図として開発され発展してきた手法を, 計算機の上での処理に翻訳すると, 代数計算数値誤差が問題となります. この分野は計算代数, 計算線形代数とよばれます. 時代と共に, 利用目的, 利用環境が変わり, 利用装置が進化します. このとき, それ以前にあまり結びつきが分からなかった分野が, 密接に関係しています. これらのことが再認識され, 学問上の新発見が生まれることがあります. また, 伝統的な (古臭い) 分野の再評価が始まることがよくあります. 大学に進学後は, 伝統的な分野も正統な立場で学んでください. 大学図書館の専門書の書架群, 自然科学書専門の古本屋にも足を運んでください. 国際数学オリンピックは有名です. 国際地理オリンピックも開催されています. 2013 年には京都で開催されました. 課題に, ある地域の地図と, その地域の中で撮影した写真を与え, ある写真が地図の上のどの地点から, どの方向を撮影したものなのかを解答する問題がありました. 地図から対景図を作図する代わりに, 写真と頭の中の対景図を整合する課題と考えることもできます. これは, 地図, 対景図の電子的作図, 写真と電子対景図との類似判定の処理からなります. 電子的に可能となり, 人工知能の問題となります. 地図から, 目の前の見かけの地形を推定復元し, 画像データから航路を判断することが可能と成り, ドローンの自動飛行にも利用できます.

講評

解説で述べた算法を実現している解答を評価しました. パノラマでの作図を解答している参加者もいました. 人間と, 人間が乗船する船の大きさ, 地球の規模を考えると. この課題は, 講評の算法のように平行投影で作図する必要があります. 作図の方法には, 中心投影法があります. これは, 建造物の見かけの作図に使用されます.

作図した対景図の性質を考えてみましょう. 例えば, 駿河湾沖から, 富士山を中心に 10km(片側 5km) の対景図を考えます. 富士山の標高は 3,776m であるから, 標高は 10km のちょうど 3 分の 1 であり, 画面基線から, 基線の全長の 3 分の 1 にしか過ぎません. 写真で見る富士山は写真の効果のために画面一杯に表現されることが多いですが, 実測の図ではそうでないことが分かります. 富士山は古今画題としも沢山描かれている. 葛飾北斎の富嶽三十六景の中から, 神奈川沖浪裏, 武陽佃嶌, 信州諏訪湖, 上総ノ海路, 相州江之嶌などは, 富士山の遠景が対景図に近い様式で表現されていることが見て取れます. 遠近法には画法幾何の消失点 (平行線が無限遠方で 1 点になる点) を利用して絵画中の遠近を表現する方法と, 視点からの遠さが一定の層を考えて, そこに対景図を描く手法があります. さらに, 遠くのものは暈して描く手法 (空気遠近法) などがあります. これらを組み合わせて 3 次元世界を 2 次元世界に表現しています. 幾何学的な遠近法には数学的基礎, 空気遠近法には光学的な基礎が存在する. これらの基礎は, 幾何学や物理学のその時代その時代の最新の技法や知見を絵画表現に取り入れたものです. 画法幾何学を学ぶと, 絵画の鑑賞の仕方も変わります. 画家がどのような技法で何を表現しようとしたかったかを, 読み取ることが可能です.

6　課題 4

音楽は音の芸術であるので, 音の組合せと進行が重要な表現手段です. 音楽を記録する楽譜は, 作曲者が演奏者に音の組合せ方, 音の進行を指示する図表です. 現在の楽譜は 5 本の横線の組の中である五線譜の上に, 音の高さ, 一度に出す音の組合せを記述し, 進行の程度を表すために, 音の基本的な長さを記述する音符が利用されます. 五線譜と音符, さらに基本の音の位置を決める調号, 拍子記号, さらに, 音の強さや, 連続的な流れを支持する種々の演奏記号が加わります. 音を弦で発音させる場合, 元の長さを半分にして出る音と元の音との違いを 1 オクターブといいます. 古典的な西洋音楽では 1 オクターブの間は 12 の音に分かれています. そのため鍵盤楽器の 1 オクターブの間に, 黒鍵と白鍵盤を合わせて 12 個の鍵盤があります. 従って, 和音とは 12 の音の中のいくつかの音の組合と考えることができます.

楽曲の中に隠れる数学的な性質を解析することを考えてみます. 数学的には, 倍音が組み合わされると心地良い響きとなります. 和音は正 12 角形の中の特定の 3 頂点 (場合によっては 4 頂点) でできる, 3 角形 (4 角形) で表されます. 従って, 楽譜に沿った楽曲の進行とは, 12 角形に含まれる 3 角形（4 角形）が時間的に回転することになります. 和音はポップスやジャズではコードと呼ばれ, 時間的なコードの変化をコード進行と呼ぶことがあります.

古典的な楽曲の作曲技法として, カノン, フーガが代表的です. J.S. バッハはそれまでの作曲技法を集大成したと言われます. そのためバッハは数学的な作曲技法を駆使して, 楽曲の中に数学的な構造を埋め込んでいます.

そこで, 12 音の間の変換, 和音の成す 3 角形の 12 角形上での回転を数学的に記述して, 同封のバッハの楽曲の構造を説明してください. バッハのカノンを解析する前に, 練習問題として, やはり同封のパッフェルベルのカノンに適用して試してください. パッフェルベルのカノンは 2 つの編曲版を同封しました.

解説

自由 7 科とは, 古代ギリシア・ローマ時代を起源とし, 「人が持つ必要がある技芸（学芸 · 技術）の基本」として, 欧州大学制度において中世以降, 現在まで引き継がれる理念です. 基礎 3 科, 文法学 · 修辞学 · 論理学と, 発展 4 科目, 算術 · 幾何学 · 天文学 · 音楽の総称です. ここでの幾何学は, 現在の建築学や機械工学, 逆に天文学は占星術を含むこともあります. 現在では占星術は占いに力点が置かれますが, 暦の制定, 蝕, 潮汐の予報等, 実世界に影響を与える天体現象の研究を含んでいます. 音楽は, 宗教的にも重要であり, 器楽曲, 歌 (例えば讃美歌) など, 神を称える手段として人類は利用している. 天国は綺麗な音で満ち溢れていると教える宗教もあります. 現在, 日本の初等中等教育では, 歌唱, 演奏, 鑑賞, 歴史が主に教えられているようですが, これらを十分に行うためには楽曲の解析が必要です. 楽曲は作家 (作曲家) によって創 (作曲) られます. 作曲には法則があります. 演奏装置であるほとんどの楽器が物理法則による倍音を基本として発音機構が設計されています. 楽譜とは, 左から右に向かって時間進行を, 下から上に音の周波数の高さを表記した図です. そして, 音符とはある音の発音時間, 発音方法を表記する記号です. 従って, 楽曲の解析とは, 狭い意味では楽譜に表現された音の組合せの時間進行の数学的構造を解析することから始まります.

ここで対象とした楽曲は, 12 音律, すなわち, 1 オクターブを 12 の音に均等に分けた音の表現法です. 従って, 音は正 12 角形の頂点に順に配置されていると考えることが可能です. 1 オクターブ上がると次の正 12 角形に移るので, 正確には正 12 角形の螺旋である. 調の変化はどの音で上下の螺旋が繋がっているかの基点を表しています.

通常の和音は 3 つの音の組合せで表現される. すなわち, 正 12 角形の 3 つの頂点の組合せが一つの和音に対応します. 拍子で決まる, 楽譜の単位時間に, 一つの 3 角形が決まることを考えると, 楽譜上の時間進行に従ってこの 3 角形が回転することが分かります.

さて, 正 12 角形の頂点に基点から反時計周りに $\{0, 1, 2, \cdots, 11\}$ と符号を付けます. 音 α の 1 オクターブ上下の音は $\alpha \pm 12$ となります. ある時間のある和音を $(i(t), j(t), k(t))^\top$ の次の時間への推移は

$$\begin{pmatrix} i(t+1) \\ j(t+1) \\ k(t+1) \end{pmatrix} = T_t \begin{pmatrix} i(t) \\ j(t) \\ k(t) \end{pmatrix},\ t = 0, 1, \cdots t_{\max}$$

と表現できます. 推移の系列

$$T = T_{t_{\max}} T_{t_{\max}-1} \cdots T_0$$

が楽譜の数学表現です. 個々の楽曲の推移を数学的に記述することによって, 楽曲に隠された数学的構造が明らかになります. 調律と和音の推移の関係を表す数学的構造としてフーゴー・リーマンによって提唱された Tonnetz が有名です. 最初に, この概念を定式化したのは数学者レオンハルト・オイラーです. レオンハルト・オイラーの Tonnets の図が現在 wikipedia に掲載されています. フーゴー・リーマンはレオンハルト・オイラーの結果を再発見したことになります. 和音の推移に関する構造は歴史的大数学者の興味を引いたのでしょう.

音楽理論に貢献した科学者としてヘルマン = ルートヴィヒ = フェルディナント・フォン = ヘルムホルツを上げることができる. 生理物理学者として, 人間を情報計測装置と考えたときに, 音, 光, 色に関してどのような反応と処理を行うかを研究しました. そして, 音に関して

> 内耳が音の高さと音色を感知する機能について説明する理論

を確立しました. また, ヤング = ヘルムホルツの 3 色説として

> 色覚に赤, 緑, 青（あるいは紫）の 3 要素があり, これらが同じ割合で刺激されると白色を感じる. 色別は 3 要素の刺激の比率に応じて生じる.

とした. これら 2 つの成果は, 現在の映像音声通信の基礎となっている. 色に関する研究として, ニュートンに始まる物理的な取り扱い, 対して, ゲーテの提唱した色の心理学がある. 3 色説は, 人間を計測装置と考え, ニュートンの理論とゲーテの論考を繋ぐ説になっています.

課題 3 の解説, 講評でも述べましたが, 音楽, 絵画に留まらず, 芸術の中には数学的, 科学的背景があります. それが, 自由 7 科の意図するものです. 基礎 3 科に含まる, 文章表現 (作文) にも, 掛結びのように数学的構造を持つ用法, 対意語を利用した表現もあります. 音楽を含む 7 科が有機的に結びついていることが分かります.

講評

課題の楽譜はヨハン = セバスチャン · バッハの蟹のカノンです．カノンとは

> 複数の声部が同じ旋律を異なる時点からそれぞれ開始して演奏する様式の曲です.

また, この曲は逆行カノンになっています．逆行カノンとは

> 追唱が左右（時間の前後）を逆にされている場合, これを逆行カノンと呼びます．逆行カノンは各旋律が左右から行き違う様から蟹行カノンとも呼ばれます.

和音の 3 角形の推移を解析している解答, さらに逆行カノンの性質を 3 角形の推移から解明している解答を評価しました.