第22回数理科学コンクール課題解説

令和元年11月3日 千葉大学先進科学センター

目 次

1　はじめに

明治の文明開化以来, 我が国は欧米先進国の科学技術を効率よく吸収して発展してきました. 戦後もこの傾向は基本的には変わっていません. 現在, 我が国は大量の自動車や電子機器を輸出して経済大国となっていますが, これらの工業製品の基本原理はほとんど外国で考えられたものです. 欧米諸国との間に経済摩擦や文化摩擦が生じている現状を考えると, これからの我が国で大切なことは独創性のある個性的な人材を育成して, 新しい科学技術のフロンティアを切り開き, 世界に貢献することであると考えられます.

千葉大学では, 日本のみならず, 世界の科学技術の先端を担う若者を発掘し, 育成するための一助として, 本年度も, 第 22 回数理科学コンクールを開催しました. このコンクールの特色は次の通りです.

1. 自由にゆったり考える

   試験時間は 6 時間, 途中の休憩や参考書・ノート等の持ち込みは自由とする.

2. たのしい物理・数学の発見

   物理や数学のカリキュラムにとらわれず, 物理や数学の本質に根ざした, 考えて楽しい問題を提供する.

3. 多彩な才能の評価

   様々な参加者の優秀な能力やユニークな発想を多面的に評価するため, 問題をたくさん解いたものだけでなく, 1 題に集中してすばらしい発想を出したものも表彰の対象にする. また, グループとしての総合能力を評価するため, 個人参加だけでなく, グループ参加も認める.

4. 人材の育成

   コンクール参加者の物理や数学の能力をさらに高めるため, コンクールの表彰式と講評会を行う.

過去 21 回のコンクールに引き続き, 多くの中高生の参加者があり, 楽しい雰囲気の中で, いろいろユニークなアイディアが生まれました. 中学生も, 高校生に負けず優秀でありました. そして, 答案を見ると, それぞれの問題に興味を持ちながら解答していることが読んでとれました.

第 22 回数理科学コンクールの課題の解説と提出された答案の評価を以下にまとめます. 解説に述べてあるように, 各課題は課題出題者の周りにある基本的な問題や最先端の問題, さらには歴史的に意味のある問題を元にして作成しました. 課題提出者一同, みなさんの素晴らしい洞察力と表現力を前にして, 大変感心いたしました.

参加者の皆さんが今後, 科学する心を磨き続け, 我国の科学の発展に貢献することを課題作成者一同希望します. 今後も諸君と共に科学することを楽しみたいと考えています. 千葉大学では今後も引き続きこのコンクールを実施する予定です. 物理・数学に興味がある中高生の積極的な参加を期待しています. 課題作成者もさらに研鑽をかさね, おもしろく, しかも科学の本質に迫る課題を考えていきます.

課題作成者

千葉大学教授　井宮　淳

東京慈恵会医科大学教授　植田　毅

(五十音順)

令和元年 11 月 3 日

2　優秀者氏名

令和元年 7 月 27 日と 28 日に開催しました第 22 回数理科学コンクールの参加者の皆さんのすばらしい答案の中から以下の参加者諸君を表彰するこを決定しました.

第 22 回数理科学コンクール優秀者

金欅賞	筒井優友
	萩野谷 真悠
	森高 楓 小林ほのか
	染谷孝太 柳川世音 楠本一樹
銀欅賞	菊池健太
	坂井 実
	今泉隼人
	前田楓貴
	加藤奈音 濱野大和 菅谷学毅
	川名亜弥 伊藤乃愛 青木文香
	北野 侃 近藤紗帆
	藤井皐史 茂木優也
	中村 綸 栗原優太 永井大裕
	徳田 翔 本原 聡
	加藤日向 福村 翔 松野裕智
学長賞	萩野友惟 望月咲百合
	久野翔平 初川隼人
	伊藤裕基 三野耀大
機巧賞	神﨑直人
	鈴木彩太

課題	参加者名
1	筒井優友
	前田楓貴
	萩野谷 真悠
	萩野友惟 望月咲百合
	染谷孝太 柳川世音 楠本一樹
	徳田 翔 本原 聡
	加藤奈音 濱野大和 菅谷学毅
	伊藤裕基 三野耀大
2	坂井 実
	中村 綸 栗原優太 永井大裕
	萩野友惟 望月咲百合
	森高 楓 小林ほのか
	染谷孝太 柳川世音 楠本一樹
	北野 侃 近藤紗帆
	加藤日向 福村 翔 松野裕智
3	筒井優友
	今泉隼人
	菊池健太
	萩野友惟 望月咲百合
	久野翔平 初川隼人
	森高 楓 小林ほのか
	川名亜弥 伊藤乃愛 青木文香
	伊藤裕基 三野耀大
4	萩野谷 真悠
	萩野友惟 望月咲百合
	柳川世音 染谷孝太 楠本一樹
	藤井皐史 茂木優也

千葉大学先進科学センター長
教授 音 賢一

課題の部

3　課題 1

日本人は古来より花鳥風月, 日本の風土, 四季の織りなす自然現象に風情を感じ, 愛でてきました. 私達は, 梵鐘や風鈴, 北風の音, 滝や潺（せせらぎ）の音, 花火の音など音からも風情を感じ, 感傷に浸ることもあります. 音の風情を楽しむために, 庭に滝や小川を作ったり, 水をはったドーム状の陶器の器に水滴を落とし, 水が水面に落ちるときに発生する音の反響を楽しむ水琴窟なるものまで開発しています.

さて, 水面に水滴が落ちれば音がします. この日常的に当たり前な自然現象ですが, 何故音が発生するのか, 水滴がどのようになった時に音が発生するのか考えてください.

スポイトと透明なコップを用意しました. 実験をしながら考えてみてください.

解説

　この課題はとてもシンプルなので取り組みやすかったかもしれません.
　しかし，この課題は，ケンブリッジ大学などイギリスとフランスの研究者の論文

> Samuel Phillips, Anurag Agarwal & Peter Jordan: "The Sound Produced by a Dripping Tap is Driven by Resonant Oscillations of an Entrapped Air Bubble", SCIENTIFIC REPORTS (2018) 8:9515, DOI:10.1038/s41598-018-27913-0

（オープンアクセス論文なので無料でダウンロードできます）
を元にしています．こんなに身近で単純な現象も一流学術論文誌に掲載される研究対象となるのです．身のまわりには，不思議で興味深い現象に溢れています．それを見出し，研究課題とできる知識と問題意識を持ってください.
　この研究はアメリカ物理学会（APS）の学会誌に紹介されています.

> Physics Today 71, 12, 70 (2018); doi: 10.1063/PT.3.4100

ここでは，こちらの記事に沿って解説します.
　さて，この論文では水面に滴下する水面をハイスピードカメラによる撮影と空気中，水中のマイクロホンによる録音により現象を解明しています．下図には，注射器から水面に水滴を落とす瞬間を角度の

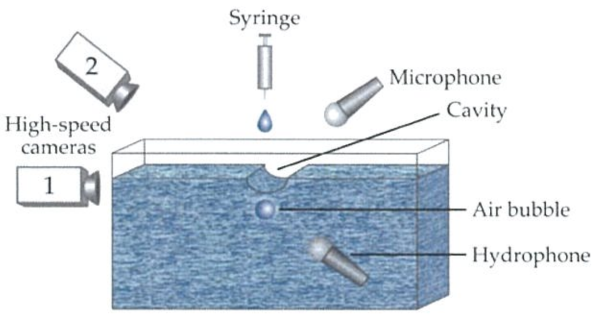


図 1: 実験装置

異なる2台のハイスピードカメラで撮影した画像と空気中のマイクロフォンで録音した音の時間変化を示してあります．我々は概して水滴が水の表面に当たる瞬間に音が発生していると思っていますが，それが間違いであることが分かります.
　水滴が落下したときの水面と水滴の様子は以下のように時間変化します.

1. 水滴が水面に衝突

2. 水面に表面張力波が発生

3. 水滴の慣性による水面の窪みの発生

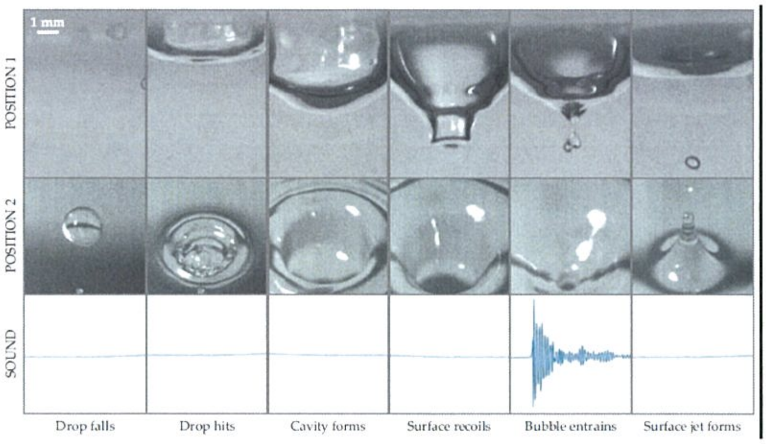


図 2: 水滴の滴下実験結果. カメラ 1, カメラ 2 の画像および空気中のマイクの音の時間経過.

4. 表面張力による窪みの反動上昇

5. 気泡の取り込み

6. 水の柱が立ち上がり，ちぎれて水滴が噴き上がる

この過程で水中に気泡が取り込まれることが「ポチャ」という音の発生の鍵になります. この気泡が窪みの底近くにあることが重要になります.

水中に取り込まれた気泡が振動します. その振動は水中を伝わり，窪みの底の水面を振動させます. 窪んだ水面は糸電話の筒，窪みの底の水面は糸電話の（糸の付いた）振動する膜のように振る舞い，気柱共鳴のように音を増幅します. この過程以外では音は発生しません.

このような想定で求めた振動数は全ての実験データと一致しており，この説明が正しいことが確認されています.

講評

分かり易い課題だけあって，多くの人が解答してくれていました. 高速度カメラもマイクもない状態でしたが，非常に注意深く観察し，水中に泡があるときに音が大きくなるという重要な点を見つけ出した解答が何例かありました. 素晴らしい観察眼だと思います. さらに，どういう条件のときに気泡が取り込まれるのかなど，システマティックに条件を変化させ，大きな音が発生する条件を求める試みをしたものなどがありました. システマティックに条件を変えて，最適な条件を求めようとする姿勢は非常に大切です. 慎重な観察をし，計画的な実験ができているものを高く評価しました.

また，重要なポイントに気付けるはずなのに見逃している. 見つけていると思われるにもかかわらず，答案に表現しきれてないものも散見されました. 科学も最終的には論文と言う形で公にしなければなりません. つまり，自分が発見した事実を文章と言う形で表現しなければなりません. 科学を志す人は今から説明文（特に英語で）を書く練習をしておいてください.

4　課題 2

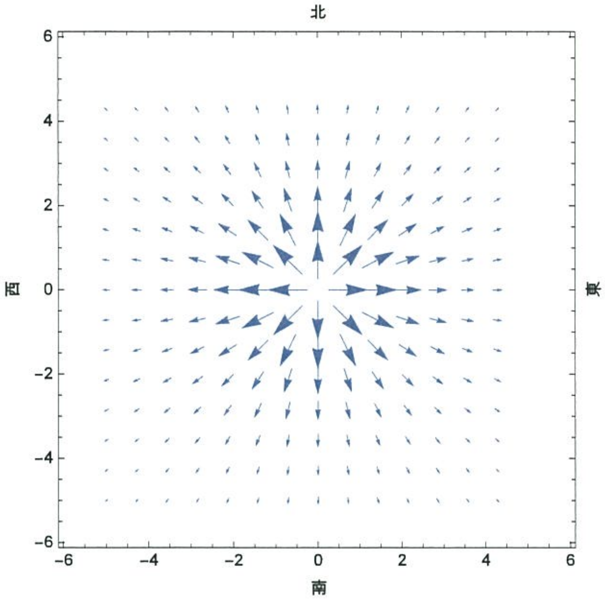
液体や気体は圧力差があると圧力を均等にするように流れが生じます. 水道や風, 建設工事での生コンクリートもこの法則に従っています.

テレビなどで毎日, 天気予報が放送されていますが, その時, 風速, 風向, 気圧などを解説することがあります. しかし, 実は, 風速, 風向は気圧で決定されるので, どちらか一方が分かればもう一方の情報は物理的に計算することができます. (とはいえ, 測定しておくに越したことはありません.) これは, 電磁気学において, 各点の電位が決まれば, 色々な場所での電場が決まり, 逆に, 様々な点の電場が決まれば, 各点での電位が決定されることと数学的には全く同じです.

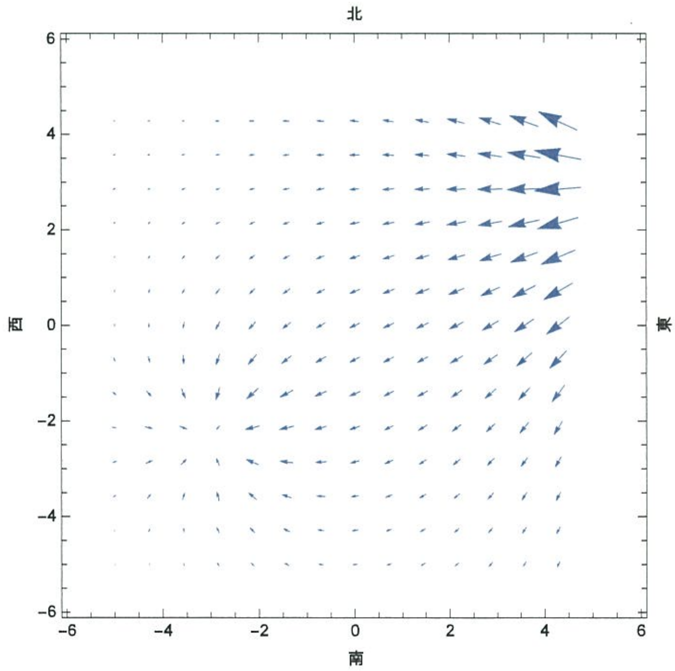
さて, ここでは, 気象について考えてみましょう. 地表面の風速, 風向のデータから, 気圧の情報なしに, どのような気象状況なのか（どこに低気圧, 高気圧があるのか）を考えます.

問題を簡単にするために, 地表面の気温は一定で空気の密度は一定であるとして以下の問題を考えてください.

問 1 地表面に以下の図のような風が吹いているとき, どのような気象状況でしょうか? なぜそのように考えたのか, 考え方, できれば数値指標を用いて説明してください.



問 2 地表面に以下の図のような風が吹いているとき, どのような気象状況でしょうか？なぜそのように考えたのか, 考え方, できれば数値指標を用いて説明してください.



問 3 気象庁予報部は漁業用に気象通報をラジオ放送しています. 表 1, 6 月 25 日正午の気象通報から風向, 風速を抜き出したものです. このデータを天気図に地上天気図に記入し, どのような気圧配置であったのか説明してください. ここで, 風力とは気象庁風力階級表による風速の尺度で, 表 2 のように定義されています.

表 1: 気象庁予報部発表 2019 年 6 月 25 日正午の漁業気象通報放送原稿

場所	風向	風力	場所	風向	風力
石垣島	東北東	3	浦河	西	3
那覇	南東	4	根室	南南東	3
南大東島	南東	3	稚内	南西	4
名瀬	南東	4	ポロナイスク	南	4
鹿児島	南南東	2	セベロクリリスク	東北東	2
福江	東	2	ハバロフスク	西南西	4
厳原	北東	2	ルドナヤプリスタニ	東	2
足摺岬	東	3	ウラジオストク	南	5
室戸岬	東北東	3	ソウル	南南西	2
松山	西南西	2	ウルルン島	東南東	2
浜田	北	2	プサン	東南東	3
西郷	東	2	モッポ	北西	3
大阪	北北東	2	チェジュ島	東南東	3
潮岬	東南東	3	恒春	東	1
八丈島	南南西	2	長春	南西	2
大島	西南西	2	北京	東北東	2
御前崎	東南東	2	大連	南	3
銚子	東北東	3	青島	南南東	2
前橋	南南東	2	上海	南東	3
小名浜	南	3	武漢	東	2
輪島	北北西	4	アモイ	北北西	1
相川	南南西	3	香港	風向不明	1
仙台	南東	2	バスコ	北西	3
宮古	北東	2	マニラ	西南西	2
秋田	西南西	3	父島	南	3
函館	南西	2	南鳥島	東南東	4

表 2: 気象庁風力階級表

風力	相当風速 (m/s)
0	0.0 から 0.3 未満
1	0.3 以上 1.6 未満
2	1.6 以上 3.4 未満
3	3.4 以上 5.5 未満
4	5.5 以上 8.0 未満
5	8.0 以上 10.8 未満
6	10.8 以上 13.9 未満
7	13.9 以上 17.2 未満
8	17.2 以上 20.8 未満
9	20.8 以上 24.5 未満
10	24.5 以上 28.5 未満
11	28.5 以上 32.7 未満
１2	32.7 以上

解説

この課題は天気図を題材にしているので地学の課題だと認識した人が多かったようです．しかし，問題文に「なぜそのように考えたのか，考え方，できれば数値指標を用いて説明してください.」とあるように，数学の問題として出題しました．この問題は大学 1，2 年生で習う微分，積分，ベクトル解析の応用問題です．大学生が習うものを使えるわけもありませんから，その意味を理解して，自分なりの表現を期待していました．意味を理解してもらうために，問 1, 問 2, 問 3 と段階を分けて出題しました．

まず，気象の話からしましょう．低気圧とはどういうものか？空気塊（水蒸気を含む）が暖かな地表面で温められ，膨張し，密度が周囲の空気に比べ小さくなるため上昇します．これは水中を気泡が上昇するのと同じです．空気塊が上昇すれば気圧が下がるので膨張し，温度が下がります．このときの蒸気圧がその温度での飽和蒸気圧を上回ると雲ができます．夏の昼過ぎに現れる入道雲（積乱雲）でこれが夕立，最近ではゲリラ雷雨の元になります．空気塊が上昇した地表では気圧が下がるので低気圧と呼ばれます．気圧が下がると周りから空気が流れ込みます．したがって，地表では低気圧の中心に向かって風が吹きます．

高気圧はその逆で，冷たく密度の高い空気塊が地表に向かって降下します．したがって，地表での気圧が上がり，高気圧と呼ばれます．地表面では高気圧の中心から外に向かって放射状に風が吹きます．

実際には，地球の自転によるコリオリ力により，風向きは圧力の傾きに対して平行ではなく少し傾きます．

さて，問 1 の図は地表面の風向きを表していて，中心から放射状に風が吹き出しているので高気圧と言うことになります．ここまでであれば地学の問題ですが，これは，風速の代わりに水の流速とみれば，原点から水が湧き出している状況と同じです．また，原点に正電荷がある場合の電場，N 極がある場合の磁場と同じです．背景にある数学は全く同じです.（アンケートに「数学の問題が解きたかった」と言うのがありましたが，教科書や問題集，入試のように与えられた問題をただ解くのが数学の問題ではありません.）

中学生の参加者もいるので問題文では「できれば数値指標を用いて」と書きましたが，湧き出しているのか吸い込んでいるのか，湧き出す量が大きいのか小さいのかを以下に数字で表すかを考えて欲しかったわけです．

点灯した電球や火の付いたろうそく，更に言うと，恒星の明るさが距離と共にどのように変化するかと言うのを習ったことがあると思いますが，これも今考えている問題と同じです．それは，電球やろうそく，星から光（光子）が放出されている（流れ出ている）からです．明かるかどうかは光が流れ出る量が多いかどうかと言うことになるからです．明るさが距離に対してどのように変化するかは，光が等方的に広がるとして，光は光源からその距離にある球面全体を照らすので，明るさとその表面積をかけたものは距離に関係なく一定になります（図 3）．

光源からの距離を r とすると，球面の表面積は $4\pi r^2$ であるから，明るさは距離の 2 乗に反比例することになります．電磁気学のクーロンの法則で点電荷の周りの電場，点磁極の周りの磁場，質点の周りの万有引力が距離の逆二乗則に従うのも同じ理由です．ここでは，一点から湧き出す，等方的な場合を考えたので，球面を考えましたが，閉じた任意の局面でも構いません．また，等方的，つまり向きによっ

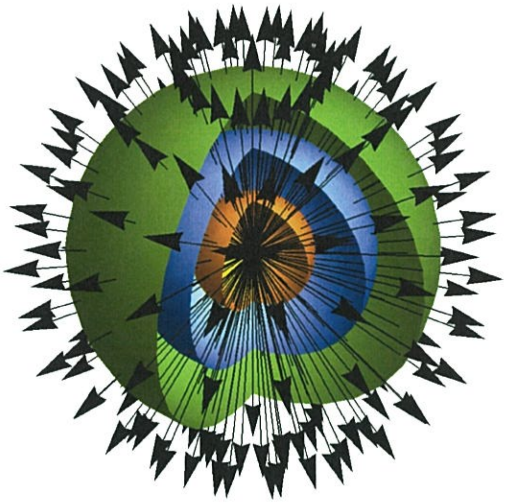


図 3: 1 点からの湧き出し．湧き出しが点からの 3 つの距離にある球面を貫く様子.

て流れの量が変わらないので，掛け算で済みましたが，一般には積分を使う必要があります．一般化したものをガウス（発散）の定理と言います．式で表現すると

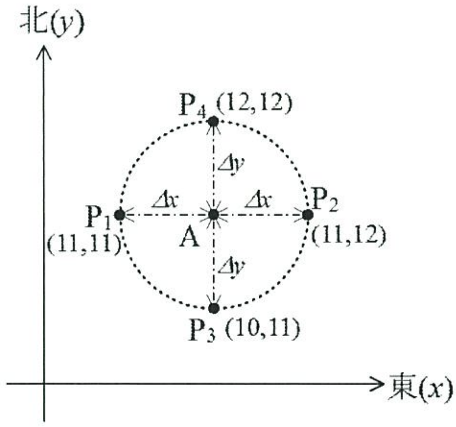
$$\int\int \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \text{湧き出し量}$$

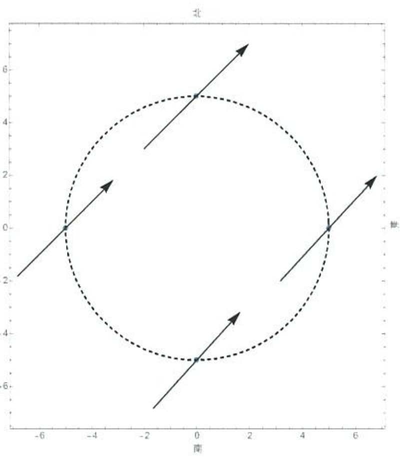
となります．左辺は，風船のようなある閉曲面を考え，閉曲面上の非常に小さな部分の面積を dS として，その面を垂直に流れでる流れの量（流れの速度や電場ベクトル，万有引力など）をかけたもの（ただし，流れ出る向きを正とします）を閉曲面全体について足したものになります．それが，その閉曲面に含まれる領域からの湧き出しの量に等しいという意味です．湧き出したものはどこに行ってもなくなりませんと言う意味です．

さて，この問題の場合，地表面の空気の流れを考えているので，2 次元で考えればよいので，適当な（つまり，計算に都合のよい）閉曲線を考え，それを線分に分割します．風速のその線分に垂直な成分と線分の長さをかけて，閉曲線全体にわたって和をとる．考えた閉曲線の中に湧き出し部分，つまり，高気圧があれば正の値，逆に，吸い込む部分，つまり，低気圧があれば負の値になります．湧き出しも，吸い込みもなければ 0 になります．これを色々な地点について実行すると，風速だけからどこに低気圧や高気圧があるか分かります．

次のような場合を考えてみよう．

下図には，水平面上で点 A の西，東，南，北にある 4 点（P_1〜P_4）における水平風速成分を (u, v) の形式で示してあります．ここで，u は東西 (x) 方向の風速成分，v は南北 (y) 方向の風速成分であり，単位は m/s です．また，点 A と周囲の 4 点との間の水平距離は，いずれも 5km です．この時，この気団が低気圧か高気圧かを決定してみよう．閉曲線はどのようにとっても構いませんが，図の破線のような





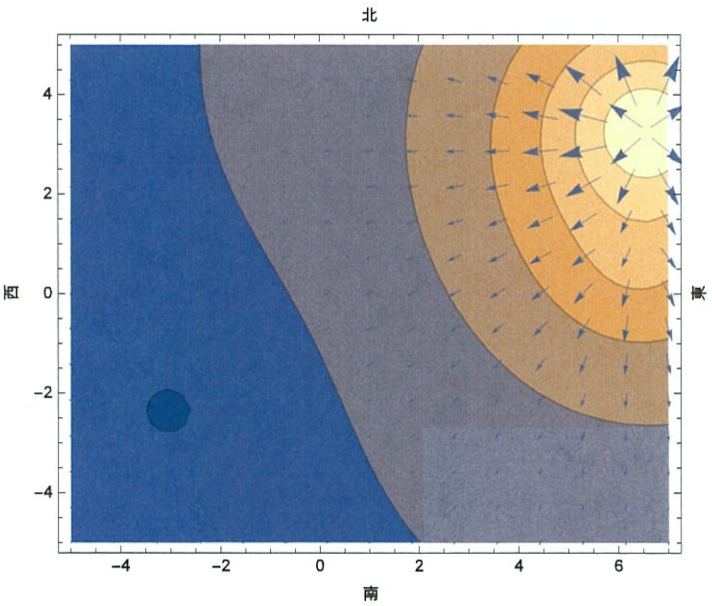
円としましょう．しかし，風速のデータは 4 点しかないので，円を各点を中央に持つ弧に 4 等分します．4 点とも点 A からの距離は 5km なので，弧の長さは $2\pi 5/4 = 7.85$km となります．点 P_1 での弧に垂直な速度成分は x 成分で x 軸正向きに 11，点 A から見て弧の外向きを正とするので，-11，これに弧の長さをかけて，-86.35 となります．点 P_2 では外向き垂直速度成分 11 に弧の長さをかけて，86.35 となります．点 P_3 での弧に垂直な速度成分は y 成分で y 軸正向きに 11，点 A から見て弧の外向きを正とするので，-11，これに弧の長さをかけて，-86.35 となります．点 P_4 では外向き垂直速度成分 12 に弧の長さ

をかけて，94.2 となります．これらの和は $(11-11-11+12)\times 7.85 = 7.85$ となり，正であるので，この領域からは空気が流れ出ており，高気圧があることが分かります．

この方法では閉曲線を考えなければなりませんが（考え方が分かり易いのでこちらを用いました），積分ではなく微分を用いた表現を用いると，閉曲線を考えなくとも各点での単位体積当たりの湧き出し，吸い込みの量が分かります．興味がある方は，この後に国際物理オリンピック日本代表候補者に対する研修用のテキストの対応部分を付けますので読んでみてください．渦についても似たような数学的表現が可能で，それについても触れています．

問 1 では，原点を中心とする円に対し，矢印の長さを速度だとして，このような作業を行うと，正の値（ベクトルの長さの単位に依るので，ここではこの値を 1 とします）を得て，高気圧と判定できます．原点を含まない閉曲線をとると正確に計算した値は 0 になり，原点以外からの湧き出しはないことが分かります．

問 2 でも，同じようなことをすれば，点 $(-2.8605, -2.2712)$ に -0.3097 の吸い込みがあることが分かります．図の上に高気圧がありそうなことが分かりますが，その中心は問題文の図には含まれていません．したがって，この図だけからはそこに高気圧があるとは判定できません．実際には，図 4 のように，



$(6.553, 3.3422)$ に 1.7812，$(6.3370, 0.4492)$ に 0.4846 の 2 つの湧き出しがあります．この領域の図が与えられれば，ここに高気圧があることはわかりますが，図 4 風速データではデータが与えられる点が荒くて，2 つの湧き出しは区別できません．

問 3 の 2019 年 6 月 25 日正午の天気図は図 4 のようになります．銚子沖に高気圧があることが分かりますが，これまで解説した方法では海側のデータがないため，海に高気圧や低気圧がある場合は判断が難しいかもしれません．ただ，どのような閉曲線でも構わないので工夫すれば評価できる可能性はあります．現実の風向データでは地形（海の存在も含め）や気温の差でも変わるのでなかなか複雑です．

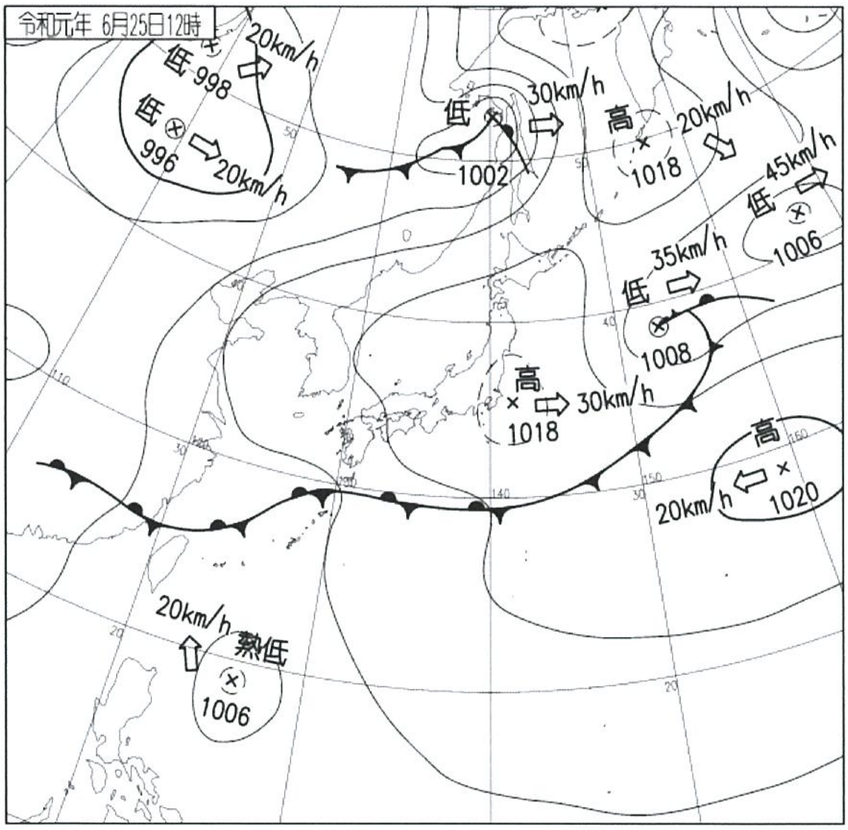


図 4: 2019 年 6 月 25 日正午の天気図.

講評

完璧な天気図を描いた解答が数件ありました．フィリピン沖の熱帯低気圧（台風と表現していたものも）までしっかりと書きこまれていました．問題文で与えたデータだけではこれほどのことは分からないはずなのだけれど !? 日時を明らかにしているのでネットで検索してそのまま写して提出したものでしょう．このような解答は評価対象外としました．研究職に着くものには研究倫理は必須条件です．それがなければ研究不正をしてしまいます．理系研究職を目指すのであれば，自分の行動を振り返り反省してください．

問 1 はほぼすべての答案が正解していました．しかし，数値的指標についての考察は皆無でした．問 2 も多くの答案が正解に辿り着いていました．非常にいい考察をしている答案があり，それらを高く評価しました．問 1，問 2 と踏まえたうえで，しっかりとした考察で，非常に近い天気図に辿り着いている答案もありました．

アンケートによるとこれで地学が好きになったと言う意見もありました．気象は大学以降では物理の特殊な分野との位置づけです．物理学とは色々な現象の中に潜む共通性，普遍性を見出す学問とも言えます．さまざまな分野をバラバラに覚えるのではなく，色々な分野で（自然科学だけとは限らず，情報科学，経済学でも含まれることもあります）成り立つ普遍的な法則を意識しながら勉強してください．

5 課題 3

イベリア半島に進出したイスラム教徒たちは，ウマイヤ朝を築き，その後，１５世紀にグラナダ王国がキリスト教徒に滅ぼされるまで，現在のスペインを支配していた．今でも，スペインにはイスラム教の面影が残る文化や遺跡が存在する．グラナダ王国の首都であったグラナダにあるアルハンブラ宮殿は世界遺産の一部である．この宮殿は，イスラム教時代の城郭に遡り，夏季にグラナダで一番涼しい稜線に造られたといわれている．カトリックによるリコンキスタ以降，アルハンブラ宮殿には，キリスト教文明による手が加えられ，モスクが修道院に改築されたりした．しかし，幾つかの重要な部分は，イスラム教支配時代からそのままにされている．特に，後背地の山から水を引き込んだ噴水，水路の設計は，庭を潤すだけでなく，水冷によって宮殿を涼しくしている．この仕掛けは，セビリアの王宮に受け継がれている．イスラム教社会の水利，水工学の技術の水準は，同時代の近隣文化圏のそれに比べて非常に高いものであり，世界遺産の中には，当時の技術が今なお利用されているものが多数存在する．

アルハンブラ宮殿の有名な仕掛けの１つにライオンの中庭がある．ライオンの中庭の中心 12 頭のライオンが円形水盤を支え，口から水を出す噴水がある．現在は１２頭のライオンの口から水が絶え間なく流れ出ている．しかし，このライオンの噴水は，且つては，１時間ごとに，1 頭のライオンが順に口から水を出す水時計であったといわれている．一説では，征服したキリスト教徒が，仕掛けを調べるために分解したが，元に戻せなくなり，現在に至っているとも伝えられている．

そこで，12 頭のライオンの口から順に水を出す，水時計の機構を，思考実験によって，推定・復元しなさい．ただし，弁や水車等の制御機構は，摩擦なく理想的な動作をすると仮定する．また，水は絶えず，上流から無限に，しかも連続的に供給され，使用された水は自然に返す，すなわち，下流に流すものとする．

解説

12 時間式, あるいは 24 時間式の時計を実現するためには, 12 進法あるいは, 24 進法を機械的あるいは電気的に実現する必要がある. 一般に, 水量 n 単位容量を数あげ元に戻すためには, 機械的仕掛けを組み込むことになる. 8 世紀には唐で, 機械式水時計が製作されていました. イスラム支配化のアンダルシでは, 12 世紀に機械的水時計が作成されています.

歯車を使って, 回転の比率, 回転の方向を変更することは, 機械機構学とよばれます. 現在では, 自動車や, ディーゼル機関車の変速機から, 自転車の内装式変速機まで, 広く使われています. 日本では, 機械工学の一部と認識されています. しかし, 歴史的には, 動く幾何学と考えられ, 幾何学の一部と考えられ数理科学として取り扱われます. 歯車と棒 (bar) を組み合わせた空間的な動きの設計はロボットの腕の設計・制御へと繋がっています.

工業用ロボットの腕として, 3 本の腕がそれぞれの周りに 360 度回る装置があります. ベクトル型ロボット呼ばれます.

長さがあり幅のない理想的な直線分で腕を定義します. 球の南極に小さな穴をあけます. この穴から腕を入れ, その先につけた位置だけを持つ, 理想的な刷毛で, 球の内面を塗装することを考えます. このとき, 「ベクトル型ロボット球の内面を限なく塗装することは不可能である. 」この定理の証明には, 代数位相幾何学という数学の知識が必要です. また, バベッジは解析機関と呼ばれる機械式計算機を設計しました.

講評

課題では, アルハンブラ宮殿のライオンの間にある噴水時計の推定復元を考えました. 12 進法実現する機械的を、水を使って復元することです. ただし, 12 世紀までに知られていた技術を利用することしかできません. 技術には, 材料, 加工技術も含めて考えます. このような, 方法で, 過去の装置を復元し, その動作を調べることは, 実験考古学の一分野になっています. 「アンティキティラ島の機械」, 「指南者」の復元などが知られています. これらの装置の復元には, 装置が使われた当時の技術と材料を使う必要があります. また, 機械の仕掛けを伝えるためには, 考えを図面で伝えることも必要です. エジソンとの直流・交流論争を繰広げたテスラが特許に添付した図面は素晴らしいものです. また, ダ・ビンチの発明した装置は, 図面として現在まで伝わっています.

そこで, 12 世紀ころまでに知られていた基本的な仕掛けを利用して, 機械式に 12 進法を実現する装置を, 分かりやすく作図した解答を評価しました. 具体的には, 12 世紀ころの加工技術によって加工できる王冠歯車, 遊星歯車などの組み合わせた装置の考案と, その装置を 3 次元的に, しかも, 動作をわかりやすく図化したものを評価しました.

6　課題 4

零以上の非負整数の集合 $\mathbf{Z}_+$ に対する計算論を構成しよう．$\mathbf{Z}_+$ の要素 x に対して

$$s(x) = x + 1$$

とする．この定義より，

$$s(0) = 1, s(s(0)) = 2, s(s(s(0))) = 3, \cdots$$

であるから，0 に s を n 回作用させたものが整数 n となる．

この関数 s を利用して，整数に対する演算をアルゴリズムとして構成することを考える．そのために 2 つの非負整数 a, b が等しいときに 1 を出力する関数 $E(a, b)$ を利用する．関数 $E(a, b)$ を利用すると m に n を加えるアルゴリズムは

1. m, n を入力とする．i に 0 を代入する
2. $s(m)$, $s(i)$ を計算する
3. $E(n, s(i)) = 1$ ならば終了
4. m に $s(m)$ を，i に $s(i)$ を代入し，2 に戻る．

である．

問 1 関係

$$m \times n = m + m + \cdots + m$$

を考慮して，加算演算を利用して，2 つの非負整数の乗算を計算するアルゴリズムを加算のアルゴリズムを使うことによって作成しなさい．

問 2

$m > n$ ならば $m - n$ そうでなければ 0 を出力する演算を $m \ominus n$ とする．$m \ominus n$ を出力するアルゴリズムを作成しなさい．

問 3

$m > n$ ならば

$$m = qn + r,\ 0 \leq r < n$$

の q を，そうでなければ 0 を出力するアルゴリズム　m/n を作成しなさい．

問 4

m^n を計算するアルゴリズムを作成しなさい．

問 5

k, l 整数を非負整数とする

$$m = kn^l,\ 1 \leq k \leq n - 1$$

となるとき $l = L_n m$ とする．l を計算するアルゴリズムを除算のアルゴリズム m/n を利用して作成しなさい．

解説

決められた規則に従って問題を解く手順をアルゴリズム (算法) という. ある問題のアルゴリズム設計は, 問題に対する解の存在を構成論的に証明することでもある. アルゴリズム設計理論の基礎となる計算のモデル (Model of Computation) とは人工的な計算機を含め, 計算・推論・証明といった行為を理論的・抽象的に考察するための数理モデルのことである. 原始帰納関数と呼ばれる次の定義から, 四則演算から始まり, 整数上の全ての計算を構成できる. 計算機の上では, 連続を有限離散で近似して計算するため, 原始帰納関数から構成される帰納的関数は計算機科学において取り扱うアルゴリズムの基礎となる.

帰納関数とは基本的操作

- 零　0
- 零から始まる後続子 $s(0) = 1, \overbrace{s(\cdots(s}^{n}(n))\cdots) = n$
- n 個の配列の i 番目の要素の指定 $x_i = P_i^m f(x_1, \cdots, x_n)$
- 合成 $g(x_1, ..., x_n) = f(f_1(x_1, \cdots, x_n), \cdots, f_m(x_1, \cdots, x_n))$
- 帰納 $h(0, x_1, \cdots, x_k) = f(x_1, \cdots, x_k)$, $h(s(n), x_1, \cdots, x_k) = g(h(n, x_1, \cdots, x_k), n, x_1, \cdots, x_k)$

を繰り返して定義される関数である. この関数を利用して, ほぼすべての整数計算が定義できることが知られています. そのため, 計算モデルとして採用されます.

さて, 四則演算を定義しましょう.

1. 整数 m は零に後続子を m 回作用させれば定義できます.
2. 整数 m に後続子を n 回適用すれば $m+n$ が計算できます.
3. $m+m$ を n 回適用すれば $m \times n$ を計算できます.
4. 後続子の逆操作ととして前置子を $p(0) = 0$,$p(y+1) = P_1^2(y, p(y))$ 定義すれば, 減算が定義できます.
5. m から n を引き続ければ m/n を計算できます.

四則演算を組み合わせると, 歴史上最初に構成されてといわれるユークリッドの互除法

1. 入力を m, n $(m \geq n)$ とする.
2. $n = 0$ なら, m を出力して, 終了する.
3. m を n で割った余りを新たに n とし, 更に, 元の n を新たに m とし 2. に戻る.

を構成できます. そして, 多項式の集合は, 加算, 除算, 乗算の結果がまた, 多項式になることから, 整数と同じ代数構造を持っています. そこで, ユークリッドの互除法を多項式の集合に拡張できます. このように, 四則演算から初めて, 高度な計算を組み立てることができます.

更に, 変数に順序を定義すると, ユークリッドの互除法を多変数多項式に拡張できます. 多変数多項式に対するユークリッドの互除法は, ロボットの腕動作の設計・解析, ロボットが実現する3次元空間の復元, 遺伝子解析に使われる生命情報処理, 統計計算など情報科学の種々の分野で重要な働きをします.

計算のモデルとして, 原始帰納関数と等価なモデルとしてチューリング機械があります. チューリングは, 人間の思考に対する疑問から, 計算を機械的に実現するモデルとして現在チューリング機械と呼ばれる計算のモデルを提案しました.

講評

課題は, 帰納関数による計算の構築を2つの非負整数 a, b が等しいときに1を出力する関数 $E(a,b)$ を利用して, 「条件文」と「繰返し文」によって実現することを目的としました. 論理的に矛盾のない記述を評価しました.

ロボットの部

7　課題 ロボットの部

1 階の自習室に, RAPIRO が用意してある. 各自でロボットの動作課題を考え, その動作を実現しなさい. どのような動作課題を考えたかレポートを作成してください. 動作の独創性, 面白さを評価します. 動作実演は 7 月 28 日の午後 3 時に始める. それまでに, 動作プログラムを完成させてください.

講評

命令の数, 動作の連続性, 動作の正確性を基準とし, 主催者, 補助者の採点, 参加者の相互採点の合計点の、上位参加者を機巧賞としました.