第８回数理科学コンクール課題解説

平成 17 年 11 月 3 日 千葉大学先進科学研究教育センター

目次

はじめに

明治の文明開化以来, 我が国は欧米先進国の科学技術を効率よく吸収して発展してきました. 戦後もこの傾向は基本的には変わっていません. 現在, 我が国は大量の自動車や電子機器を輸出して経済大国となっていますが, これらの工業製品の基本原理はほとんど外国で考えられたものです. 欧米諸国との間に経済摩擦や文化摩擦が生じている現状を考えると, これからの我が国で大切なことは独創性のある個性的な人材を育成して, 新しい科学技術のフロンティアを切り開き, 世界に貢献することであると考えられます.

千葉大学では, 日本のみならず, 世界の科学技術の先端を担う若者を発掘し, 育成するための一助として, 本年度も, 第8回数理科学コンクールを開催しました. このコンクールの特色は次の通りです.

1. 自由にゆったり考える
   試験時間は6時間, 途中の休憩や参考書・ノート等の持ち込みは自由とする.
2. たのしい物理・数学の発見
   物理や数学のカリキュラムにとらわれず, 物理や数学の本質に根ざした, 考えて楽しい問題を提供する.
3. 多彩な才能の評価
   様々な参加者の優秀な能力やユニークな発想を多面的に評価するため, 問題をたくさん解いたものだけでなく, 1題に集中してすばらしい発想を出したものも表彰の対象にする. また, グループとしての総合能力を評価するため, 個人参加だけでなく, グループ参加も認める.
4. 人材の育成
   コンクール参加者の物理や数学の能力をさらに高めるため, コンクールの表彰式と講評会を行う.

過去7回のコンクールに引き続き, 多くの中高生の参加者があり, 楽しい雰囲気の中で, いろいろユニークなアイディアが生まれました. 中学生も, 高校生に負けず優秀でありました. そして, 答案を見ると, それぞれの問題に興味を持ちながら解答していることが読んでとれました.

第8回数理科学コンクールの課題の解説と提出された答案の評価を以下にまとめます. 解説に述べてあるように, 各課題は課題出題者の周りにある基本的な問題や最先端の問題, さらには歴史的に意味のある問題を元にして作成しました. 課題提出者一同, みなさんの素晴らしい洞察力と表現力を前にして, 大変感心いたしました.

参加者の皆さんが今後，科学する心を磨き続け，我国の科学の発展に貢献することを課題作成者一同希望します．今後も諸君と共に科学することを楽しみたいと考えています．千葉大学では今後も引き続きこのコンクールを実施する予定です．物理・数学に興味がある中高生の積極的な参加を期待しています．課題作成者もさらに研鑽をかさね，おもしろく，しかも科学の本質に迫る課題を考ていきます．

課題作成者

千葉大学教授　井宮　淳
千葉大学助教授　植田　毅
(五十音順)

平成17年11月3日

優秀者氏名

平成17年7月23日に開催しました第8回数理科学コンクールの参加者の皆さんのすばらしい答案の中から以下の参加者諸君を表彰することを決定しました.

第8回数理科学コンクール優秀者

金欅賞　井宮美紀子
　　　　大友雄造
銀欅賞　岩瀬優也
　　　　長耕太郎
　　　　グループ1 北奈苗 早川萌
　　　　グループ2 谷内稜 肥澤拓也 堀谷理紗 清矢明子
　　　　グループ6 吉田佑輔 亀井健宏 押塚滋之 武石健
　　　　グループ9 清田正紘 松元叡一
学長賞　計良宥志 武田眞佳

課題	参加者名
1	岩瀬優也
	大友雄造
	松元叡一
2	谷内稜
	肥澤拓也
	堀谷理紗
	清矢明子
3	井宮美紀子
	大友雄造
	北奈苗
	早川萌
	吉田佑輔
	亀井健宏
	押塚滋之
	武石健太
4	井宮美紀子
	長耕太郎
	清田正紘

千葉大学先進科学研究教育センター長
教授 上野信雄
平成17年11月3日

1　課題 1

課題

1.1

二次方程式

$$x^2 - x + 10^{-12} = 0$$

のより正確な解を電卓を用いて計算する方法を考察してください. 解の公式を用いても構いません.

ただし a が零でないとき

$$ax^2 + bx + c = 0$$

の 2 つの答えを

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

によって求める式を解の公式といいます.

1.2

ある数 A の平方根（2 乗すると A になる数, $\sqrt{A}$）を電卓の四則演算のみを用いて計算する方法を以下に説明します. この方法で求めた数値が A の平方根の近似値を与えることを説明してください.

A の平方根の近似値の計算法

1. A の平方根の値を適当に推測します (これは値が近かろうが, 程遠かろうが構いません).
その数値を a_0 とします.
2. A を a_0 で割った数と a_0 の平均値を計算します. この数値を a_1 とします.
3. A を a_1 で割った数と a_1 の平均値を計算します. この数値を a_2 とします.
4. 次々と, この処理を続けて, a_{n+1} と a_n との値が変化しなくなるまで続けます.
ただし, a_n は n 回目に計算される結果です.

1.3

平方根の近似値の計算法を参考にある数 A の n 乗根（その数を n 回かけると A になる数, $\sqrt[n]{A}$）を求める方法を説明しなさい. また, 実際に適当な数値（自由に選んでください）の 3 乗根, 4 乗根, 5 乗根などを計算し, 正しく計算できていることを示すこと

できるだけ, 少ない計算回数で求まる方法を工夫すること.

解説

1.1 この問題は, 二次方程式

$$x^2 - x + 10^{-12} = 0$$

を解く問題ですから, 普通の数学ならそれほど難しくありません. しかし, コンピュータを用いて数値を計算するとなると話は変わってきます. コンピュータの中で数式の値を計算するとき, 普通の数式は成り立ちません. 例えば,

$$\sum_{i=1}^{1000} \frac{1}{i^3} = 1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{27} + \cdots + \frac{1}{10^9}$$

と

$$\sum_{i=1000}^{1} \frac{1}{i^3} = \frac{1}{10^9} + \cdots + \frac{1}{27} + \frac{1}{8} + 1$$

は数学的には等しいのですが, 単純に（単精度で）コンピュータで計算すると, 両者は等しくなりません. これは, コンピュータがデジタルコンピュータで数値を有限桁しか計算に用いることができないことに起因します. 実際のデジタルコンピュータ（普通にコンピュータと呼ばれているもの）の内部では数値は 2 進数もしくは 6 進数で表現されますが, 以下説明では 10 進数（普通の数字）で説明します.

例えば, 10 進数では $1/3 = 0.33333\cdot$ と無限小数になります. もし, コンピュータが小数点以下 5 桁までしか使えないとすると

$$\frac{1}{3} \times 3 = 0.33333 \times 3 = 0.99999$$

となり, 決して 1 とはならないのです. これは小さな差のように見えるかもしれませんが,

$$100000 * (1 - \frac{1}{3} \times 3)$$

を計算したらどうでしょう？数学ではもちろん 0 になるのですが, 小数点以下 5 桁までしか使えないコンピュータ（これは架空の設定です）であれば答は 1 となってしまいます.

n が 1, 2, 3, 4, 5 と変わるとして, $1/3 \times n$ が 0 であれば何かを実行して, それ以外では何もしないというプログラムを作ったとすると, $n = 3$ のときでも $1/3 \times n = 0$ とはならないので, 何も実行しないことになります. 普通の数学で考えたこととは全く違う振る舞いをしてしまうことになります.

また, 1 に $(1/100000)^2$ を $10000000000 = 10^{10}$ 回足すことを考えて見ましょう. 答はもちろん $1 + 10^{10} \times (1/100000)^2 = 2$ となります. $1/100000 = 0.00001 = 0.1 \times 10^{-4}$ はコンピュータの中では 0.10000 と 10 の冪の数 -4 に分解して記憶するので, 小数点以下 5 桁までしか使えないコンピュータであっても正しく記憶できます. $(1/100000)^2$ も 0.1×10^{-9} なので正しく記憶できます. しかし, コンピュータが 1 を記憶した時点で 0.00001 より小さな数字は覚えられなくなるので, このようなコンピュータでは $1 + 0.1 \times 10^{-9} = 1$ となります. したがって, この計算を 10^{10} 回行ったとしても計算結果は 1 になります. これは, コンピュータでは桁違いに大きさの異なる数値の足し算をしてはいけないということがわかります. 実際, $0.1 \times 10^{-9} + 0.1 \times 10^{-9}$ はちゃんと 0.2×10^{-9} のように計算できます. このせいで, 和の順序によって答が違ってくるということが起こるのです.

では, 引き算を考えて見ましょう. $1/(1 - 0.999999)$ の計算結果はどうなるでしょうか？数学的には 1000000 になりますが, 小数点以下 5 桁までしか使えないコンピュータだと, 0.999999 を記憶した時点でコンピュータの内部では最終桁を四捨五入して（切捨てにする場合もあります）1.00000 と記憶される. すると, $1 - 0.999999 = 0.00000$ となり, 割り算した時点で発散して計算が止まってしまいます. コンピュータの数値計算では非常に近い数値の引き算は禁物なのです.

このように，コンピュータで数値計算をするときには，普通とは違う取り扱いが必要です．そのために数値計算法という学問があります．自分でプログラムを作ってコンピュータシミュレーションを行う場合には数値計算法を習熟しておく必要があります．

この問題は数値計算法の最も簡単な例題の一つです．

2 次方程式

$$ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$$

の解は解の公式を用いれば

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

で与えられます．

$a = 1$, $b = -1$, $c = 10^{-12}$ として，この公式の値を計算すればいいようなものですが，この分子に現れる $-b = 1$ で，c が非常に小さいため $\sqrt{b^2 - 4ac}$ も非常に 1 に近い値になります．したがって，両者の足し算を計算するには問題ないが，引き算の場合には先ほど説明したように問題があります．$c = 10^{-12}$ は普通の電卓で問題が出るような値にしてあります．

ではどうすればいいでしょうか．この方程式の答が α(ギリシャ文字，アルファーと読む)，β（ギリシャ文字，ベーターと読む）とすると，

$$x^2 - x + 10^{-12} = (x - \alpha)(x - \beta) = x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$$

とかけます．これから，$\alpha + \beta = 1$, $\alpha\beta = 10^{-12}$ と言う関係を得ます．（これは，解と係数の関係というもので高校 1 年の数学 I で習います）解の公式を用いて

$$\alpha = \frac{1 + \sqrt{1 - 4 \times 10^{-12}}}{2} \sim 1$$

を求めて，もう一方の解は

$$\beta = 10^{-12}/\alpha \sim 10^{-12}$$

と求めます．

1.2

問題で説明したある数 A の平方根（2 乗すると A になる数，$\sqrt{A}$）の求め方は i 番回目に求まった値を a_i とすると式で

$$a_{i+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{A}{a_i} + a_i\right)$$

と書けます．この計算を繰り返していけば，つまり，i を大きくしていったとき，ある一定の値になるとすると，$a_{i+1} \sim a_i$ と考えられる．その値を a とすると，

$$a = \frac{1}{2}\left(\frac{A}{a} + a\right)$$

を満たします．したがって，

$$\begin{aligned} 2a^2 &= A + a^2 \\ a^2 &= A \end{aligned}$$

となるので, a は A の平方根となっていることがわかります. したがって, 説明の計算を繰り返し求めた a_i は次第に A の平方根に近づいていきます.

この式で 17 の平方根を $a_0 = 4$ として計算すると

1 回目　4.2

2 回目　4.123809523809523

3 回目　4.123105685692291

4 回目　4.1231056256176615

5 回目　4.123105625617661

6 回目　4.123105625617661

となる. 3 回計算すれば既に小数点以下 7 桁まで収束していることがわかります

1.3

上の計算から, 右辺の A の分母を掃ったときに, 左辺と右辺の第 2 項が A に比例するものになっていることがわかります. したがって, ある数 A の n 乗根（その数を n 回かけると A になる数, $\sqrt[n]{A}$）を求める時には, $0 < p < 1$ として

$$a_{i+1} = p\frac{A}{a_i^{n-1}} + (1-p)a_i$$

を計算すればよいことになります.

平方根の場合と同様に

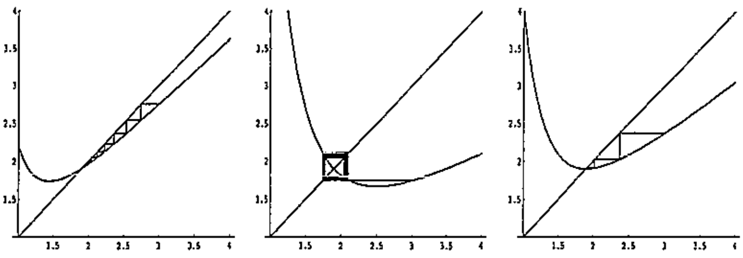
$$\begin{aligned} a &= p\frac{A}{a^{n-1}} + (1-p)a \\ a^n &= pA + (1-p)a^n \\ pa^n &= pA \\ a^n &= A \end{aligned}$$

と p の値に関わらず a は A の n 乗根になっていることがわかります.

したがって, p がどんな値であっても上の漸化式を繰り返し計算すれば A の n 乗根が求まります. では, 最も早く収束するのはどのようなときでしょうか.

その答を出す前にこの計算の繰り返しがどのように答に近づいていくのか見てみましょう. この計算をグラフ的に再現するには以下のようにします. まず, $y = pA/x^n + x$, $y = x$ のグラフを書く（解はこの 2 つのグラフの交点である）. 適当な x の値を決めます. これが a_0 です. そのときの $y = pA/x^n + x$ 値を求めます (要するに, その x の位置から y 軸に並行に直線を延ばし, $y = pA/x^n + x$ との交点を求める.). その曲線上の点から x 軸に並行に直線を延ばし, $y = x$ との交点を求める. この点から y 軸に並行に直線を延ばし, x 軸との交点を求めます. この x の値が a_1 です. この作業を繰り返します.

$n = 4$, $p = 1/10$, $A = 13$ のときのようすを図 1 (a) に示す. $y = pA/x^n + x$, $y = x$ の間を階段状にジグザグしながら交点に収束していくことがわかります. 他方, $n = 4$, $p = 1/2$, $A = 13$ のときのようすを図 1(b) に示します. 答の周りをグルグル回りながら収束していくことが分かる. また, $n = 4$, $p = 1/4$, $A = 13$ のときのようすは図 1(c) のようです. 他の p の値についても同じ計算を行ったが, $p = 1/4$ の時が最も早く収束しています. これは $n = 4$ なので $p = 1/n$ となっているからです.



(a)　　(b)　　(c)

図 1: 収束の様子

なぜ $p = 1/n$ のときに最も早く収束するかを考えて見ましょう．図 1(c) を見ると分かるように $y = pA/x^{(}n-1)+(1-p)x$ の最小値の点（傾きが 0 になっている点）で $y = x$ と交わっています．このとき，交点付近の傾きが 0 になっているから速やかに交点に収束しやすのです．$y = pA/x^{(}n-1)+(1-p)x$ の最小値の点（傾きが 0 になっている点）を求めると（高校 3 年の範囲）

$$x = (A(n-1)p/(1-p))^{(}1/n)$$

のとき最小値

$$(A(n-1)p/(1-p))^{(}1/n) * (n(1-p)/(n-1))$$

になります．この点が $y = x$ 上の点ですから

$$n(1-p)/(n-1) = 1$$

を得ます．したがって，$p = 1/n$ となります．これより，$p = 1/n$ のとき最も速やかに収束すると考えられます．

講評

どちらの問題もどちらも途方にくれたようで，残念ながら十分考察できた回答は少なかった．中学生の中には 10^{-12} の意味が分からなかった，また，解の公式も習ってない人も居たようで申し訳なく思います（来年参加して分からないことがあればとりあえず質問してください）．また，解と係数の関係を用いるのは中学生には厳しかったかもしれません．

さて，1.1 についてはさすが高校生数名が正解にたどり着いていました．1.2 の平方根は正確に実行できていた人が数名いました．この手の問題は書いてあることを正確に理解して，その通りに忠実に実行することがポイントです．プログラミングではこのようなことが重要になります．n 乗根についてはほとんど手が出なかったようですが，1，2 名いい発想にたどり着いていました．

このような問題は分かってみれば比較的分かりやすいのではないかと思います．ポイントは問題で実行することを冷静に理解することです．

2　課題2

課題

図2(a) に示すように川に N 本の橋が架かっているとします．もし，N 本の橋がどれも確率 p で通れないとするとき，$p \leq 1 - \frac{1}{N}$ であれば平均的に見てどれか1本の橋は通れて，川を渡ることができます．しかし，$p > 1 - \frac{1}{N}$ の時には平均的には渡れない可能性があります．このことは以下のように説明できます．

橋の数 N と，平均的に橋を通れない確率 p との積 $N \times p$ は通れない橋の数の期待値 (平均的に通れそうにない橋の数) を表します．したがって，$p \leq 1 - \frac{1}{N}$ であれば，

$$N \times p \leq N - 1$$

より，通れない橋の期待値は $(N-1)$ 以下になり，少なくとも1つ通れそうな橋があることがわかります．したがって，橋を通って側を渡れることになります．

同様に，$p > 1 - \frac{1}{N}$ の場合，通れない橋の数の期待値は

$$N \times p > N - 1$$

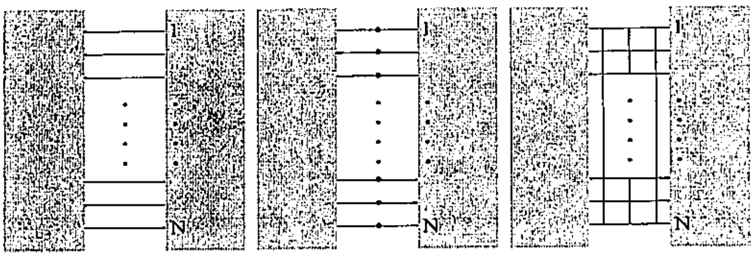
となり N が整数であることから，$N \times p \geq N$ となり，通れない橋が N あることになり，その結果，通れる橋がまったくないことになります．

もし，図2(b) のように N 箇所の橋がそれぞれ2つの橋で構成されていると，橋の数は全部で $2N$ になります．この $2N$ 本の橋がそれぞれ確率 p で渡れないとすると，どこか一箇所が渡れると期待できるためには $p \leq 1 - \frac{1}{\sqrt{N}}$ でなければなりません．

では，図2(c) に示すように橋が碁盤の目のようになっている場合，それぞれの橋が渡れない確率が p のとき，少なくとも1つの経路を通って川を渡れるためには確率 p どのような条件を満たせばいいのか考察してください．特に，碁盤の目の縦横の数によりどのように変わるのか，小さなものから考えていきましょう．

また，橋が碁盤の目のようではなく，三角形の格子になっている場合はどうか？

方眼紙，三角グラフ用紙を用意しているので必要ならば用いて考察してください．



(a)　(b)　(c)

図 2: 橋の配置

解説

この問題を読んだときにはクイズかパズルのように感じたかもしれません．しかし，この問題の背景にはパーコレーションという深遠な物理学が潜んでいます．パーコレーションとはもの同士が確率的につながるかつながらないかが決まる場合にどのようにつながった塊（クラスター）ができるかを考える学問です．有限の大きさの系でクラスターが端から端まで広がっているとき，このクラスターが系をパーコレートするといいます．なぜパーコレーションを考えないといけないのか？それは，考えている対象がパーコレートしているかしていないかによって性質（振る舞い）が全く異なるからです．

筒に粒々（繊維でも砂粒でも挽いたコーヒー豆の粉でもいい）をつめる場合を考えよう．この場合は粒々の隙間がパーコレートしているかどうかを考えます．3次元になるのでややこしいですが，現象は簡単です．パーコレートしていれば，上から液体を流し込んだときに下から流れ出てくるし，そうでなければ流れ出てきません．

今回の問題の橋を金属線で考えてみてください．それが電気回路だとすれば，その回路に電気が流れるかどうかということになるのです．超伝導という現象は物質内を電気抵抗が0で電気が流れます．しかし，超伝導が壊れかかると，超伝導を示さない部分が島状に現れてきます．その存在が電気抵抗の元になるのですが，この島がパーコレートしてしまうと超伝導電流が流れなくなります．逆に，超伝導状態の部分がパーコレートすれば超伝導電流が通れる経路を通って流れます．

これと同様なことがインターネットでも起こります．どこかのネットワークに障害が発生したときに別の迂回経路を通って目的地に到達できるかどうかが問題になります．これもパーコレーションの問題です．もちろん，ネットワークは十分パーコレートするように作られていないと通信が途絶えることになってしまいます．

また，森林火災もよく例に取り上げられます．木と木の間を火が燃え移る確率を考えて，燃え移る部分がパーコレートすると火事は盛り全体に広がる．逆にパーコレートしていなければ全体に広がることはありません．

化学反応が全体に広がり起こるか，部分的に起こるのかを考える場合にもパーコレーションの考え方が必要になります．

さて，このパーコレーションですが，通常，計算の便宜上格子状に規則正しく並んだものを考えます．しかし，並び方には，2次元（平面内）では正方形を並べた正方格子，正三角形を並べた三角格子，蜂の巣のように六角形が並んだ蜂の巣格子，3次元では立方体を並べた立方格子などいろいろあります．また，囲碁やオセロのように格子点の上にものを並べて，同じものがどれだけ隣り合って並んでいるかを考える場合（これをサイト過程といいます）と今回の問題のように格子点と格子点の間のつながりを考える場合（これをボンド過程といいます）の2種類があります．格子の形だけでなく，どちらの過程かによっても振る舞いが変わります．

2次元，3次元のもの（かなり大きなものを考えます）ではつながっている（もしくは，ものがあるかないか）の確率がある程度値以上になればパーコレートするし，それ以下なら決してパーコレートしないという現象が起こります．これを相転移といいます．相転移は物理的には磁石が磁性を持っているか持っていないか，物質の三体（固体，液体，気体）の移り変わりの変化などと同じものです．この相転移

を起こす確率をパーコレーション閾値（もしくは単に閾値）といいます．この値は格子の形状，ボンド過程かサイト過程かが決まれば表のように決まった値になります．

表

格子	サイト	ボンド
正方	0.5927462	0.5
三角	0.5	0.34729
蜂の巣	0.697043	0.65271
単純立方	0.311608	0.248813

この表の確率はつながっている場合の確率に閾値で，この問題ではつながっていない場合の確率を p としているので注意してください．

さて，具体的にこの問題をどう解くかですが，正方形が 2 個並んだ程度の場合なら手で計算できるかもしれません．ただ，この場合も全くつながっていない場合を考える方が得策です．それでもかなりの場合の数があるので大変です．しかし，少し大きくなると直ぐに手に負えなくなります．ではどうするか？

コンピュータを使ったシミュレーションでも同じですが，実際にやってみるのです．要するに，つながっているかどうかの判断はぱっと見に分かるので，実際に，すべての橋に対してある確率で（サイコロでも振って）橋が通れるかどうかを決めていきます．全部が決まったら，通り抜けられるかどうかを考えます．これは一つのサンプルなので，同じ確率での計算を何回も繰り返します．回数が増えるほど計算精度が高まります．たくさんのサンプルが集まったら，平均を計算したり統計処理をします．このような計算方法をサイコロを振ってギャンブルのようなので有名なカジノのあるモナコ公国の首都モンテカルロにちなんでモンテカルロ法（MC 法）と言います．

講評

確率的に起こる現象については慣れてなかったかもしれません．さすがに難しかったようで，手をつけている人，グループはほとんどありませんでした．考えていた人，グループはある特定の場合に正しい考察ができていたようです．

ややこしい場合には発想を転換して，数学の問題でも実験してみるのも一つの手です．

3　課題3

課題

良く飛ぶブーメランを作るにはどうすればよいか考えてください．ブーメランにはいろいろな形のものがあります．3枚羽のブーメランのキットが用意してあります．このキットを使って考えてください．

解説

この課題には答えがあるようでありません．つまり，一般論を作ることがなかなか難しい問題です．まず，よく飛ぶブーメランとはなにかを，自分で定義してそれに付いて論考する必要があります．

- まっすぐ飛ぶ．
- 距離が出る．
- しっかり戻ってくる．

が基本的な条件だと思います．．

理の問題は座標軸を取って解析します．ここで，考える物理量は，角運動量(回転の速さ)，揚力（浮き上がる力），モーメント（動きやすさの指針）です．

以下の解析は，理想化してブーメランの羽の配置が対称で，重心が羽の交わる中心にある場合を考えます．ブーメランの揚力は羽に垂直に働くこととします．また，n 枚羽ブーメランの羽一枚は長さを l，質量を M/n とします．$\delta = M/nl$ とおきます．

さて，重力の方向を z 軸の負の方向，最初にブーメランが飛び出す方向を y 軸の負の方向，最初にブーメランが飛び出す時の回転軸の方向を x 軸の正の方向に取ります．

瞬間的にブーメランが速さ V で直進しているとします．揚力は羽の長い辺に直角で羽の面にそった気流の速度成分によって発生します．中心から距離 r のところに発生する揚力が，近似的に気流の速さの2乗に比例すると考えることができます．その比例定数を c とします．

n 枚羽の回転面に垂直に働く力の総量の大きさは

$$F = ncl\left(\frac{\omega^2 l^2}{3} + \frac{V^2}{2}\right)$$

となります．羽の配置の対称性が崩れると，その影響に拠る力の成分が増え，しかも揚力の方向が変わります次に，ブーメランのモーメントは

$$N = \frac{n}{3} c\omega V l^3$$

となり，その方向は y 軸の方向になります．さらに，ブーメランの角運動量は

$$L = \frac{1}{3} M l^2$$

となり，回転軸の方向つまり x 軸の方向を向いています．

モーメントと角運動量の比例定数

$$I = \frac{1}{3}Ml^2$$

は慣性モーメントと呼ばれ，飛びはじめたブーメランの安定性（飛びやすさ）をあらわす量になります．

y 軸方向の力があることから，ブーメランは回転軸の周りに首振り運動をはじめます．これを軸の歳差運動と呼びます．この歳差運動がブーメランが投げたところに戻ってくる仕掛けになります．コマが首振り運動をはじめると，一点にとどまらず移動するのもこの歳差運動の影響です．

歳差運動の回転角速度は N/L なので，

$$\omega_p = \frac{ncVl}{M}$$

と成ります．

半径 R でブーメランの重心が円運動をすると考えればブーメランが戻ってくることを，理想的な数理モデルとして表すことができます．円を描くためには軌道運動の角速度 ω_o と歳差の角速度 ω_p とが釣り合っている必要があります．したがって，

$$\omega_o = \frac{V}{R} = \omega_p$$

となり，

$$R = \frac{M}{nlc} = \frac{\delta}{c}$$

となります．ブーメランを投げ出す速さが同じであれば，長く飛ぶブーメランを作るためには密度の大きな材質でつくる必要があることがわかります．したがって，重りを均等につけることが一つの解決策です．

さて，揚力と遠心力がつりあっていることから，

$$V = \sqrt{2/3}\omega l$$

となり，理想的な円運動では，ブーメランの回転速度と前進速度とが関係があることがわかります．

講評

以上の解析は，対称性のあるブーメランに関して成り立つ結果です．そこで，対称性，慣性モーメント，重さに注目した解答を評価しました．みなさん，楽しんで解答していました．理論的には，対称性があり，モーメントが大きく，更に揚力があればよく飛ぶブーメランになります．この点を，明確に述べてある解答を評価しました．まなさん，このような点に関して気づいていたようです．しかし，順序立てて記述してある答案は多くありませんでした．

形の対称性から導かれる性質は，実験をしなくとも解明できます．しかし，実際のブーメランや航空機を作る場合には，実験が必要となります．そこで，扇風機で風を起こして実験をしてグループを評価しました．

4　課題 4

課題

数が碁盤の目の上に並んだ表を行列といいます．特に，数が 0 か 1 かのどちらかである行列を 2 値行列といいます．下に行列の例と，2 値行列の例を示します

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 7 \\ 8 & 9 & -4 & 8 \\ 20 & 5 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

さて，以下では 2 値行列，つまり，0 と 1 とが碁盤の目の上に並んでいる場合を考えます．

行列の，水平の数の並びを行，垂直の列の並びを列と呼びます．

2 値行列の列の順を左から数えて，行の順を上から数えて 1 行目，2 行目，3 行目，4 行目，5 行目の 1 の個数は，2, 1, 2, 3, 1，です．また 1 列目，2 列目，3 列目，4 列目の 1 の個数は，3, 2, 2, 2，です．このような数を，それぞれ 2 値行列の，行和，列和と呼びます．行列が与えられれば，行和，列和を計算することが出来ることは明らかです．

では逆に，2 値行列の行和，列和が与えられたときに，つまり，各行，各列の 1 の個数が与えられた場合に逆に 2 値行列を決めることができるでしょうか．つまり，0 と 1 との位置を完全に決めることができるでしょうか．

出来ないなら，なぜ出来なくなるのか．出来るのなら，どんなときにどうしたら元の行列を決めることが出来るのか考えてください．

ここでは，行列の列や行の数は有限の個数に限ることにします．小さな大きさの行列から例を作って試してみてください．

解説

白黒二つの要素から成る画像を 2 値画像といいます．普通，白黒写真といいわれているものは白黒の 2 値ではなく，最小値から最大値までたとえば 256 階調で表現された濃淡値画像と呼ばれます．計算機の中では，画像は格子点の上で濃淡値を持つデジタル画像として表現され処理されます．

さて，この問題は，2 値画像の行に関する和と列に関する和だけから，元の 2 値画像を復元できるかを考える問題です．濃淡画像に対するこの問題は CT スキャナや MRI スキャナに応用されています．ここで考える問題は，画像の値が白黒 2 値で，しかもその値が格子点だけ考える問題です．この問題は離散ト

モグラフィーと呼ばれます. 実際に, 格子点だけで値を持つものとして結晶があります. 離散トモグラフィーは, ナノテクの分野で結晶構造の欠陥を調べることに利用されます. この分野では, 電子顕微鏡のステージの上に載せた検査対象をいくつかの方向から当てた電子光による写真をX線写真のように扱って結晶構造を復元します. しかし, 医用のCTスキャナと異なり透過光を計測できる方向は少数です.

問題の答えは, 2方向からの和だけでは復元できるものとできないものがあります. 一意に復元できるクラスは

1. 単調性もち,
2. スイッチを含まない,

ものです. 以下に, に単調性とスイッチとを説明します. スイッチを発見しているかどうかを評価の対象にしました. 単調性に関する解答はありませんでした.

スイッチは

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

に示すような 2×2 配置です. すぐわかるように, この配置は, 行と列の和だけからでは区別できません. 従って, スイッチを含む分布は行と列との和だけからは一意に復元できません.

さて, 次に以下のような 2×2, 3×3, 3×4 の配置を考えると一意に復元できることがわかります.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

行列 $A = ((a_{ij}))$ $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$, $a_{ij} \in \{0,1\}$ に対して

$$\begin{aligned} r_i &= \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \\ s_j &= \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \end{aligned}$$

とおきます

$$r_1 \ge r_2 \ge \cdots \ge r_m, \quad s_1 \ge s_2 \ge \cdots \ge s_n$$

が成り立っていると, 行列を列と行の和から一意に復元できます. この性質を単調と呼びます. ただし

$$r_i \le n, \ s_j \le m, \ \sum_{i=1}^{m} r_i = \sum_{j=1}^{m} s_j$$

が成り立っていないと問題そのものが成立しません. 行や列を並べ替えて単調な和が構成できるとき, 元の行列が復元できることがわかります. 以上より, 復元できる配置と復元できない配置とがあることがわかります.

講評

例の配置にはスイッチが含まれています. ヒントとして入れたのですが, 気づいていた参加者は少なかったように思います.

2×2 のスイッチを明示的に示している解答を評価しました. 3×3 のスイッチを示した解答もありましたが 2×2 が本質的です. 2×2 のスイッチから大きなスイッチを組織的に構成できます. また, 3 次元の問題でスイッチを構成することもできます. 3 次元のスイッチに関しては最近ドイツ人の博士論文 (2003 年提出) で解決されました.

参加者の復元法に関する詳細な考察は不十分でした.

ここで取り上げた問題は, 逆問題と呼ばれます. 逆問題では, 答えが一意に求まらない場合があります. つまり, スイッチがあると答えが一意に決まりません.

離散 CT とロジックパズル (nonogram) とはよく似ています. ロジックパズルは通常, 推論規則によって解決することができます. しかし, 最近オランダ人の大学院生が, ロジックパズルも離散 CT と同じように代数的に解けることを示しました.

入学試験などの数学の問題には通常正解があります. ただし, 正解にたどり着く方法はいくつかあります. しかし, もっと進んだ数学の問題では,

> 問題に答えがあるのか, 有るのならばその答えは一つなのか. また, 答えが何のであれば, なぜないのか, 問題の設定のどこを変えると答えがある問題に変わるのか. さらに, 答えを見つける方法が実現でこいるのか. 実現できるのであれば, 現実的な時間で計算できるのか. また, コンピュータで答えを見つけることができるのか. 本当の答えが見つけづらいときには, 本当の答えに近い答えを見つけることができるのか. . . . .

など, 正解を導くのだけではないことを, さまざま考えることになります.