令和元年度

千葉大学先進科学プログラム入学者選考課題

課題論述　　課題 II-A, II-B

解答例

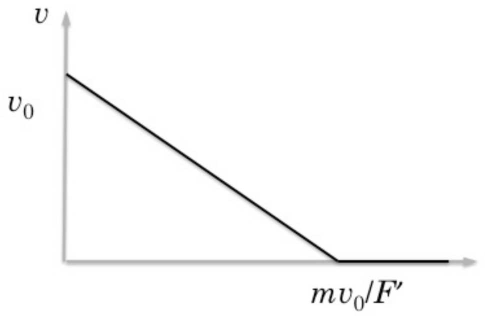
[II-A] 解答例

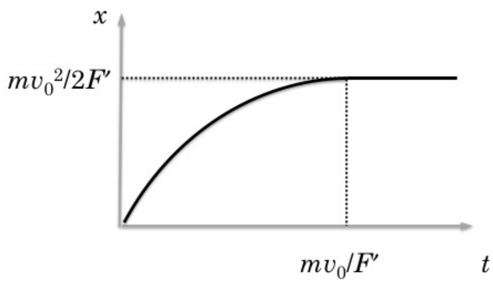
出題意図 摩擦係数や反発係数を、物体の運動から測定する問題。摩擦や衝突によるエネルギーの損失を正しく理解しているかと、測定結果から物理量を導く力があるかを試す問題。

問 1 等加速度運動なので、次の結果が得られる。

$$v = \begin{cases} v_0 - \dfrac{F't}{m} & \left(0 \leqq t \leqq \dfrac{mv_0}{F'}\right) \\ 0 & \left(t > \dfrac{mv_0}{F'}\right) \end{cases} \tag{1}$$

$$x = \begin{cases} v_0 t - \dfrac{F't^2}{2m} & \left(0 \leqq t \leqq \dfrac{mv_0}{F'}\right) \\ \dfrac{mv_0^2}{2F'} & \left(t > \dfrac{mv_0}{F'}\right) \end{cases} \tag{2}$$





問 2 運動量保存則

$$mv_{\mathrm{A}} = mv'_{\mathrm{A}} + mv'_{\mathrm{B}} \tag{3}$$

と反発係数の定義

$$e = \frac{v'_{\mathrm{B}} - v'_{\mathrm{A}}}{v_{\mathrm{A}}} \tag{4}$$

より

$$v'_{\mathrm{A}} = \frac{1-e}{2} v_{\mathrm{A}} \tag{5}$$

$$v'_{\mathrm{B}} = \frac{1+e}{2} v_{\mathrm{A}} \tag{6}$$

が得られる。

問 3 問 1 の結果を用いると

$$\ell_{\mathrm{A}} = \frac{m\left(v'_{\mathrm{A}}\right)^2}{2F'} \tag{7}$$

$$\ell_{\mathrm{B}} = \frac{m\left(v'_{\mathrm{B}}\right)^2}{2F'} \tag{8}$$

が得られる。

問 4 問 2 の答えを問 3 の答えに代入すると

$$\frac{\ell_A}{\ell_B} = \left(\frac{1-e}{1+e}\right)^2 \tag{9}$$

が得られる。これを e について解くと，

$$e = \frac{1-\sqrt{\ell_A/\ell_B}}{1+\sqrt{\ell_A/\ell_B}} \tag{10}$$

が得られる。この右辺は ℓ_A と ℓ_B が与えられれば計算できるので、題意を満たす式が得られた。

問 5

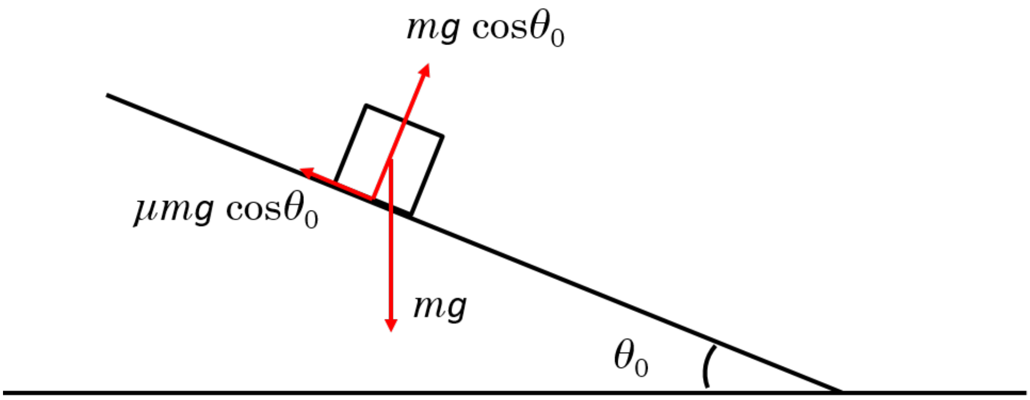
$$F = mg\sin\theta_0 \tag{11}$$

垂直抗力 N は

$$N = mg\cos\theta \tag{12}$$

なので，$\theta = \theta_0$ での力の釣り合いより

$$\mu = \frac{F}{N} = \tan\theta_0 \tag{13}$$



(立方体には鉛直下向きの重力のほか，坂の斜面に平行な摩擦力がかかっている。)

問 6 エネルギー保存則を用いると，坂の端まで来たときの速度 v_1 は

$$\frac{mv_1^2}{2} = mgh \tag{14}$$

と表すことができる。この結果を用いると

$$v_1 = \sqrt{2gh} \tag{15}$$

が得られる。

問 7 前問の結果を使うと

$$\ell = \frac{mgh}{F'} \tag{16}$$

が得られる。これを逆に解くと，

$$F' = \frac{mgh}{\ell} = \frac{h}{\ell}N \tag{17}$$

従って動摩擦係数は $\mu' = h/\ell$ と求められる。

問 8 前問の設定で色々な高さの場合について，止まるまでの距離を測定し，$\ell \propto h$ が比例するかどうか確かめる。坂の端での運動エネルギーは mgh と表される。距離が $\Delta\ell$ だけ動く間に摩擦が負の仕事は

$$\Delta W = -F'\Delta\ell \tag{18}$$

となるので，摩擦力が一定であれば静止するまでの距離は

$$\ell = \frac{mgh}{F'} \propto h \tag{19}$$

となる。もし速度が速いときに摩擦力が弱いとすると，ℓ/h は一定とならず，h が大きいほど大きくなる。

[II-B] 解答例

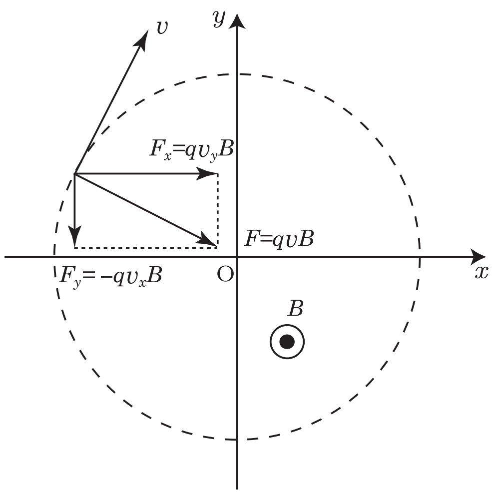
出題意図 電界と磁界の両方が存在する場合の荷電粒子の運動を考える問題。適当な慣性系で考えると、あたかも磁場だけが存在する場合と同じく円運動することに気づけば解ける。電界と磁界による荷電粒子の運動を理解しているかを試す問題。

問 1 荷電粒子は，x 方向には v で等速度運動するが，y 方向に等加速度運動し，その時の加速度は $\frac{qE}{m}$ である。x 方向に ℓ 進む時間は，$t=\frac{\ell}{v}$ であることから，求める距離は

$$\begin{aligned}\mathrm{PR} &= \frac{1}{2}\ \frac{qE}{m}\ \left(\frac{\ell}{v}\right)^2 \\ &= \frac{qE\ell^2}{2mv^2}\end{aligned}$$

問 2 (1) 下図参照。なお，粒子にかかる力はローレンツ力，すなわち $F=qvB$ であり，速度と直交していることから，(F_x, F_y) 式で表すと

$$\begin{aligned}F_x &= qv_yB \\ F_y &= -qv_xB\end{aligned}$$



(2) 両荷電粒子とも，同一磁界中を同じ速度で運動することから，これらの回転半径は同じである。回転半径を r とすると，

$$m\frac{v^2}{r} = qvB \Longleftrightarrow r = \frac{mv}{qB}$$

磁束密度 B の向きが $+z$ 方向であることから，回転の向きは $+z$ 方向から見て時計回りである。荷電粒子 M は，初速度が $+x$ 方向であることから，y 座標が負の領域で回転し，その回転の中心は，$(0,-r)=(0,-\frac{mv}{qB})$ である。荷電粒子

N は，逆に初速度が $-x$ 方向であることから，y 座標が正の領域で回転し，その回転の中心は，$(0,r)=(0,\frac{mv}{qB})$ である。また、回転の角速度を ω とすると，$v=r\omega$ より，

$$\omega=\frac{v}{r}=\frac{qB}{m}$$

であることから、回転周期を T とすると，

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\frac{m}{qB}$$

と求められる。これは M，N 両方の荷電粒子とも同じ値である。

問 3 (1) 粒子にはたらく力はローレンツ力と電界による力であるので，問 2-(1) で求めた F_y に電界による力が加わり，

$$\begin{aligned} F_x &= qv_yB \\ F_y &= qE-qv_xB \end{aligned}$$

となる。

(2) この時，電界による力 qE と磁束密度によるローレンツ力の y 成分 qv_dB が釣り合っていることから，

$$qE=qv_dB \Leftrightarrow v_d=\frac{E}{B}$$

問題文にて説明している $(v_d,0)$ で動く観測者から見ると電界が消えて見えるのは，以下の式変形による。

$$\begin{aligned} F_x = qv_yB &\qquad\Longleftrightarrow\qquad F'_x = qv'_yB \\ F_y = qE-qv_xB &\qquad\Longleftrightarrow\qquad F'_y = qE-q(v'_x+v_d)B=-qv'_xB \end{aligned}$$

となり，F'_x，F'_y は問 2-(1) で得られた F_x，F_y と同じ形になる。

(3) 上で導出したとおり，磁界と電界の両方が存在するときの荷電粒子の運動は，x 方向の等速運動と等速円運動の合成運動である。また，問 2-(2) で導出したように，回転運動の角速度は初速に依存しない。したがって，円運動では，すべての粒子が同じ時刻に元の位置に戻る。このことから，すべての粒子は x 方向に一周期の時間分移動した位置を通過する。荷電粒子の回転周期は

$$T=2\pi\frac{m}{qB}$$

なので、求める位置は

$$v_d \times T = \frac{E}{B} \times 2\pi \frac{m}{qB} = \frac{2\pi mE}{qB^2}$$

となる。

(4) 粒子の運動は x 方向へ v_d で移動する等速直線運動とローレンツ力による等速円運動の合成であるが，円運動の初速度は，粒子の入射速度と v_d との差で決まる。

(a) $v = \frac{1}{2}v_d$ について
回転運動の初速度は，

$$\frac{1}{2}v_d - v_d = -\frac{1}{2}v_d$$

より，$-x$ 方向に $\frac{1}{2}v_d$ となる。したがって，粒子は y 座標が正となる領域で回転運動する。直線 OP から最も離れた時の距離は，回転半径 r の 2 倍であることから，

$$2r = 2\frac{m\frac{1}{2}v_d}{qB} = \frac{m}{qB}\frac{E}{B} = \frac{mE}{qB^2}$$

であるので，求める y 座標は，

$$\frac{mE}{qB^2}$$

となる。

(b) $v = 2v_d$ について
回転運動の初速度は，

$$2v_d - v_d = v_d$$

より，$+x$ 方向に v_d となる。したがって，粒子は y 座標が負となる領域で回転運動する。直線 OP から最も離れた時の距離は，回転半径 r の 2 倍であることから，

$$2r = 2\frac{mv_d}{qB} = \frac{2m}{qB}\frac{E}{B} = \frac{2mE}{qB^2}$$

であるので，求める y 座標は，

$$-\frac{2mE}{qB^2}$$

となる。