令和元年度

千葉大学先進科学プログラム入学者選考課題

課題論述　　課題 I-C

解答例

解答例 [I-C]

問 1　(1) $|3x+4|=5$

$|3x+4|=5$ の解は $3x+4=\pm 5$ より

$3x=-4\pm 5$

$x=-3, \dfrac{1}{3}$　　　　$\cdots\cdots$(答)

(2) $2\log_x(6-x)=1$

まず，真数と底に関する条件から，$6-x>0$，$x>0$，$x\neq 1$

これらをまとめて

$$0<x<6 \text{ かつ } x\neq 1 \tag{1}$$

$$2\log_x(6-x)=1$$

を変形すると

$$\log_x(6-x)^2=\log_x x$$

$$(6-x)^2=x$$

$$x^2-13x+36=0$$

これを解いて

$$x=4,9$$

このうち (1) の条件を満たすものをえらび

$x=4$　　　　$\cdots\cdots$(答)

問 2　α,β を解にもつ 2 次方程式は，$(x-\alpha)(x-\beta)=0$，

すなわち $x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$

ここで解の和： $\alpha+\beta=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}+\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}=2\left(\dfrac{-1}{2}\right)=-1$

ここで解の積： $\alpha\beta=\left(\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)\left(\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right)=\left(\dfrac{(-1)^2-(\sqrt{3}i)^2}{4}\right)=1$

よって求める方程式は

$$x^2+x+1=0 \qquad \cdots\cdots(答)$$

(より一般に $k(x^2+x+1)=0$，k は 0 でない定数。と答えても可)

問 3

$xy=1$　であり，

$$x+y=\frac{(1+\sqrt{2})^2+(1-\sqrt{2})^2}{(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})}=\frac{2\left\{1^2+(\sqrt{2})^2\right\}}{1^2-(\sqrt{2})^2}=-6$$　であるので，

求める式を xy，$x+y$ で表すと，

$$\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}=\frac{(x+y)(x^2-xy+y^2)}{x^2+y^2}=\frac{(x+y)\left\{(x+y)^2-3xy\right\}}{(x+y)^2-2xy}$$

これに $x+y=-6$，$xy=1$ を代入して，

$$\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}=-\frac{99}{17} \qquad \cdots\cdots(答)$$

問 4　与えられた直線の方程式を $\dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y+3}{3}=\dfrac{z+4}{4}=t$ とおいて，直線を媒介変数表示すると

$x=2t-2$，$y=3t-3$，$z=4t-4$ $\qquad \cdots\cdots(1)$

これを $x+y+z=9$ に代入して

$9t-9=9$

$t=2$

これを (1) に代入して，$(x,y,z)=(2,3,4)$ $\qquad \cdots\cdots$(答)

問 5　(1)　この食品が検査で異物が混入されていないと判定される確率

求める確率は，異物が混入していない食品を正しく判定する確率と，異物が混入している食品を間違って判定する確率であり，互いに排反であることから，それぞれの和であるので，

$$\frac{100-1}{100}\times\frac{100-10}{100}+\frac{1}{100}\times\frac{20}{100}=\frac{8910}{10000}+\frac{20}{10000}=\frac{893}{1000} \qquad \cdots\cdots(答)$$

(2) 異物が混入していないと判定された食品に，実際には異物が混入している確率

求める確率は，条件付き確率であり，異物が混入している食品を間違って判定する確率を，この食品が検査で異物が混入されていないと判定される確率で割ったものであるので，

$$\frac{20}{10000} \div \frac{893}{1000} = \frac{2}{893} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

問 6 正の奇数を 1 から小さい順に並べた数列は，初項 1，公差 2 の等差数列をなしているので，最初の n 項の和は $\frac{1}{2} \cdot n\{2 \cdot 1 + 2(n-1)\} = n^2$ ……(証明終)

問 7 (1) $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$

$f(x) = x^{-1}e^x$

したがって， $f'(x) = (-1)x^{-2} \cdot e^x + x^{-1} \cdot e^x = \dfrac{e^x(x-1)}{x^2}$ ……(答)

(2) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$

$f(x) = u^{-\frac{1}{2}}$，$u = 1-x$ とし

$f'(x) = -\dfrac{1}{2}u^{-\frac{3}{2}} \cdot (-1) = \dfrac{1}{2(\sqrt{1-x})^3}$ ……(答)

問 8 (1) $f(x) = e^{ax+b}$

$f'(x) = e^{ax+b} \cdot (ax+b)' = ae^{ax+b}$

$f''(x) = ae^{ax+b} \cdot (ax+b)' = a^2e^{ax+b}$

$f'''(x) = a^2e^{ax+b} \cdot (ax+b)' = a^3e^{ax+b}$

したがって，x で一回微分することは a 倍することなので，

$$f^{(n)}(x) = a^n e^{ax+b} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

(2) $f(x) = \sin x$

$f'(x) = \cos x$，$f''(x) = -\sin x$，$f'''(x) = -\cos x$，$f^{(4)}(x) = \sin x$,

$f^{(5)}(x) = \cos x, \cdots\cdots$

$$
f^{(n)}(x) = \begin{cases} \cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2}) & (n = 4m + 1) \\ -\sin x = \sin(x + \frac{2\pi}{2}) & (n = 4m + 2) \\ -\cos x = \sin(x + \frac{3\pi}{2}) & (n = 4m + 3) \\ \sin x = \sin(x + \frac{4\pi}{2}) & (n = 4m) \end{cases}
$$

(ただし，$m = 0, 1, 2, \cdots\cdots$)

したがって，x で 1 回微分するのは，偏角 $\dfrac{\pi}{2}$ を加えることなので，
n について分類しない形で書くと，

$$
f^{(n)}(x) = \sin(x + \frac{n\pi}{2}) \qquad \cdots\cdots(答)
$$

問 9 $\dfrac{x^2}{8} + \dfrac{y^2}{2} = 1$ において，両辺を x で微分すると

$\dfrac{2x}{8} + \dfrac{2y}{2} \cdot y' = 0$

したがって，$y \neq 0$ のとき

$y' = -\dfrac{x}{4y}$

ゆえに，この楕円上の点 (2, 1) における接線の傾きは $-\dfrac{1}{2}$

したがって，求める接線の方程式は，$y = -\dfrac{1}{2}x + 2$ $\cdots\cdots$(答)

問 10 点 O を通って軸に垂直な平面を平面 α とする。平面 α 上で，円柱の直径となる直交する線分をそれぞれ線分 AC と線分 BD とし，点 B，及び点 C から軸と平行に伸ばした線が円柱の上面と交わる点をそれぞれ点 E，及び点 F とする。ここで，円柱を三角形 ACE を含む平面 β で切断したときに円柱の側面にあらわれる線上の任意の点を点 P とし，円柱を三角形 BDF を含む平面 γ で切断したときに円柱の側面にあらわれる線上の任意の点を点 Q とする（図 3 には点 P，点 Q，及び平面 γ を省略)。以下の問いに答えなさい。

(1) 点 P から平面 α へ下ろした垂線の足を点 R とし，点 R から線分 AC への垂線 RS を引く

$\angle\mathrm{PSR} = \dfrac{\pi}{4}$ なので，$\mathrm{RP} = \mathrm{SR}\tan\dfrac{\pi}{4} = \mathrm{SR}$ である。

さらに，$\angle\mathrm{AOR} = \theta$ とおくと，$\mathrm{OR} = 1$ なので，

$\mathrm{SR} = \mathrm{OR}\sin\theta = \sin\theta$，となる。

ここで円柱の側面を図 4 のように点 A から展開して，点Aを原点とし，点 A から点Bの方向を x 軸，直交する直線を y 軸とすると，点 P の座標 (x, y) は，

$x =$ 円弧 $\mathrm{AR} = \mathrm{OR}\,\theta = \theta$,

$y = \mathrm{RP} = \mathrm{SR} = \sin\theta = \sin x$ で表される。

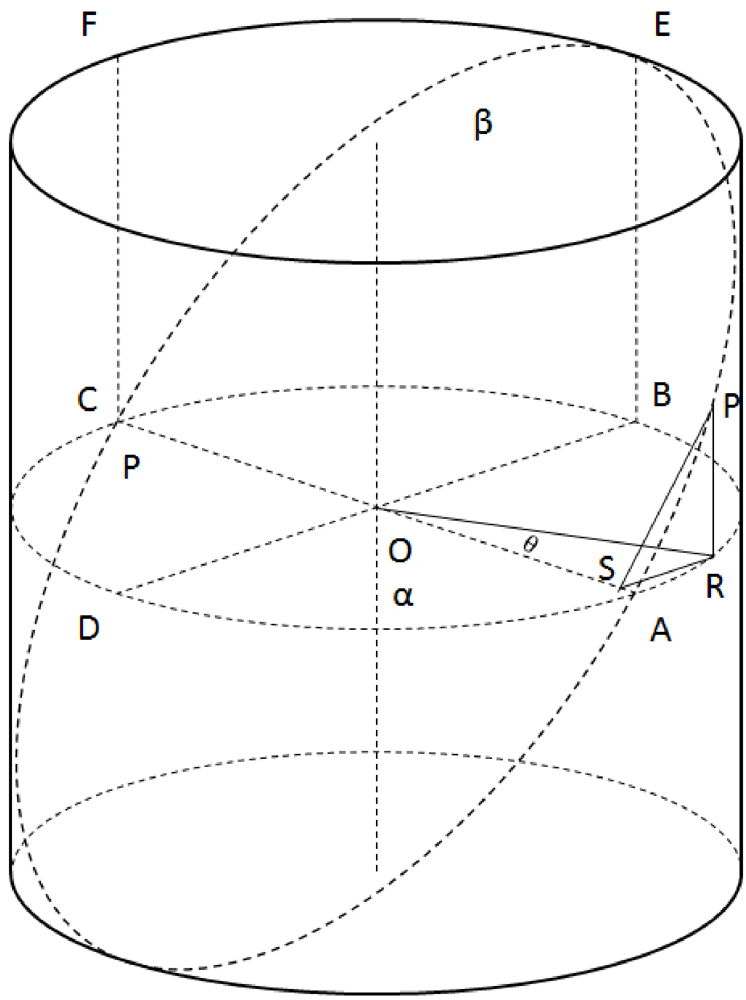

図 3: 半径が 1 で高さが 2 の円柱

したがって，点 P の軌跡は，点 A，点 E，点 C を通る正弦曲線となり，点 A を原点とすると，$y = \sin x$ で表される。

同様に，点 Q の軌跡は，点 B，点 F，点 D を通る正弦曲線となり，点 A を原点とすると，$y = -\cos x$ で表される。

図 4 上に書くと以下のようになる。

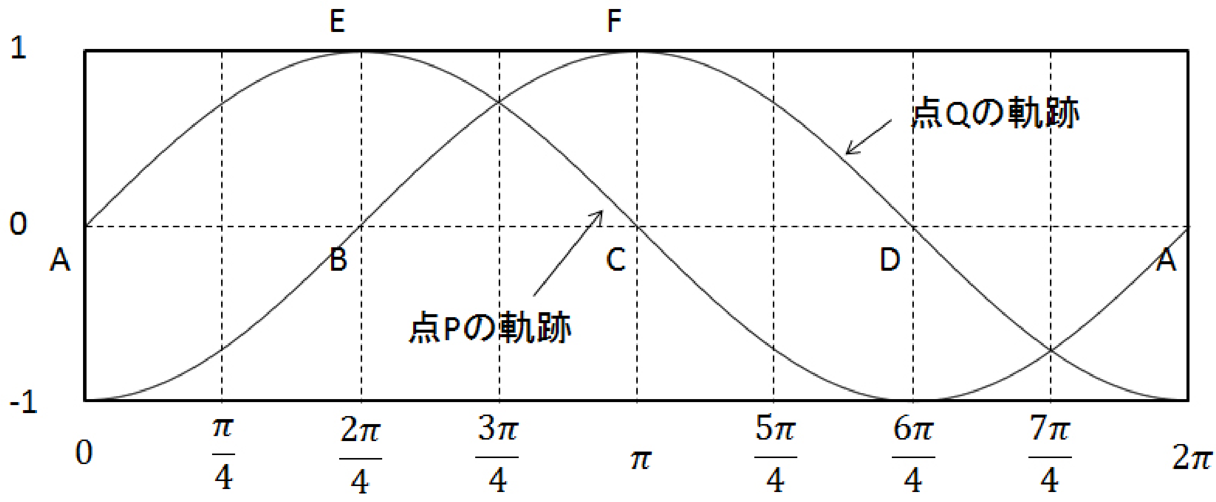

図 4: 円柱の側面の展開図

(2) (1) より求める面積は，$0 \leqq x \leqq 2\pi$ において，

2 曲線，$y = \sin x$ と $y = -\cos x$ で囲まれた図形である。

2 曲線の交点の x 座標は，方程式 $\sin x = -\cos x$ の解であり，

$0 \leqq x \leqq 2\pi$ の範囲で解くと，

$x = \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$

また，区間 $\frac{3\pi}{4} \leqq x \leqq \frac{7\pi}{4}$ で，

$-\cos x \geqq \sin x$ である。

ゆえに，求める面積 S は

$$S = \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}} (-\cos x - \sin x)dx = [-\sin x + \cos x]_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}} = 2\sqrt{2} \qquad \cdots\cdots(答)$$