平成 31 年度

千葉大学先進科学プログラム入学者選考課題

課題論述

数学

解答例

# 解答例：数学

**問 1**　関数を含む基本的な方程式が解けることを確認する問題

(1) $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x-1)(x-2)(x-3) = 0$ より，

$x = 1, 2, 3$ が得られる。

(2) $\sin 3x + \sin x = 4\sin x - 4\sin^3 x = 4\sin x(1 - \sin^2 x) = 4\sin x \cos^2 x$

$\sin x = 0, \cos x = 0$ より，$0 \leqq x < 2\pi$ の範囲（定義域）では，

$x = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ が解となる。

別解：$\sin 3x + \sin x = 2\sin\frac{3x+x}{2}\cos\frac{3x-x}{2} = 2\sin 2x \cos x$ を用いてもよい。

(3) $\log_3(x^2 + 2x - 3) + \log_{\frac{1}{3}}(x-1) = 2$

$\log_3(x^2 + 2x - 3) - \log_3(x-1) = 2$

$\log_3(x+3) = 2$

$x + 3 = 9$

よって，$x = 6$ を得る。

**問 2**　放物線と直線の交点と囲まれた領域の面積，合成関数の微分の計算を問う問題

(1) $x^2 - 2ax - 1 = 0$

よって求める $x$ 座標は $x = a \pm \sqrt{a^2+1}\ \ (\equiv \alpha, \beta)$

(2) $S = \int_\alpha^\beta \{(2ax+1) - x^2\}\,dx = \left[ax^2 + x - \frac{x^3}{3}\right]_\alpha^\beta = \frac{4}{3}(\sqrt{a^2+1})^3$

$(\alpha + \beta = 2a, \alpha - \beta = -2\sqrt{a^2+1}, \alpha\beta = -1)$

別解：$t = x - a$ と変数変換。$\gamma = \sqrt{a^2+1}$ とおく。

$S = \int_{-\gamma}^{\gamma}(-t^2 + a^2 + 1)dt = \left[-\frac{1}{3}t^3 + (a^2+1)t\right]_{-\gamma}^{\gamma} = -\frac{1}{3}\left\{\gamma^3 - (-\gamma)^3\right\} + \gamma^2\left(\gamma - (-\gamma)\right)$
$= \frac{4}{3}\gamma^3 = \frac{4}{3}(\sqrt{a^2+1})^3$

(3) $S' = \frac{4}{3}\cdot 3(a^2+1)(\sqrt{a^2+1})' = 4(a^2+1)\cdot\frac{1}{2}(a^2+1)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2a = 4a\sqrt{a^2+1}$ を得る。

**問 3** ベクトルを用いた基本的な計算を試す問題

点 C(1,3,10) の空間ベクトルを $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$，求める座標の空間ベクトルを $\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ とするとき，

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}} = s\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}s+2t\\s+t\\t\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{CD}} = \begin{pmatrix} s+2t-1 \\ s+t-3 \\ t-10 \end{pmatrix}$$

$\overrightarrow{\mathrm{CD}} \perp \overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{CD}} \perp \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ なので，

$\begin{pmatrix} s+2t-1 \\ s+t-3 \\ t-10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$ ， $\begin{pmatrix} s+2t-1 \\ s+t-3 \\ t-10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$ より，$s = -7, t = 6$

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}} = \begin{pmatrix} s+2t \\ s+t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

これより求める座標は，(5, -1, 6)

**問 4** 数列の一般項を求める基本的問題

$a_{n+1} - 5 = 3(a_n - 5)$

$a_1 - 5 = 2$

初項 2，公比 3 の等比数列。

$a_n - 5 = 2 \cdot 3^{n-1}$

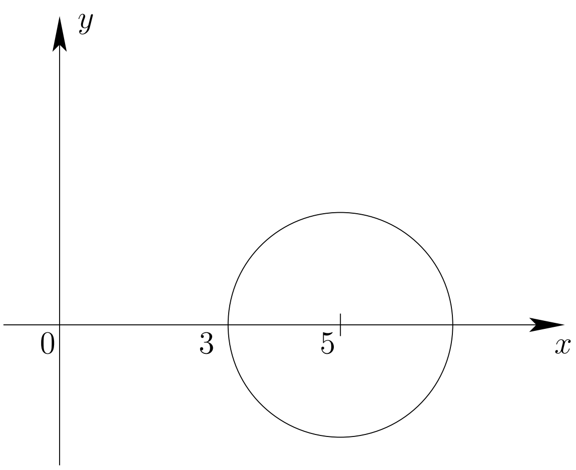
よって，数列の一般項は $a_n = 2 \cdot 3^{n-1} + 5$ と表される。

**問 5** アポロニウスの円を扱う基礎的な問題

$(x-1)^2 + y^2 = 4\{(x-4)^2 + y^2\}$

$(x-5)^2 + y^2 = 4$（点 P の満たす方程式）

中心 (5, 0)，半径 2 の円。軌跡は下図参照。



**問 6** 複素数の基本的性質を問う問題

$(\sqrt{3}+i)^{10} = 2^{10}\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^{10} = 2^{10}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)^{10}$

$= 2^{10}\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$ と表されるので，それぞれ以下の値を得る。

絶対値：1024，偏角：$\frac{5\pi}{3}$，実部：512，虚部：$-512\sqrt{3}$

**問 7** 積分方程式について理解しているかを問う問題

定積分は定数となるから $\int_0^\pi f(t)\sin t\ dt = a$ とおくと，$f(x) = x + a$ となる。よって，

$\int_0^\pi f(t)\sin t\ dt = \int_0^\pi (t+a)\sin t\ dt$

$= [(t+a)(-\cos t)]_0^\pi - \int_0^\pi (t+a)'(-\cos t)\ dt$

$= \pi + 2a + [\sin t]_0^\pi = \pi + 2a$

ゆえに，$\pi + 2a = a$ より，$a = -\pi$

従って，$f(x) = x - \pi$ を得る。