平成 31 年度

千葉大学先進科学プログラム入学者選考課題

課題論述

課題Ⅱ

解答例

$\boxed{\textbf{II}}$

出題意図

電磁気，力学，振動，気体分子運動の複合問題。
問 1，問 2 : 電荷に働く力と単振動についての理解を問う基本問題。
問 3 : 電場が変化する時刻前後の運動方程式の解を接続させる問題。この時刻における位置と速度が一致するという条件を定式化することを通して数理的な能力を確認した。
問 4 : 電場の向きが周期的に反転する場合の電荷の運動を問い，単振動の周期と電場の変化の周期が一致する場合の共鳴現象について考察させた。
問 5，問 6 : 小球と気体分子の衝突を通した気体の加熱について問う問題。数値を用いた計算力についても確認した。

解答例

問 1　小球の運動方程式は

$$ma_y = qE(t) - k(y - \ell_0)$$

である。

問 2　(1) 問 1 で求めた方程式は，電場 $E(t) = E_0$ が一定の時，

$$ma_y = -k\left[y - (\ell_0 + \frac{qE_0}{k})\right]$$

と書くことができる。この運動方程式は，

$$y_{\mathrm{E}} = \ell_0 + \frac{qE_0}{k}$$

の高さで力がつりあうことを示している。

(2) 前問 (1) の $y = y_E$ を基準とした新しい座標 $z = y - y_{\mathrm{E}}$ を用いて運動方程式を書きなおすと，

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = -kz$$

となる。この運動方程式は単振動の方程式と同じである。単振動の角振動数は $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$，周期は $T_{\mathrm{Q}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ である。

(3) 単振動の振幅を A_0，初期位相を θ とすると

$$z = A_0 \sin(\omega t + \theta)$$

と書くことができる。したがって

$$y = \ell_0 + \frac{qE_0}{k} + A_0 \sin(\omega t + \theta)$$

$$v_y = A_0\omega \cos(\omega t + \theta)$$

である。$t=0$ で $y=\ell_0$，$v_y=0$ を代入すると

$$\ell_0+\frac{qE_0}{k}+A_0\sin\theta=\ell_0 \tag{1}$$

$$A_0\omega\cos\theta=0 \tag{2}$$

が得られる。(2) 式を満たす θ は $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ または $\theta=\dfrac{3\pi}{2}$ である。
（1）式より

$$\frac{qE_0}{k}+A_0\sin\theta=0$$

が得られる。$A_0>0$ だから $\sin\theta<0$。したがって $\theta=\dfrac{3\pi}{2}$，$A_0=\dfrac{qE_0}{k}$。
以上より，

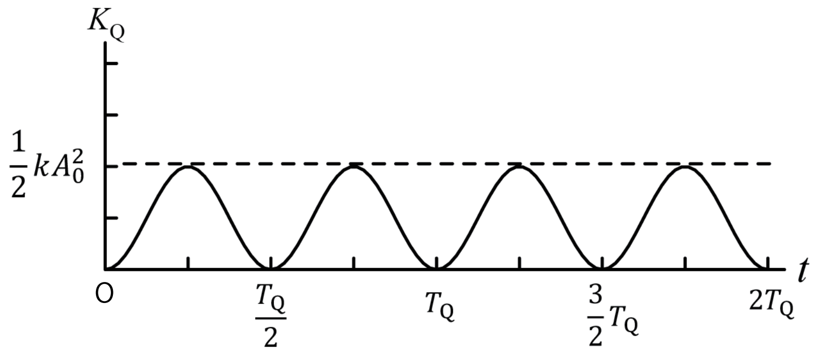
$$y=\ell_0+\frac{qE_0}{k}(1-\cos\omega t) \tag{3}$$

$$v_y=\frac{qE_0}{k}\omega\sin\omega t$$

(4) $v_y=A_0\omega\sin\omega t$ より，小球の運動エネルギー K_{Q} は

$$K_{\mathrm{Q}}=\frac{1}{2}mv_y^2=\frac{1}{2}kA_0^2\sin^2\omega t$$

である。K_{Q} の時間変化のグラフは以下のようになる。



運動エネルギーが最大となる時刻は $\omega t=\dfrac{\pi}{2}+n\pi$，すなわち $t=\dfrac{T_{\mathrm{Q}}}{4}+\dfrac{nT_{\mathrm{Q}}}{2}$ である。運動エネルギーの最大値は $\dfrac{1}{2}kA_0^2$。

(5) 小球の運動エネルギーの時間平均は $\overline{\sin^2\omega t}=\dfrac{1-\overline{\cos 2\omega t}}{2}=\dfrac{1}{2}$ より次式のようになる。

$$\overline{K}_{\mathrm{Q}}=\frac{1}{4}kA_0^2 \tag{4}$$

問３　この問いでは時刻 $t = t_1$ $(0 < t_1 \leqq T_{\mathrm{Q}})$ に電場の向きが逆転して $t \geqq t_1$ では $E(t) = -E_0$ に保たれる場合を扱っている。

(1) 時刻 $t \geqq t_1$ における運動方程式　$m\dfrac{d^2y}{dt^2} = -qE_0 - k(y - \ell_0)$ より $t \geqq t_1$ における小球のつりあいの位置 y'_{E} は $y'_{\mathrm{E}} = \ell_0 - \dfrac{qE_0}{k}$ に変化する。したがって $t \geqq t_1$ における小球の y 座標と速度は単振動の振幅の大きさを A_1，初期位相を θ_1 として

$$y = \ell_0 - \frac{qE_0}{k} + A_1\sin(\omega t + \theta_1) = \ell_0 - A_0 + A_1\sin(\omega t + \theta_1) \tag{5}$$

$$v_y = A_1\omega\cos(\omega t + \theta_1)$$

となる。時刻 $t = t_1$ で，これらが問２ (3) の y，v_y と一致するという条件から

$$\ell_0 + A_0 - A_0\cos\omega t_1 = \ell_0 - A_0 + A_1\sin(\omega t_1 + \theta_1) \tag{6}$$

$$A_0\omega\sin\omega t_1 = A_1\omega\cos(\omega t_1 + \theta_1) \tag{7}$$

したがって

$$A_1\sin(\omega t_1 + \theta_1) = A_0(2 - \cos\omega t_1) \tag{8}$$

$$A_1\cos(\omega t_1 + \theta_1) = A_0\sin\omega t_1 \tag{9}$$

が得られる。二乗して合計をとると次式が得られる。

$$A_1^2 = A_0^2\left[(2 - \cos\omega t_1)^2 + \sin^2\omega t_1\right] = A_0^2(5 - 4\cos\omega t_1) \tag{10}$$

$$A_1 = A_0\sqrt{5 - 4\cos\omega t_1} \tag{11}$$

(2) $t \geqq t_1$ における単振動の振幅 A_1 を最大にするのは $\cos\omega t_1 = -1$，すなわち $t_1 = \dfrac{T_{\mathrm{Q}}}{2}$ のときである。

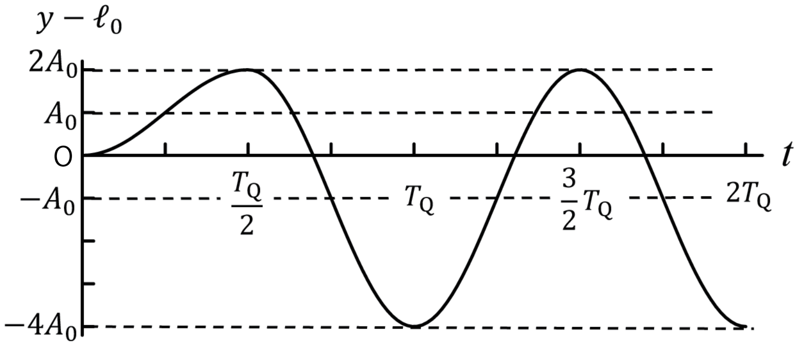
(3) $t_1 = \dfrac{T_{\mathrm{Q}}}{2}$ の場合 $\omega t_1 = \pi$ を (11) 式に代入すると $A_1 = 3A_0$。したがって (8) 式より $\sin(\omega t_1 + \theta_1) = -\sin\theta_1 = 1$，すなわち $\theta_1 = \dfrac{3\pi}{2}$。時刻 $t \geqq t_1$ における小球の y 座標は，これらを (5) 式に代入して

$$y = \ell_0 - A_0 + 3A_0\sin(\omega t + \frac{3\pi}{2}) \tag{12}$$

すなわち

$$y = \ell_0 - A_0 - 3A_0\cos\omega t \tag{13}$$

である。$t_1 = \dfrac{T_{\mathrm{Q}}}{2}$ に選んだ場合の $0 \leqq t \leqq 2T_{\mathrm{Q}}$ における小球の y 座標をたて軸を $y - \ell_0$ とするグラフにあらわすと以下のようになる。



問４　(1) (13) 式より $y_1=\ell_0+2A_0$，$y_2=\ell_0-4A_0$，$A_1=3A_0$。
$t_2 \leqq t \leqq t_3$ において初期位相を θ_2 とすると

$$y=\ell_0+A_0+A_2\sin(\omega t+\theta_2)$$

$$v_y=A_2\omega\cos(\omega t+\theta_2)$$

と書くことができる。$t=t_2$ において $v_y=0$ より $\cos\theta_2=0$。したがって $\theta_2=\frac{\pi}{2}$ または $\theta_2=\frac{3\pi}{2}$。

$$y_2=\ell_0-4A_0=\ell_0+A_0+A_2\sin(2\pi+\theta_2)$$

より $A_2\sin\theta_2=-5A_0<0$。したがって $\theta_2=\frac{3\pi}{2}$。よって $A_2=5A_0$。
$y_3=\ell_0+A_0+5A_0\sin(3\pi+\frac{3\pi}{2})=\ell_0+6A_0$ が得られる。

(2) 初期位相は変化しないことがわかったので，$t_{2n} \leqq t \leqq t_{2n+1}$ において

$$y=\ell_0+A_0-A_{2n}\cos\omega t \tag{14}$$

であり，$t_{2n+1} \leqq t \leqq t_{2n+2}$ において

$$y=\ell_0-A_0-A_{2n+1}\cos\omega t \tag{15}$$

と書くことができる。$t=t_{2n+1}$ で両者が等しいことから

$$y_{2n+1}=\ell_0+A_0-A_{2n}\cos\omega t_{2n+1}=\ell_0-A_0-A_{2n+1}\cos\omega t_{2n+1}$$

が得られる。$\cos\omega t_{2n+1}=-1$ だから $A_{2n+1}=A_{2n}+2A_0$。
同様に，$t=t_{2n+2}$ において

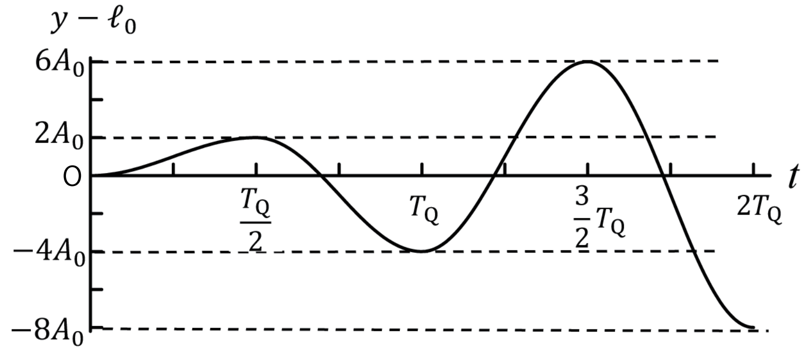
$$y_{2n+2}=\ell_0-A_0-A_{2n+1}\cos\omega t_{2n+2}=\ell_0+A_0-A_{2n+2}\cos\omega t_{2n+2}$$

が成り立つ。$\cos\omega t_{2n+2}=1$ だから $A_{2n+2}=A_{2n+1}+2A_0$。
よって $A_{2n+2}=A_{2n}+4A_0$。

(3) $A_{2(n+1)}=A_{2n}+4A_0$ だから，$A_{2n}=A_0+n\times(4A_0)=(4n+1)A_0$。
別解：電場の反転によってつり合いの位置が $2A_0$ ずつずれるので
$A_n=A_0+2nA_0=(2n+1)A_0$，よって $A_{2n}=(4n+1)A_0$。

(4) $y_{2n} = \ell_0 + A_0 - A_{2n}\cos\omega t_{2n} = \ell_0 + A_0 - (4n+1)A_0 = \ell_0 - 4nA_0$

(5) $0 \leqq t \leqq 2T_{\mathrm{Q}}$ における小球の y 座標の変化のグラフは以下のようになる。



問5　(1) 衝突した直後の小球の速度を v'_y，気体分子の速度の y 成分を u'_y とすると運動量保存則より $mv_y + mu_y = mv'_y + mu'_y$，弾性衝突より $v_y - u_y = u'_y - v'_y$。したがって $v'_y = u_y$，$u'_y = v_y$。

(2) $\frac{1}{2}m\langle u_y^2\rangle = \frac{1}{2}k_{\mathrm{B}}T$ より $\langle u_y^2\rangle = \frac{k_{\mathrm{B}}T}{m}$。

(3) 気体分子と小球 Q の最初の衝突によって気体分子が得る運動エネルギーの平均値 $\langle \Delta K\rangle$ は，衝突前の気体分子の運動エネルギーの平均値 $\langle K\rangle = \frac{1}{2}m\langle u_y^2\rangle = \frac{1}{2}k_{\mathrm{B}}T$，衝突後の気体分子の運動エネルギーの平均値 $\langle K'\rangle = \frac{1}{2}m\langle u_y'^2\rangle = \frac{1}{2}m\langle v_y^2\rangle = \langle K_{\mathrm{Q}}\rangle$ より以下のようになる。

$$\langle \Delta K\rangle = \langle K'\rangle - \langle K\rangle = \langle K_{\mathrm{Q}}\rangle - \frac{1}{2}k_{\mathrm{B}}T$$

(4) $\langle K_{\mathrm{Q}}\rangle$ を真空中での K_{Q} の時間平均で近似すると

$$\langle \Delta K\rangle = \frac{1}{4}k(\frac{qE_0}{k})^2 - \frac{1}{2}k_{\mathrm{B}}T$$

と書ける。$\langle \Delta K\rangle > 0$　のとき

$$(qE_0)^2 > 2kk_{\mathrm{B}}T = 2\times 10^{-4}\times 1.38\times 10^{-23}\times 300 = 8.28\times 10^{-25}$$

したがって E_0 の下限値は次式で与えられる。

$$E_0 > \frac{\sqrt{2kk_{\mathrm{B}}T}}{q} \fallingdotseq \frac{9.1\times 10^{-13}}{1.6\times 10^{-19}} \fallingdotseq 5.7\times 10^6\,\mathrm{V/m}$$

問6　(1) 周期 $T_{\mathrm{Q}} = 2T_{\mathrm{E}}$ で電場が逆転するとき，$A_{2n} = (4n+1)A_0$ より

$$\langle K_{\mathrm{Q}}\rangle = \frac{1}{4}kA_{300}^2 = \frac{1}{4}k(601A_0)^2 = 601^2\times\frac{1}{4}kA_0^2 > \frac{1}{2}k_{\mathrm{B}}T$$

が得られる。したがって E_0 の下限値は以下のようになる。

$$E_0 > \frac{\sqrt{2kk_{\mathrm{B}}T}}{601q} \fallingdotseq \frac{5.7\times 10^6}{601} \fallingdotseq 9.5\times 10^3\,\mathrm{V/m}$$

(2) y 軸負方向に向う気体分子の平均の速さは問題文の近似のもとで

$$\langle u\rangle=\sqrt{\frac{k_{\mathrm{B}}T}{m}}=\sqrt{\frac{1.38\times10^{-23}\times300}{1.6\times10^{-26}}}\fallingdotseq 5.1\times10^{2}\mathrm{m/s}$$

のように求まる。したがって，y 軸負方向に運動する気体分子が単位時間に 1 個の小球と衝突する回数は

$$f=\frac{N}{2}\sigma\langle u\rangle=\frac{1}{2}\times2.0\times10^{25}\times1.0\times10^{-20}\times5.1\times10^{2}=5.1\times10^{7}\mathrm{Hz}$$

である。

(3) $2T_{\mathrm{E}}=T_{\mathrm{Q}}$ に選ぶと加熱効率を高めることができる。

$$T_{\mathrm{Q}}=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}=2\pi\sqrt{\frac{1.6\times10^{-26}}{1.0\times10^{-4}}}\fallingdotseq 7.95\times10^{-11}\mathrm{s}$$

であるから，$T_{\mathrm{E}}=4.0\times10^{-11}\mathrm{s}$ 毎に電場の向きを反転すれば良い。
電場の振動数を f_{E} とすると，$f_{\mathrm{E}}=\dfrac{1}{7.95\times10^{-11}}\fallingdotseq 1.3\times10^{10}\mathrm{Hz}$。
小球は $1/f$ 秒程度で気体分子との衝突によってエネルギーを失うため，小球の運動エネルギーが $\frac{1}{2}k_{\mathrm{B}}T$ 程度になるまでの時間は $1/f$ より短く選ぶべきである。$f=5.1\times10^{7}\mathrm{Hz}$ のとき，$\dfrac{1}{f}\fallingdotseq 2.0\times10^{-8}\mathrm{s}$。問 6 (1) より $E_0=9.5\times10^{3}\mathrm{V/m}$ とすると $t=300T_{\mathrm{E}}\fallingdotseq 1.2\times10^{-8}\mathrm{s}$ で小球の運動エネルギーの平均値が $\frac{1}{2}k_{\mathrm{B}}T$ 以上になる。この時刻は小球が気体分子に最初に衝突するまでの時間 $1/f$ より短いため，小球は気体分子よりも大きな運動エネルギーを持つことができ，気体分子との衝突によって気体を加熱することができる。