平成 31 年度

千葉大学先進科学プログラム入学者選考課題

課題論述

課題 I, II

(9:00–15:00)

注意事項

1. 問題すべてに解答してください。

2. 携帯電話,スマートフォンの電源を必ず切ってください。

[I]

図1のように水平面と半径 R の半円筒が点Bでなめらかに接続した。その上での質量 m の小球の運動について考える。以下の問いに答えなさい。ただし, 重力加速度の大きさを g とし, 摩擦や空気抵抗は考えなくてよく, 運動する小球は十分に小さいとしてその大きさは考えなくてよい。また, 座標や速度を問う問題では, 水平方向には右向きを, 鉛直方向には上向きを正としなさい。

まず, 図1の左図のように, 小球が水平面を速さ v_0 で右向きに進んでいる場合を考える。

問1 小球が点Bを通り, 半円筒に沿って最上点Aに到達した。このときの小球の速さ v_1 を v_0, g, R を用いて表しなさい。

問2 問1のように小球が点Aに到達するためには v_0 がある値よりも大きくなければいけない。その値を g, R を用いて表しなさい。

問3 図1の右図のように, 小球が半円筒の中心軸を通る水平軸より角度 θ だけ上に到達した時, 速さが v_2 であった。このときの水平方向の速度 v_{h} と鉛直方向の速度 v_{v} をそれぞれ v_2, θ を用いて求めなさい。

問4 図1の右図のように, 小球は点Aにたどり着かずに途中で半円筒を離れ, 放物運動を始めた。離れたときの小球の速さ v_2 を v_0, g, R を用いて表しなさい。

問5 問4の放物運動の着地点Cが点Bよりも左側にあるためには, 角度 θ がある値 θ_0 よりも大きくなければいけない。θ_0 を求めなさい。また, $\theta = \theta_0$ となる初速度 v_0 を g, R を用いて表しなさい。

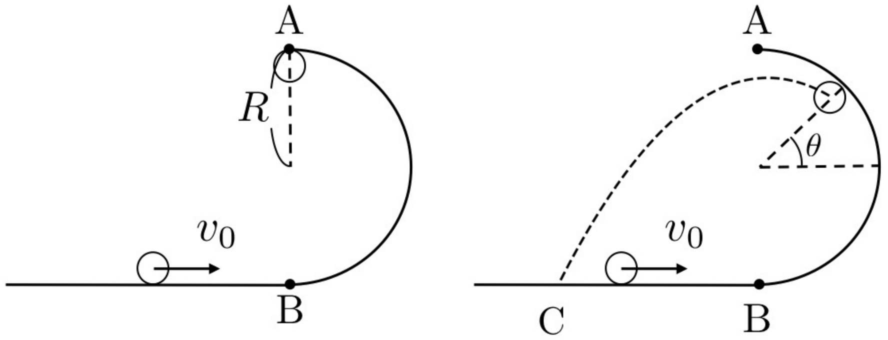


図1

次に, 図2のように加速度 a で左向きに等加速度運動する台車の上に, 水平面と半円筒を固定し, 点Bから左に距離 ℓ の位置に小球を台車と同じ速度を持つように置いた。問6と7では, 台車とともに動く観測者の視点から考える。

問6 点Aに到達するためには, ℓ/R はある値よりも大きくなければいけない。その値を a, g を用いて答えなさい。

問7 加速度 $a=3g$, 距離 $\ell=R$ のとき, 小球は半円筒のある場所で半円筒を離れ, 半円筒に再度衝突した。運動の水平位置左側の極値と着地する座標をそれぞれ R を用いて求めなさい。このとき, 座標の原点は半円筒の中心としなさい。また, 半円筒に衝突するまでの小球の軌跡を解答用紙のグラフに図示しなさい。

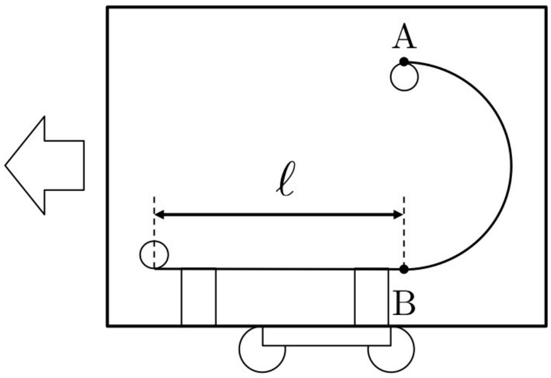


図2

最後に, 図 3 のように, 小球, 水平面と半円筒を台車からおろし, 小球と点 B を自然長 $\sqrt{2}R$ のゴムでつないだ。ゴムの自然長よりも ℓ だけ長くした状況で点 B と小球を水平面上に固定し, そっと離した。図 3 には, その後の運動を時系列順に a, b, c, d と並べてある。ゴムが自然長よりも長さ x だけ長くなっている状態では, 縮む方向に大きさ kx の力が加わるが, 図 3b, c のように自然長よりもゴムが縮んでいる状態では, 弾性力は働かない。

問 8 小球が半円筒に接した状態で水平面から高さ $h(> R)$ に到達したときのゴムの長さを R, h を用いて表しなさい。

問 9 小球が半円筒に接した状態で高さ $h(> R)$ に到達したときの小球の速さ v_3 を m, ℓ, R, h, k を用いて表しなさい。

問 10 小球が半円等に接した状態で水平面から高さ $h(> R)$ に到達するためには ℓ はある値よりも大きくなければいけない。その値を g, R, h, k を用いて表しなさい。

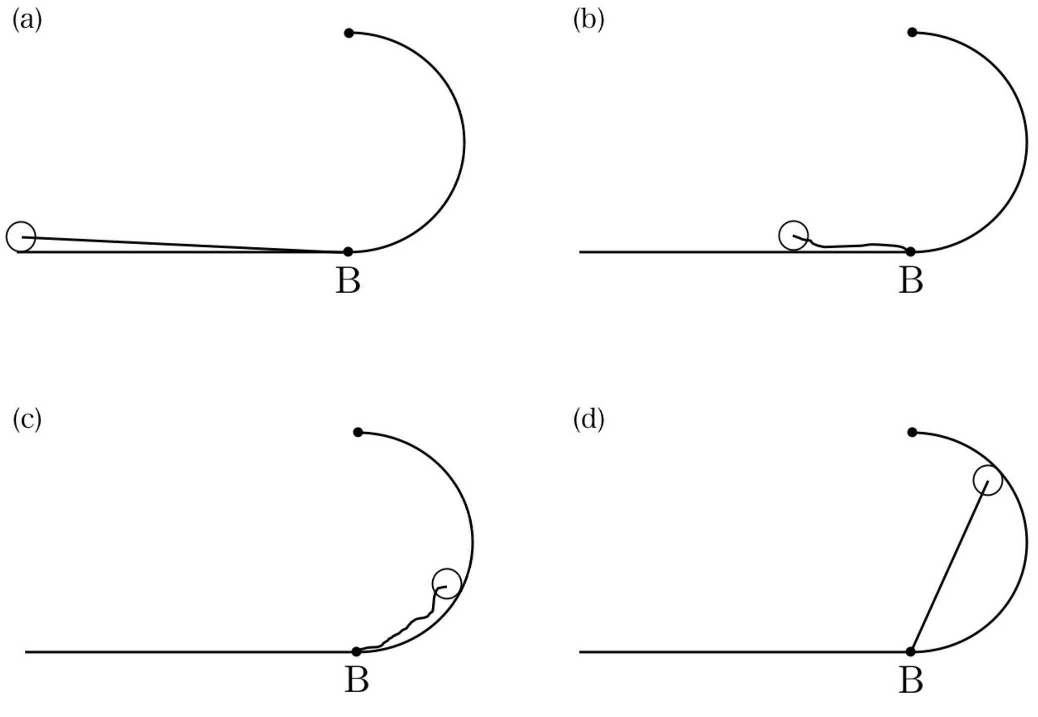


図 3

[II]

電場や磁場を用いると物質を加熱することができる。たとえば，電子レンジは電磁波の一種であるマイクロ波を用いて水を加熱でき，IH 調理器は電磁誘導を用いて金属製の鍋を温めることができる。以下では電場を用いて気体を加熱する方法について考えてみよう。

図 1 のように自然長 ℓ_0，ばね定数 k で質量が無視できる不導体のばねの一端に質量 m，電荷 q ($q > 0$ とする) の小球 Q を取りつけ，ばねの他端 O を動かない不導体壁に固定する。重力は無視し，ばねは折れ曲がらないものとする。点 O から小球 Q の方向を y 軸正方向に選び，点 O を原点とする。時刻 $t = 0$ において，小球 Q は静止しており，ばねの長さは自然長であったとする。y 軸正向きの一様な電場 $E(t)$ を加えたところ，小球は運動をはじめた。電荷を持った小球 Q が運動することによる電磁波の放射は無視できるものとする。

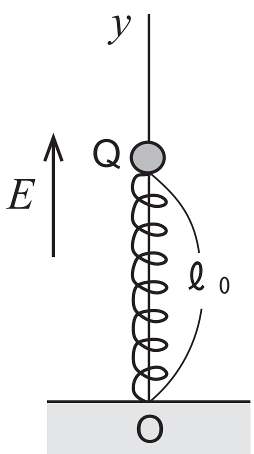


図 1

まず，ばねと小球が真空中にある場合を考える。

問 1　小球の座標を y，速度を v_y，加速度を a_y とする。小球の運動方程式を書きなさい。

問 2　電場の強さが $t < 0$ では 0，$t \geqq 0$ では一定値 E_0 ($E_0 > 0$ とする) の場合，時刻 $t \geqq 0$ において小球は単振動する。以下の問いに答えなさい。

(1) $t \geqq 0$ において，ばねの弾性力と電場から働く力がつりあう高さ y_{E} を求めなさい。

(2) 単振動の角振動数 ω と周期 T_{Q} を求めなさい。

(3) 単振動の振幅 A_0 を求め，時刻 t ($t > 0$) における小球の y 座標と速度 v_y を ℓ_0，q，E_0，k，ω，t を用いてあらわしなさい。

(4) 小球の運動エネルギー K_{Q} を時刻 t の関数としてあらわし，$0 \leqq t \leqq 2T_{\mathrm{Q}}$ における時間変化のおおよその様子を横軸を t，縦軸を K_{Q} としたグラフにあらわし，配布されたグラフ用紙に記入しなさい。式中には単振動の角振動数 ω と振幅 A_0 を用いてよい。運動エネルギーが最大となる時刻と運動エネルギーの最大値をグラフ中に記入すること。

(5) 小球の運動エネルギーの時間平均

$$\overline{K}_{\mathrm{Q}} = \frac{1}{T_{\mathrm{Q}}}\int_0^{T_{\mathrm{Q}}} K_{\mathrm{Q}}(t)dt$$

を求めなさい。

問３ 次に，時刻 $t = t_1$ $(0 < t_1 \leqq T_{\mathrm{Q}})$ に電場の向きが逆転して $0 \leqq t < t_1$ では $E(t) = E_0$，$t \geqq t_1$ では $E(t) = -E_0$ に保たれる場合を考える。

(1) 時刻 $t \geqq t_1$ における小球の単振動の振幅の大きさを A_1，初期位相を θ_1 とする。時刻 $t = t_1$ での y 座標と速度 v_y が問２ (3) で求めたものと一致するという条件から A_1 を ω，t_1，A_0 を用いてあらわしなさい。

(2) (1) で求めた振幅の大きさ A_1 を最大にするには t_1 をどのように選べば良いか。この t_1 の値を求め，T_{Q} を用いてあらわしなさい。

(3) t_1 を (2) のように選んだ場合について時刻 $t \geqq t_1$ における小球の y 座標を ℓ_0，A_0，ω，t を用いて式であらわしなさい。次に，$0 \leqq t \leqq 2T_{\mathrm{Q}}$ における小球の y 座標を横軸を t，縦軸を $y - \ell_0$ としたグラフにあらわし，配布されたグラフ用紙に記入しなさい。y 座標が極大，極小になる時刻とその時の $y - \ell_0$ の値をグラフ中に記入すること。

問４ 図２のように大きさ E_0 の電場の向きが $t > 0$ において時間間隔 T_{E} ごとに逆転するとする。$2T_{\mathrm{E}} = T_{\mathrm{Q}}$ の場合について以下の問いに答えなさい。なお，n を 0 または正の整数として $t = t_n = nT_{\mathrm{E}}$ における小球の y 座標を y_n，$t_n \leqq t \leqq t_{n+1}$ における単振動の振幅の大きさを A_n とする。

(1) y_1，y_2，y_3，A_1，A_2 を求めなさい。

(2) A_{2n} と A_{2n+2} の関係を求めなさい。

(3) A_{2n} を n，A_0 を用いてあらわしなさい。

(4) y_{2n} を ℓ_0，n，A_0 を用いてあらわしなさい。

(5) $0 \leqq t \leqq 2T_{\mathrm{Q}}$ における小球の y 座標の変化を横軸を t，縦軸を $y - \ell_0$ としたグラフにあらわし，配布されたグラフ用紙に記入しなさい。y が極大，極小になる時刻とその時の $y - \ell_0$ の値をグラフ中に記入すること。

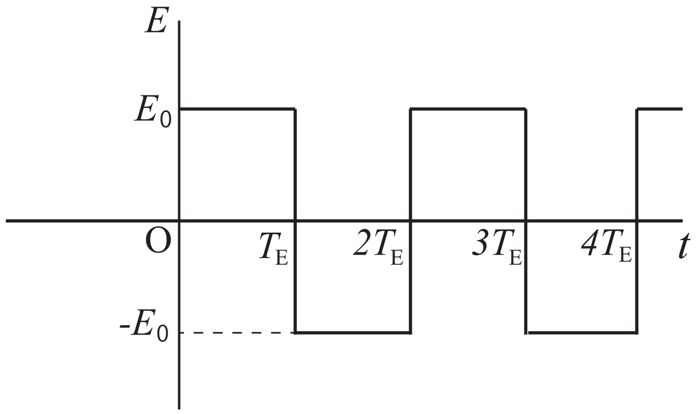


図２

以下では電荷を帯びていない単原子分子の理想気体中に図１の小球がある場合を考える。

問５　小球は気体分子との衝突によってエネルギーを得たり失ったりする。扱いを簡単にするため，気体分子１個の質量も m とし，気体分子は小球との衝突によって y 軸に沿う方向のみの力積を受けるものとする。気体分子と気体分子，気体分子とばねとの衝突は考えない。また，重力の効果は無視する。加えた y 方向の一様な電場は $t<0$ では $E(t)=0$，$t \geqq 0$ では y 軸正向きで一定 $E(t)=E_0$ とする。気体分子と小球の衝突が弾性衝突の場合について，以下の問いに答えなさい。時刻 $t>0$ における小球と気体分子の最初の衝突までの時間は小球の振動周期にくらべて十分に長いとする。

(1) 気体分子と衝突する直前の小球Ｑの速度を v_y，気体分子の速度の y 成分を u_y とするとき，衝突直後の小球の速度 v_y' と気体分子の速度の y 成分 u_y' を求めなさい。

(2) 絶対温度 T の単原子分子理想気体の分子１個あたりの y 方向の運動エネルギーの平均値は，ボルツマン定数を k_B として $\dfrac{1}{2}k_\mathrm{B}T$ であらわすことができる。多数の粒子についての u_y^2 の平均値 $\langle u_y^2 \rangle$ を m，k_B，T を用いてあらわしなさい。

(3) 小球が気体分子とはじめて衝突する直前の気体分子の運動エネルギーを K，衝突直後の気体分子の運動エネルギーを K' とする。気体分子と小球Ｑの最初の衝突によって気体分子が得る運動エネルギーの平均値 $\langle \Delta K \rangle = \langle K' \rangle - \langle K \rangle$ を衝突直前の小球Ｑの運動エネルギーの平均値 $\langle K_\mathrm{Q} \rangle$ と k_B，T を用いてあらわしなさい。

(4) $\langle K_\mathrm{Q} \rangle$ を問２ (5) で求めた真空中での K_Q の時間平均で近似する。このとき $\langle \Delta K \rangle$ を k, q, E_0, k_B, T を用いてあらわしなさい。ばね定数が $k = 1.0 \times 10^{-4}$ N/m,

$T = 300$ K，$q = 1.6 \times 10^{-19}$ C のとき，$\langle \Delta K \rangle > 0$ となるための E_0 の下限値を有効数字 2 桁で求めなさい。ボルツマン定数は $k_\mathrm{B} = 1.38 \times 10^{-23}$ J/K とする。

問 6　次に，$t \geqq 0$ で加えた電場 $E(t)$ を図 2 のように変化させる場合を考える。

(1) $2T_\mathrm{E} = T_\mathrm{Q}$ の場合について時刻 $t = 300T_\mathrm{E}$ で $\langle \Delta K \rangle > 0$ となるための E_0 の下限値を有効数字 2 桁で求めなさい。

(2) 単位体積あたりの気体分子の個数を N，小球の断面積を σ とするとき，y 軸負方向に向かう気体分子が単位時間に小球と衝突する回数 f は y 軸負方向に向かう気体分子の u_y の平均 $\langle u \rangle$ を用いて $f = \dfrac{N}{2}\sigma \langle u \rangle$ で近似することができる。$\langle u \rangle = \sqrt{\langle u_y^2 \rangle}$ と近似して $N = 2.0 \times 10^{25}\ \mathrm{m^{-3}}$，$\sigma = 1.0 \times 10^{-20}\ \mathrm{m^2}$，$m = 1.6 \times 10^{-26}$ kg，$T = 300$ K の場合の f を有効数字 2 桁で求めなさい。

(3) 小球 Q との衝突によって運動エネルギーが増加した気体分子は他の気体分子との衝突によってこの運動エネルギーを受け渡し，気体全体が加熱される。気体を封入した容器の底面に図 1 のような振動子を多数配置することにより，加熱率を高めることができる。気体の加熱効率を高めるためには電場 $E(t)$ をどのように変化させれば良いか，考察しなさい。

電磁波は電場と磁場の変化が伝わる波であり，電場の向きと大きさが時間とともに変化する。したがって，電磁波を用いて荷電粒子を振動させ，気体を加熱することができる。水分子の場合，上記のメカニズムによる加熱効率が最も高くなるのは赤外線を照射した場合であり，電子レンジで用いられているマイクロ波ではあまり加熱できない。そこで，正負の電荷の偏りを持つ分子の回転が利用されている。

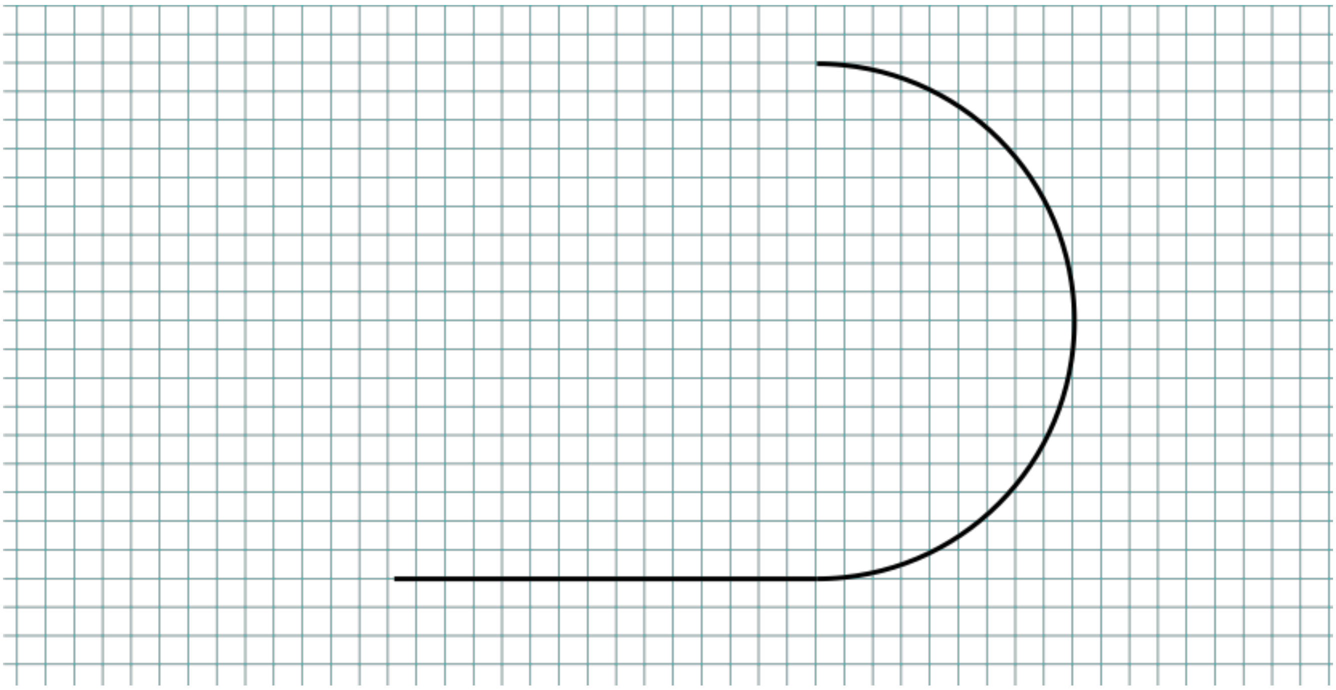
先進科学プログラム解答用紙

受験番号　ＣＳＦ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

氏　　名　＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

課　題	

No＿＿＿／＿＿＿



※補足
この「先進科学プログラム解答用紙」は課題Ｉ用の解答用紙で，実際の入試で使用したものです。問題を解く際の参考にしてください。