平成30年度

千葉大学先進科学プログラム入学者選考課題

課題論述

課題I, II

(9:00-15:00)

注意事項

1. 問題すべてに解答してください。
2. 携帯電話，スマートフォンの電源を必ず切ってください。

[I]

打ち上げ花火の模型として，球状に固めた火薬の表面に多数の質点を均等に貼り付けた物体を考える。図 1（左）のように，この物体を地表面から鉛直上方に打ち上げた。その後，図 1（右）のように，物体が最高点（高度 h）に達したときに，火薬を爆発させたところ，すべての質点は同時に初速度の大きさ v_0 で等方的に放射された。以下，質点の質量を m とし，質点の運動を考えよう。重力加速度の大きさを g とし，数値が必要な場合は，$g = 10\ \mathrm{m/s^2}$ を用いなさい。ただし，物体の大きさは無視できるものとする。

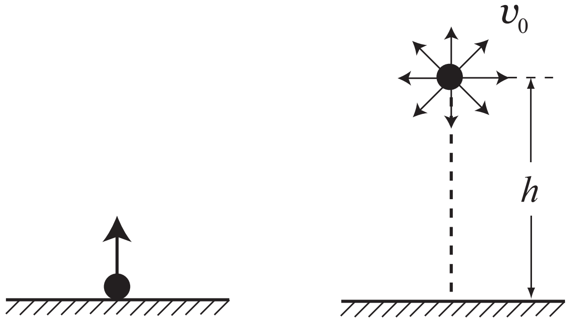

図 1: （左）地表面から打ち上げられる物体,（右）等方的に放射される質点達

問 1 物体が高度 h の最高点に達した時刻を $t = 0$ とし，それ以後の質点の運動を考えよう。個々の質点は時刻 t の経過とともにそれぞれ異なる軌道を 3 次元空間内に描くが，すべての質点をまとめて考えると，質点達はある時刻 t では，ある曲面上に存在する。以下では，その曲面を時刻 t での質点達の到達曲面と呼ぶことにする。ただし，観測は質点達から十分離れた場所で，質点達が地上に到達しない範囲で行うものとする。

(a) 時刻 $t = 0$ に高度 h から初速度ゼロで自由落下する観測者が，放射された質点達の運動を観測するとどう見えるかを式を用いずに説明しなさい。また，この観測者から見ると，時刻 t での到達曲面はどのような曲面になるか答えなさい。

(b) 前問の自由落下する観測者から見た，時刻 $t = 1, 2, 3, 4$ s での質点達の到達曲面を $v_0 = 15$ m/s として，ひとつの図に描きなさい。それぞれの時刻での到達曲面を特徴づけるのに必要な数値も書き込むこと。ただし，図はひとつの鉛直面内で描けばよい（図は 3 次元的に描く必要は無い。そのため，到達曲面は曲線となる）。

(c) 今度は，地表面に止まっている観測者が，放射された質点達の運動を観測するとどう見えるかを式を用いずに説明しなさい。その結果，時刻 t での到達曲面

はどのような曲面になるか答えなさい。

(d) 前問の地表面に止まっている観測者から見た，時刻 $t = 1, 2, 3, 4$ s での質点達の到達曲面をひとつの図に描きなさい。 問 1(b) と同じただし書きに従うこと。

問 2 次に，問 1 の問題を質点の運動方程式を用いて考えよう。図 2（左）のように，地表面の打ち上げ地点を原点 O とし，鉛直上方に z 軸を，それと直交する方向に x 軸と y 軸を持つ，地表面に固定した 3 次元直交座標系 (x, y, z) を設定する。さらに，図 2（右）のように，時刻 $t = 0$ に高度 h から初速度ゼロで自由落下する座標系 (x', y', z') を設定する。ただし，x', y', z' の軸は，それぞれ x, y, z の軸に平行とする。

以下では，時刻 t での質点の位置座標を，座標系 (x, y, z) では $(x(t), y(t), z(t))$，座標系 (x', y', z') では $(x'(t), y'(t), z'(t))$ と書く。このとき，速度 $\vec{v}$ の x 成分 v_x は $v_x(t) = \dfrac{dx(t)}{dt}$，加速度の x 成分は $\dfrac{dv_x(t)}{dt} = \dfrac{d^2x(t)}{dt^2}$，他の成分も同様に表してよい。

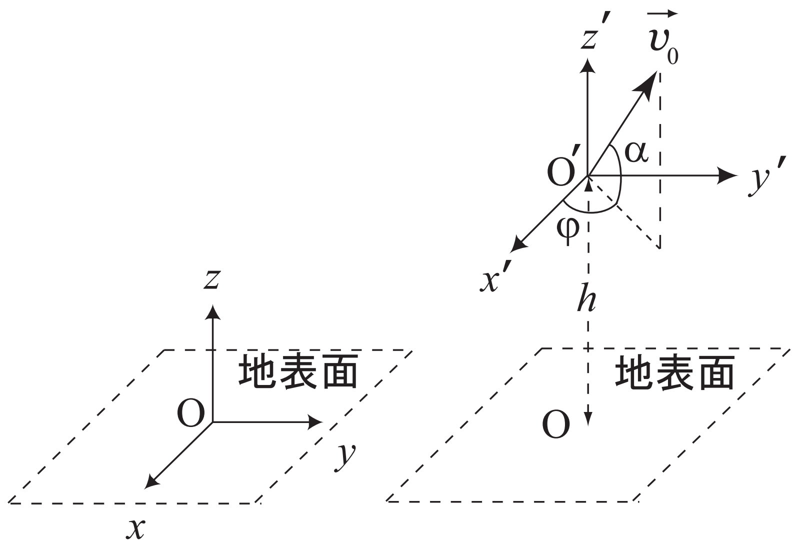

図 2: （左）地表面に固定された座標系 (x, y, z),（右）自由落下する座標系 (x', y', z')

(a) ひとつの質点の運動方程式を，高度 h から自由落下する座標系 (x', y', z') と地表面に固定された座標系 (x, y, z) の両方で書き下しなさい。

(b) ある時刻 t での質点の位置座標値 $(x(t), y(t), z(t))$ は，他の座標値 $(x'(t), y'(t), z'(t))$ を用いて書ける。両者の関係を式で表し，(x', y', z') 系での運動方程式から (x, y, z) 系での運動方程式が導かれることを示しなさい。

(c) 質点の初速度ベクトル $\vec{v}_0$ の向きは，図 2（右）のように水平面から測った角度（仰角）を α，$\vec{v}_0$ の水平面への射影が x 軸となす角度を φ として指定できる。このとき初速度ベクトル $\vec{v}_0$ の x, y, z 成分をそれぞれ v_0, α, φ を用いて表しなさい。

(d) 時刻 t でのひとつの質点の位置座標 $(x(t), y(t), z(t))$ を時刻 t の関数として表しなさい。

(e) 座標系 (x, y, z) において，時刻 t での質点達の到達曲面を式で求めなさい。

(f) 座標系 (x, y, z) において，ひとつの質点の軌道の式（z を x, y の関数として表した，時刻 t を含まない式）を求めなさい。

(g) 3 次元空間 (x, y, z) において，質点達が到達できる領域は，高度 h と初速度の大きさ v_0 で決まる。この領域を式で表し，それはどのような領域か説明しなさい。特に，地表面での到達可能範囲を 2 次元面 (x, y) 内で求めなさい。

問 3 最後に，質点には重力だけでなく，大気による抵抗力も働くものとする。抵抗力が質点の速度 $\vec{v}$ に比例すると仮定すると，その x, y, z 成分は速度 $\vec{v}$ の x, y, z 成分 v_x, v_y, v_z を用いて

$$-kmv_x, \quad -kmv_y, \quad -kmv_z \tag{1}$$

と書ける。ここで比例係数の大きさを km とした $(k > 0)$。

(a) まず，予備的考察を行おう。抵抗力のみが働く 1 次元の運動の運動方程式は，質点の位置座標 $X(t)$ の代わりに，速度 $V(t)$ とその時間微分 $\dfrac{dV(t)}{dt}$ を用いて

$$m\frac{dV(t)}{dt} = -kmV(t) \quad \Longrightarrow \quad \frac{dV(t)}{dt} = -kV(t) \tag{2}$$

と書ける。よって，この方程式の解 $V(t)$ は，微分した結果が元の関数に比例するような関数，つまり指数関数 $V(t) = V_0 e^{-kt}$ である。ここで，V_0 は $t = 0$ での V の値，$V_0 = V(0)$ である。位置座標 $X(t)$ は，t で微分したときに $V(t)$ となるような t の関数である。これらを考慮して，運動方程式 (2) の解としての位置座標 $X(t)$ を求めなさい。ただし，$t = 0$ では $X(t) = 0$ とする。また，$X(t)$ を時刻 t の関数として，そのグラフを描きなさい。ただし，$V_0 > 0$ とする。

(b) 本題に戻ろう。地表面に固定された座標系における質点の運動方程式を，質点の位置座標を用いず，速度とその時間微分を用いて書き下しなさい。

(c) さらに，運動方程式が，重力を含まず，抵抗力のみを含むような新しい座標系 $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ に移ることを考えよう。そのような $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ から (x, y, z) への変換式を求めなさい。ただし，時刻 $t = 0$ で $\tilde{x} = \tilde{y} = \tilde{z} = 0$ とする。

(d) 時刻 t でのひとつの質点の位置座標 $(x(t), y(t), z(t))$ を時刻 t の関数として表しなさい。ただし，v_0, α, φ は，問 2(c) と同じとする。

(e) 時刻 t での質点達の到達曲面を座標系 (x, y, z) において式で求め，それはどういう曲面であるか説明しなさい。

(f) 大気の抵抗を考慮した場合は，質点達の到達可能領域はどうなるか答えなさい。特に，h が非常に大きいときの，地表面での到達可能範囲を 2 次元面 (x, y) 内で求めなさい。ただし，指数関数 e^x は x が小さいときには，$e^x \fallingdotseq 1 + x + \frac{1}{2}x^2$ と近似できることを用いてよい。

[II]

問 1　光はある物質から別の物質へと進むとき，反射や屈折を起こす。このとき，屈折した光が進む方向 (屈折角) は物質の屈折率によって決まる。物質のもつ屈折率のわずかな違いが身の回りの物理現象として現れる例として，逃げ水があげられる。晴れた暑い日には，アスファルトによって舗装された道路の遠くに水があるように見えるが，いくら近づいてもたどり着くことはできない (図 1)。これは水ではなく，道路に空の景色が映っているからである。この現象がどのようにして生じるのかについて考えよう。

実際の試験では，アスファルトによって舗装された道路の遠くに水があるように見える逃げ水の写真が掲載されていましたが，公開版の試験問題では削除しました。写真はインターネット等で検索してください。キーワードとして「逃げ水」で検索すると，動画，写真や解説を多くのホームページで確認することができます。

図 1

アスファルト近くの空気は熱せられやすく，数 cm 上の空気と 10 °C 以上温度が違うことはよく起こる。アスファルト近くに高い温度 T_{H} の空気層 H，その上に T_{H} よりも低い温度 T_{L} の空気層 L が存在しているとする。2 つの空気層では温度が異なるため，屈折率はそれぞれ n_{H}，n_{L} と異なる。2 つの空気層内部では温度がそれぞれ一定に保たれており，圧力は 2 つの層で等しいものとする。

(1) 光が空気層 L から入射し，空気層 H で屈折することを考える。図 2 に示すように入射角を θ，屈折角を ϕ とし，この 2 つの間に成り立つ関係式を求めなさい。

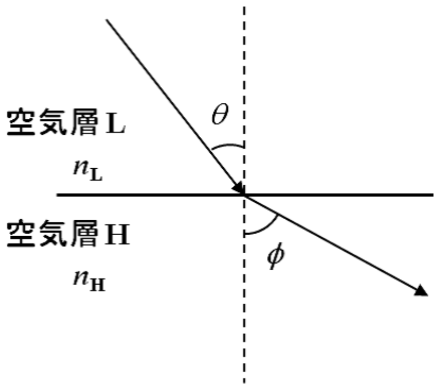

図 2

(2) 入射角 θ を大きくしていくと，θ が臨界角 θ_c 以上で全反射が起こる。これにより，アスファルト上に水が存在するように見える。n_H と n_L の差が小さい場合には，臨界角は $\dfrac{\pi}{2}$ に近い角度になる。角 β_c を $\beta_c = \dfrac{\pi}{2} - \theta_c$ と定義すると，β_c は非常に小さいため，$\cos\beta_c \fallingdotseq 1 - \dfrac{\beta_c^2}{2}$ と近似することができる。このとき，β_c を n_H，n_L を用いて表しなさい。

(3) 気体の場合，室温程度においては屈折率 n と圧力 p，絶対温度 T の間には比例定数 $\alpha(\alpha > 0)$ を用いて

$$n - 1 = \alpha\frac{p}{T} \tag{1}$$

の関係が近似的に成り立つことが知られている。角 β_c を T_H，T_L，n_L を用いて表しなさい。

(4) $T_H = 323$ K，$T_L = 305$ K，$n_L = 1.000265$ の場合に，逃げ水が歩行者からどれだけ離れた位置に見えるかを答えなさい。ただし，歩行者の目線の高さは地面から 1.5 m とし，空気層 H の厚さは十分に薄く無視できるものとする。

問 2　気体の屈折率 n は，ジャマン干渉計を用いて測定することができる。ジャマン干渉計は図 3 に示すように容器 $\mathrm{A_1}$，$\mathrm{A_2}$ と 2 つの平面鏡 P，Q からなる。平面鏡 P，Q(厚さ d) は屈折率 n_{P} をもつ材質でできており，裏面では光を完全に反射する。図 3 のように，光源 S から出た単色光 (波長 λ) が，平面鏡 P に入射角度 $\dfrac{\pi}{4}$ で入射し，平面鏡の表面で反射する光と裏面で反射する光の 2 つに分かれた。分かれた光はそれぞれ長さ ℓ の容器 $\mathrm{A_1}$，$\mathrm{A_2}$ を通り，平面鏡 P に平行に設置されている平面鏡 Q に入射した。光が容器に出入りする際の反射や屈折は無視できる。入射した 2 つの光を平面鏡 Q により重ね合わせ，その先におかれたスクリーン上の点 O で光の強度を観察した。実験に用いた容器の体積は温度などによって変化しないものとする。また，容器には栓がついており，必要に応じて開閉できるようになっているものとする。以下の問いに答えなさい。ただし，真空中における屈折率は 1 とし，実験は真空中で行われているものとする。

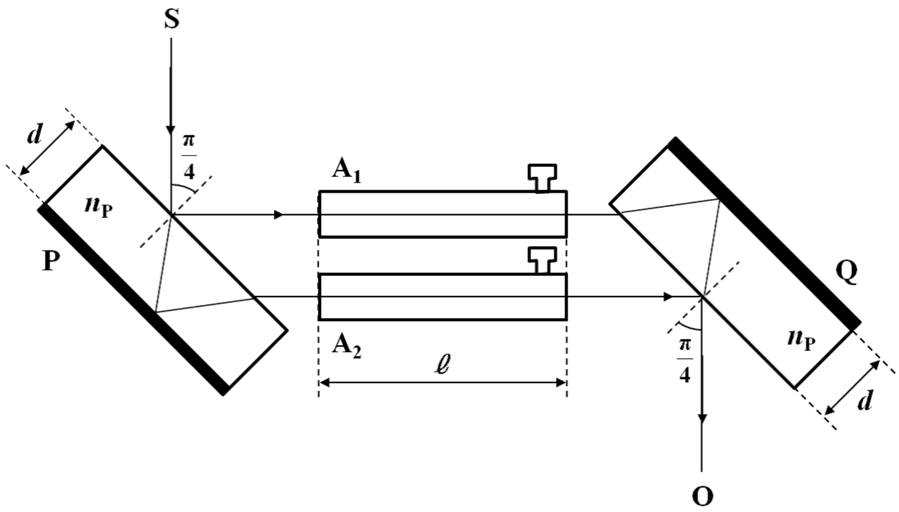

図 3

(1) 平面鏡 P の裏面で反射する光の平面鏡 P 内での光路長 (光学距離) を求めなさい。

はじめに，2 つの容器の内部を十分に真空に引いた。次に，内部の温度を絶対温度 T に保ちつつ，容器 $\mathrm{A_2}$ にゆっくりと気体を入れ始めた。この気体は理想気体とみなせるものとし，その屈折率は前ページの式 (1) に従うものとする。

(2) 点 O において観察される光の強度はどのように変化するか。容器 $\mathrm{A_2}$ に気体を入れ始める前と比較して答えなさい。

(3) 容器 $\mathrm{A_2}$ に気体を入れ続け，点 O における明るさが N 回目の極大となったとき，

容器 A_2 の圧力は p_0 に達した。温度 T，圧力 p_0 における気体の屈折率 n_0 を N を用いて表しなさい。

(4) 単色光として波長 6.33×10^{-7} m，長さ ℓ =0.15 m の容器を用いて実験を行った。容器 A_1 と A_2 の内部を同じ気体 (圧力 $1.010{\times}10^5$ Pa) で満たした後，2 つの容器の温度を 299 K に固定したまま，容器 A_1 のみ栓を開放し気体を徐々に放出した。点 O における明るさが 75 回目の極大となったとき，容器 A_1 の圧力は $6.99{\times}10^4$ Pa であった。このとき，圧力 $1.010{\times}10^5$ Pa，温度 273 K における気体の屈折率を求めなさい。

容器 A_2 の栓を閉め，内部の温度を上昇させた。このとき，点 O で観察される光の明るさに変化は見られなかった。

(5) 気体の屈折率 n と単位体積当たりの気体分子の個数 (個数密度)ρ の間にどのような関係式が成り立つか求めなさい。必要であればボルツマン定数 k_{B} を用いてよい。

問 3　ここでは，気体の屈折率の起源について考えよう。

最初に屈折率 n と誘電率 ε の関係を見てみよう。真空中での光の速さ c は，真空中の誘電率 ε_0 および真空中の透磁率 μ_0 を用いて

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \tag{2}$$

と表せる。気体中での光の速さ v は，気体の誘電率 ε，気体の透磁率 μ を用いて

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \mu}} \tag{3}$$

と表せる。一方，気体中での光の速さ v は気体の屈折率 n を用いて

$$v = \frac{c}{n} \tag{4}$$

と記述することができることから，気体の屈折率 n と誘電率 ε との間には

$$n^2 = \frac{\varepsilon \mu}{\varepsilon_0 \mu_0} \tag{5}$$

が成り立つ。可視光については $\mu \fallingdotseq \mu_0$ とみなすことができるため，

$$n^2 = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \tag{6}$$

と求められる。式 (6) より気体の屈折率 n は誘電率 ε によって決まることがわかる。

次に気体分子の中で電子が運動することを考える。光は電場と磁場が変動しながら空間を伝わる電磁波である。角振動数が ω のとき，時刻 t での光の電場 (電界) の強さ E は

$$E(t) = E_0 \cos \omega t \tag{7}$$

と表すことができる。この電場による力を考え，以下の問いに答えなさい。

(1) 角振動数 ω で振動する光が気体に入射すると，気体分子中の電子 (質量 m，電荷 $-e$ $(e > 0)$) には式 (7) で表せる電場から受ける力と，分子の中心からの距離 (変位)x に比例した引力 $-kx$ がはたらく。ただし，k はばね定数で一定であり，$k > m\omega^2$ である。これら 2 つの力を考えて，気体分子中の電子の運動方程式を書き下しなさい。ただし，電子の運動は振動電場の方向のみに限られているものとし，電子の加速度，速度，変位はそれぞれ $\dfrac{d^2x}{dt^2}$，$\dfrac{dx}{dt}$，x で表せるものとする。

(2) 電子も入射した光と同じ角振動数 ω で振動すると考えられるので，$x(t) = x_0 \cos \omega t$ と書き表せる。x_0 を求めなさい。

(3) 電子が変位する $(x \neq 0)$ と，分子内部で正と負の電荷が分離する。このとき $-ex$ を，電気双極子モーメントと呼ぶ。個数密度が ρ であるとき，時刻 t において誘起される単位体積当たりの電気双極子モーメント (分極)P を求めなさい。

(4) 気体の誘電率 ε は，電場 E とそれによって誘起される単位体積当たりの電気双極子モーメント P を結びつける物理量で，

$$P = (\varepsilon - \varepsilon_0)E \tag{8}$$

と定義される。n と気体分子の個数密度 ρ との間に成立する関係式を求めなさい。ただし，n が 1 に非常に近いため $n - 1 = \dfrac{n^2 - 1}{n + 1} \fallingdotseq \dfrac{n^2 - 1}{2}$ と近似できるものとする。また，求めた関係式より，問 1 の式 (1) における α をm，e，k，ω，ε_0，k_{B} を用いて表しなさい。