平成 23 年度

千葉大学先進科学プログラム入学者選考課題

課題 II-B　解答例

II-B 解答例

問１　シリウスの視直径

　距離：　R=8.6 光年・9.5×10^{15} =　8.2×10^{16} m

　直径：　d＝ 2.4×10^{9} m

視直径：　d / R= <u>2.9×10^{-8} rad</u>　　（参考　= $1.7\mathrm{x}10^{-6}$ 度= 6 ミリ秒角）

これは <u>1 km 先にある 29μm</u> (髪の毛の太さの 1/3) の長さを見ることに相当。

問２　最初の暗点の位置 $\boldsymbol{x_1}$

　複スリットの下（A）および上（B)の開口からスクリーン上の位置 x までの距離 l_A, l_B は，l に比べて x および d が小さいことを用いてそれぞれ近似して

$$l_A^2 = l^2 + \left(x + \frac{d}{2}\right)^2 \quad , \quad l_B^2 = l^2 + \left(x - \frac{d}{2}\right)^2$$ よって $$l_A \approx l\left\{1 + \frac{1}{2}\left(\frac{x + d/2}{l}\right)^2\right\}$$ 同様に

$$l_B \approx l\left\{1 + \frac{1}{2}\left(\frac{x - d/2}{l}\right)^2\right\}$$ 光路差 $l_A - l_B$ は，$l_A - l_B \approx \dfrac{xd}{l}$

最初の暗点は光路差が半波長のときなので，$\dfrac{xd}{l} = \dfrac{\lambda}{2}$ よって $x_1 = \dfrac{l\lambda}{2d}$

問３　明暗のコントラストがはっきりしなくなる条件

　光源１および光源２からの干渉縞の明点と暗点が重なると明暗のコントラストが低下する。つまり，問３で求めた，光源１からの光の暗点と光源２からの明点が重なるときがそれに該当する。

光源１の暗点は光路差が半波長の奇数倍のときである。すなわち

$\dfrac{xd}{l} = \dfrac{\lambda}{2}$，この座標が光源２の明点になる。角度α離れている光源２によるスクリーン上の最も明るい明点は $x = l\sin\alpha$ にある。

αは微小なので $\sin\alpha \approx \alpha$ として良いので，上の２式より $\alpha d = \dfrac{\lambda}{2}$

問４　角度θの方向から来た光のスリットＡを通過した光の電場

角度θの方向から光が複スリットに到達するので，スリット A,B 上では図７より光路長がすでに $d\sin\theta$ だけ異なる。よって，スリット A を通ってスクリーンの位置 x に達した光の電場の強さ $E_{A,\theta}(x)$は　$\underline{E_{A,\theta}(x) = \sin(\omega t - k(l_A + d\sin\theta))}$

問５　角度θの方向から来て複スリット A,B を通った光の合成電場

スリット A, B を通りスクリーン上の位置 x までの距離はそれぞれ l_A，l_B であり，これは問３で求めた。すなわち，

$$l_A \approx l\left\{1+\frac{1}{2}\left(\frac{x+d/2}{l}\right)^2\right\},\quad l_B \approx l\left\{1+\frac{1}{2}\left(\frac{x-d/2}{l}\right)^2\right\}\quad \text{光路差} l_A - l_B \text{は，} l_A - l_B \approx \frac{xd}{l}$$

スリット A を通ってスクリーンの位置 x に達した光の電場の強さ $E_{A,\theta}(x)$は

$E_{A,\theta}(x) = \sin(\omega t - k(l_A + d\sin\theta))$

スリット B を通ってスクリーンの位置 x に達した光の電場の強さ $E_{B,\theta}(x)$は

$E_{B,\theta}(x) = \sin(\omega t - k(l_B))$

位置 x における電場の強さは

$E_{A,\theta}(x) + E_{B,\theta}(x) = 2\sin(\omega t - k/2\,(l_A + l_B + d\sin\theta))\cos(k/2\,(l_A - l_B + d\sin\theta))$

θ は微小なので $\sin\theta \approx \theta$, $l_A + l_B \approx 2l$, $l_A - l_B \approx xd/l$, などの近似を入れると

$\underline{E_{A,\theta}(x) + E_{B,\theta}(x) \approx 2\sin(\omega t - k/2(2l + d\theta))\cos(kd/2\,(x/l + \theta))}$

問６　角度θの方向から来て複スリット A,B を通った光の強度

電場の２乗は問５の結果から，

$(E_{A,\theta}(x) + E_{B,\theta}(x))^2 = 4\sin^2(\omega t - k/2(2l + d\theta))\cos^2(kd/2\,(x/l + \theta))$

この時間平均をとる。時間依存性の入っているのは，$\sin^2(\omega t - k/2(2l + d\theta))$の項だけで，１周期の時間平均は 1/2 となるから，光の強度 $I_\theta(x)$は

$\underline{I_\theta(x) = 2\cos^2(kd/2\,(x/l + \theta)) = 1 + \cos(kd\,(x/l + \theta))}$　と表される。

問７　視直径αの光源から発せられた光の，スクリーンの位置 x での光の強度

$I_\theta(x) = 1 + \cos(kd\,(x/l + \theta))$　を光の来る方向 $-\alpha/2 \le \theta \le \alpha/2$ の範囲で積分する。このとき，αの大小で全強度が変化しないように単位角度当たりの光強度（輝

度）を一定にする。そのため強度をαで割って規格化した $I_\theta(x)/\alpha$ について積分すると、

$$I(x)=\frac{1}{\alpha}\int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} I_\theta(x)d\theta = 1+\frac{1}{\alpha}\int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}}\cos\left(kd\left(\frac{x}{l}+\theta\right)\right)d\theta$$

ここで，$\cos(kd(x/l+\theta))=\cos(kxd/l)\cos(k\theta d)-\sin(kxd/l)\sin(k\theta d)$ より

$$I(x)=1+\frac{1}{\alpha}\cos\left(\frac{kxd}{l}\right)\int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}}\cos(k\theta d)d\theta-\frac{1}{\alpha}\sin\left(\frac{kxd}{l}\right)\int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}}\sin(k\theta d)d\theta$$

奇関数なのでゼロ

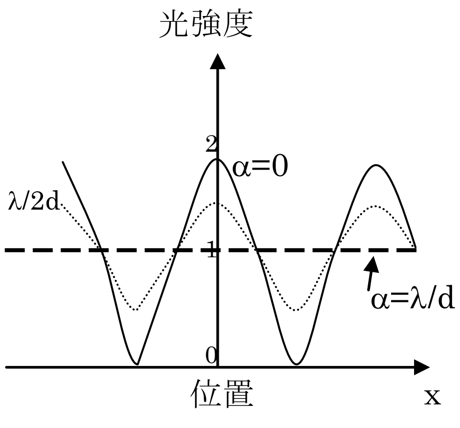
すなわち，
$$I(x)=1+\frac{\sin\left(\frac{kd\alpha}{2}\right)}{\left(\frac{kd\alpha}{2}\right)}\cos\left(\frac{kxd}{l}\right)$$

位置 x 依存性は最後の cos の項にしかなく，その前に係数 sin(α)/αの関数形で視直径が干渉の振幅を左右していることがわかる。

問８　グラフと干渉縞のコントラスト消失の条件

αを変えると干渉パターンが大きく変化する。α＝０では点光源のヤングの実験と同様となり，位置 x に関して周期的に光強度が最大からゼロまで変化する。

αを増すと，明暗の比が小さくなる。これは問３で２つの点光源の場合に検討したことと定性的には一致する。$\alpha=\lambda/d$ のとき，干渉パターンは完全に消失する。すなわち，$\dfrac{\sin\left(\frac{\pi d\alpha}{\lambda}\right)}{\left(\frac{\pi d\alpha}{\lambda}\right)}$ が



ゼロとなるとき，つまり$\dfrac{d\alpha}{\lambda}=n$（$n$は自然数）のときに干渉縞は消失する。

問９　ベテルギウスの視直径

結局，マイケルソン・ピーズの干渉観測での可動鏡の距離Lが，問４～８での複スリットの間隔dに相当する。すなわち，$\alpha=\lambda／L_0$であるので，

$\alpha=\dfrac{570\times10^{-9}}{3.0}=1.9\times10^{-7}$　[rad]　　これは問１のシリウスより約７倍も大きな視直径を持つ赤色巨星である。

問10　マイケルソンの天体干渉計とは

　できるだけ移動鏡の間隔Ｌを大きくする。波長の短い（青い）光で観測するなどで原理的には小さな視直径を観測可能である。

困難な点

- 青い星が測定したい星とは限らない。
- 干渉実験でも，大気の揺らぎにより２つの鏡から入射する光は常に揺らいでおり，星像もゆらぐため干渉縞の観測を困難にする。
- 実験中は光路にある鏡を極めて安定して保持して，光路長が光の波長の数分の一の精度で変化しないようにする必要がある。一方で小さな視直径の星を測定しようとすれば移動鏡の間隔を大きくする必要があり，安定性とトレードオフの関係にある。

出題意図

　毎晩，晴れていれば誰でもが夜空に瞬く星を見ることができる。トピックス的な星の話題は頻繁に報道にも流れているが,「星をどのようにして見るのだろう？」という，とても基礎的なことを自分なりに考えたことがあるだろうか。本問題は，科学を志す諸君がこれまで，身近な問題について自分なりにどの程度意識して考えているのかを試すものである。

問１：　望遠鏡で太陽以外の恒星を見ても見えないことは何かで読んだことがあるかも知れない。以降の問題を考える準備として，いかに恒星の視直径が小さいかについて確認する。

問２，問３：　光の基本的性質である干渉効果について考える。２年生後期では，授業で勉強したばかりの諸君もいることから，教科書に載っているような問題をあえて取り上げ，物理的な設定を問題文から正しく読み取って間違いなく計算できるかどうかを確認する小手調べである。

問４～問８：　高校では取り扱わない「広がりのある光源」からの干渉効果を，設定を簡単化して高校の数学で容易に扱えるものとした。指示に従い，また，問２，問３での練習をもとにしてスクリーン上の干渉が複スリットの間隔を変えることにより変化することを導き出す。三角関数の取り扱いや簡単な定積分の計算が正しく行えるかも確認する。

問９，問 10
マイケルソンらの実験での観測結果を数値で求め，工夫すれば見えないものも「見える」ようにできることを知ってもらうとともに，やはり極めて難しい観測である理由を考察して，本問全体を通じての理解度を試す。