［II−B］回答例

問１

一様な電場が形成されているので、電場の大きさは $\dfrac{V}{d}$ となる。

電極間の電位は x に比例し、$\dfrac{Vx}{d}$ となる。

問２

$$ma = q\frac{V}{d} - mg \tag{a1}$$

問３

$$\begin{cases} V_1 = k\left(\qquad \dfrac{Q_2}{r_{21}} + \dfrac{Q_3}{r_{31}} \right) \\ V_2 = k\left(\dfrac{Q_1}{r_{12}} \qquad + \dfrac{Q_3}{r_{32}} \right) \\ V_3 = k\left(\dfrac{Q_1}{r_{13}} + \dfrac{Q_2}{r_{23}} \qquad \right) \end{cases} \tag{a2}$$

より、

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{3} Q_i' V_i &= k\left[Q_1'\left(\frac{Q_2}{r_{21}} + \frac{Q_3}{r_{31}} \right) + Q_2'\left(\frac{Q_1}{r_{12}} + \frac{Q_3}{r_{32}} \right) + Q_3'\left(\frac{Q_1}{r_{13}} + \frac{Q_2}{r_{23}} \right) \right] \\ &= k\left[Q_1\left(\frac{Q_2'}{r_{21}} + \frac{Q_3'}{r_{31}} \right) + Q_2\left(\frac{Q_1'}{r_{12}} + \frac{Q_3'}{r_{32}} \right) + Q_3\left(\frac{Q_1'}{r_{13}} + \frac{Q_2'}{r_{23}} \right) \right] = \sum_{i=1}^{3} Q_i V_i' \end{aligned} \tag{a3}$$

問４

n がいくつであっても、問３の解答のようにすべての i および j（$i,j=1, 2, \ldots, n$、$i \neq j$）の組み合わせについて $k\dfrac{Q_i' Q_j}{r_{ij}}$ が現れる。$\displaystyle\sum_{i=1}^{n} Q_i V_i' = \sum_{i=1}^{n} Q_i' V_i$ の両辺は i でまとめるか j でまとめるかの違いであり、任意の n で常に成り立つ。

問５

相反定理より、

$$Q_A V_A{}' + Q_B V_B{}' - q V_C{}' = Q \cdot 0 - Q \cdot 0 + 0 \cdot V_C = 0 \tag{a4}$$

これと$Q_A + Q_B - q = 0$より

$$Q_A = \frac{V_C{}' - V_B{}'}{V_A{}' - V_B{}'} q 、 Q_B = \frac{V_A{}' - V_C{}'}{V_A{}' - V_B{}'} q \tag{a5}$$

ここで、図３の配置より、電極間の電位は$V_A{}'$から$V_B{}'$にむけて一定勾配で変化することがわかるので、

$$V_C{}' - V_B{}' = \left(V_A{}' - V_B{}'\right)\frac{x}{d} 、 V_A{}' - V_C{}' = \left(V_A{}' - V_B{}'\right)\frac{d-x}{d} \tag{a6}$$

(a6)を(a5)に代入することにより、$Q_A = \frac{x}{d}q$、$Q_B = \frac{d-x}{d}q$となる。

問６

式(4)および(5)を図１に対応させると、荷電粒子によって上の電極および下の電極に誘起される電荷は、それぞれ

$$Q_A = \frac{x}{d}q \quad \text{および} \quad Q_B = \frac{d-x}{d}q$$

である。電流は単位時間あたりに導線のある断面を横切る電荷であるから、電荷の極性とvやIの向きに注意すると、電極Ａに蓄積される電荷の時間微分が電流となる。

すなわち、

$$I = \frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{x}{d}q\right) = \frac{qv}{d} \tag{a7}$$

電極Ｂについても同様である。

問７

初期値を考慮し、

$$a = \frac{qV}{md} - g \text{ より } v(t) = \left(\frac{qV}{md} - g\right)t \tag{a8}$$

したがって

$$I(t) = \frac{qv(t)}{d} = \frac{q}{d}\left(\frac{qV}{md} - g\right)t \tag{a9}$$

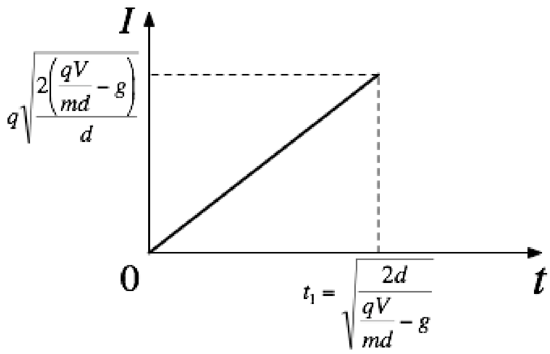
$$x(t) = \frac{1}{2}\left(\frac{qV}{md} - g\right)t^2 \tag{a10}$$

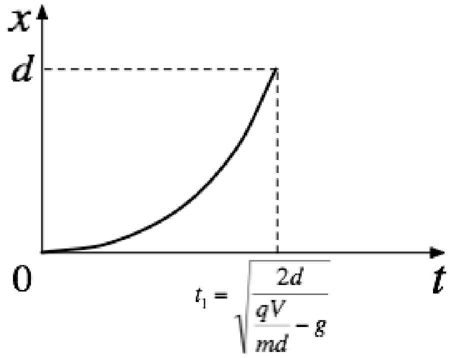
静電気力が重力より大きい、すなわち $g < \dfrac{qV}{md}$ の場合であるから、

$$x = d \text{となる衝突時刻 } t_1 = \sqrt{\frac{2d}{\frac{qV}{md} - g}} \tag{a11}$$

$I(t) = \dfrac{q}{d}\left(\dfrac{qV}{md} - g\right)t$ は t_1 まで正の値で線形増加し、$I(t_1) = q\sqrt{\dfrac{2\left(\frac{qV}{md} - g\right)}{d}}$。

$x(t) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{qV}{md} - g\right)t^2$ は t_1 で d となるまで２次関数的に増加する。





問８

静電気力が重力の２倍であるから、$\dfrac{qV}{d} = 2mg$ である場合を考える。

問７における最大速度は、

$$x = d \text{となる時刻 } t_1 = \sqrt{\frac{2d}{\frac{qV}{md} - g}} = \sqrt{\frac{2d}{g}} \text{ において}$$

$$v = \left(\frac{qV}{md} - g\right)t = \sqrt{2d\left(\frac{qV}{md} - g\right)} = \sqrt{2dg} \tag{a12}$$

である。ここに、d=10^{-3} [m]、g=9.8 [m/s^2]を代入すると、

最大速度 v=0.14 [m/s]である。

また、それに到達する時刻 t_1=0.014 (0.0142857) [s]である。

問 9

速度と電流の関係は $I = \dfrac{qv}{d}$ で表されるから、ここに q=1.6×10^{-19} [C]、v=0.14 [m/s]、d=10^{-3} [m] を代入すると、 I=2.2(2.24)×10^{-17} [A]となる。

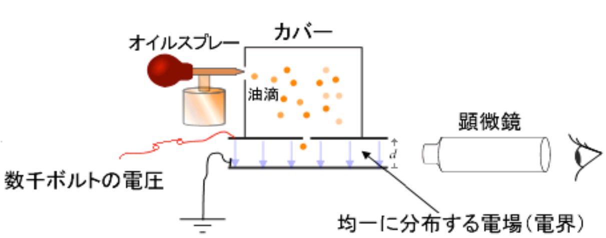
また、 $\dfrac{qV}{d} = 2mg$ であるから、

$$V = \frac{2mgd}{q} \tag{a13}$$

ここに、 m=10^{-15} [kg]、 g=9.8 [m/s^2]、 d=10^{-3} [m]、 q=1.6×10^{-19} [C]を代入すると、必要な電圧は V = 120(122.5) [V]となる。

参考：本家ミリカンの実験

電子の電荷を測定するために R.A. Millikan が 1906 年から 1916 年にかけて行った実験で、本年（2006 年）はちょうど彼が実験に取りかかってから 100 周年の記念すべき年である。空気中に浮遊する油滴に X 線を照射して帯電させ、重力による落下と逆方向に電場をかけたときの上昇速度から、重力、浮力、空気抵抗（ストークスの式）、静電気力を考慮し、電荷を求めた。最近のより精密な値と比べても 0.7%しか違わない値を得ている。（科学大辞典（丸善）より一部加筆）



（写真：「ロバート・ミリカン」および「ミリカンの油滴実験」『フリー百科事典　ウィキペディア日本語版』。2006 年 12 月 6 日、URL: http://ja.wikipedia.org）