平成２８年度

千葉大学先進科学プログラム入学者選考課題

数学

解答例

解答例

問1　　(方程式)

出題意図：簡単な方程式が解けるかを問う問題

(1) $x^3+2x^2-5x-6=(x-2)(x+1)(x+3)=0$

よって

$x=2,\ -1,\ -3$

(2) 加法定理を使い，$\cos x$ についての2次方程式にする。

$$\cos 2x+9\cos x-4=0$$
$$(2\cos^2 x-1)+9\cos x-4=0$$
$$2\cos^2 x+9\cos x-5=0$$
$$(2\cos x-1)(\cos x+5)=0$$
$$\cos x=\frac{1}{2},\ -5$$

$\cos x \leqq 1,\ 0 \leqq x<\pi$ 　より

$$x=\frac{\pi}{3}$$

(3) 対数関数は，底を揃えて比較する。真数が正であることに注意する。

$$\log_2(x-2)+\log_2(x+1)=2$$
$$\log_2(x-2)(x+1)=\log_2 4$$
$$(x-2)(x+1)=4$$
$$x^2-x-6=0$$
$$(x+2)(x-3)=0$$

よって，$x=-2,\ 3$

ここで，真数条件より $x-2>0$ かつ $x+1>0$ でなければならないから，解は，

$x=3$

問2　　(積分)

出題意図：積分の基本的概念を理解しているかを問う問題

$$V=\pi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} y^2dx=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x dx=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2x)dx$$

$$=\pi\left[x+\frac{\sin 2x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^2}{2}$$

問 3　　(図形)

出題意図：余弦定理など基本的な概念を利用できるかどうかを問う問題

(1) 余弦定理より

$$\mathrm{BD}^2 = 4+9-12\cos\theta$$
$$\mathrm{BD}^2 = 1+9-6\cos(\pi-\theta)$$

よって $\cos\theta = \dfrac{1}{6}$

(2) $S=$ △ABD+△BCD であるので

$$S = \frac{1}{2}\times 2\times 3\times \sin\theta + \frac{1}{2}\times 1\times 3\times \sin(\pi-\theta)$$
$$= \frac{\sqrt{35}}{2} + \frac{\sqrt{35}}{4} = \frac{3\sqrt{35}}{4}$$

問 4　　(ベクトル)

出題意図：ベクトルで表示した直線に関する理解を問う問題

(1) ベクトル $\vec{a}=(3,4)$ に垂直なベクトルを $\vec{n}=(x,y)$ とする。このとき，

$\vec{a}\cdot\vec{n}=0$ より

$$3x+4y=0$$
$$y=-\frac{3}{4}x$$

である。単位ベクトルであること，$x>0$ より，

$$\vec{n}=\left(\frac{4}{5},-\frac{3}{5}\right)$$

となる。

(2) 直線の座標を (x,y) とすると，

$$(x,y)=\vec{a}t+\vec{b}$$
$$=(3t,4t)+(1,1)$$
$$=(3t+1,4t+1)$$

ここから t を消すと，直線の方程式

$$4x-3y=1$$

$$y=\frac{4}{3}x-\frac{1}{3}$$

が得られる。

この直線に垂直で原点を通る直線は， $y=-\frac{3}{4}x$ であり，二つの直線の交点は,

$$\frac{4}{3}x-\frac{1}{3}=-\frac{3}{4}x$$

を解くことで $x=\frac{4}{25},\ y=-\frac{3}{25}$ が得られる。この点と原点の距離は,

$$\sqrt{x^2+y^2}=\left[\left(\frac{4}{25}\right)^2+\left(-\frac{3}{25}\right)^2\right]^{1/2}=\frac{1}{5}$$

問 5　　(数列)

出題意図：場合分けなどを適切に行うことができるかどうかを見る問題

(1) $a_{n+1}+a_n=3n$

$$a_{n+2}+a_{n+1}=3(n+1)$$

であるので

$a_{n+2}-a_n=3$ よって，1 つおきに公差 3 の等差数列だとわかる。

これより,

$a_1=1,\ a_2=2,\ a_3=4,\ a_4=5,\cdots$

よって

$$\begin{cases} a_{2k-1}=3k-2 \\ a_{2k}=3k-1 \end{cases}$$

(2)

i) $n=2k$ の場合

奇数次の項と偶数次の項の和を別々に考え足せばよい。

それぞれ，S_1, S_2 とすると

$$S_1=\frac{1}{2}k\{2+3(k-1)\}$$

$$=\frac{1}{2}\frac{n}{2}\left\{2+3\left(\frac{n}{2}-1\right)\right\}$$

$$=\frac{n}{4}\left(\frac{3}{2}n-1\right)$$

$$S_2=\frac{1}{2}k\{2\times2+3(k-1)\}$$
$$=\frac{1}{2}\frac{n}{2}\left\{4+3\left(\frac{n}{2}-1\right)\right\}$$
$$=\frac{n}{4}\left(\frac{3}{2}n+1\right)$$

よって，$S=S_1+S_2=\frac{3}{4}n^2$

ii) $n=2k-1$ の場合

$$S_1=\frac{1}{2}\frac{n+1}{2}\left\{2+3\left(\frac{n+1}{2}-1\right)\right\}$$
$$=\frac{n+1}{4}\left(\frac{3}{2}n+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{8}(n+1)(3n+1)$$
$$S_2=\frac{1}{2}\left(\frac{n+1}{2}-1\right)\left\{4+3\left(\frac{n+1}{2}-2\right)\right\}$$
$$=\frac{n-1}{4}\left(\frac{3}{2}n-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{8}(n-1)(3n-1)$$

よって，$S=\frac{1}{4}(3n^2+1)$

問 6　　(複素数平面)

出題意図：複素数平面の概念があるかどうかの基礎的問題

変形すると $z=\dfrac{w-1}{2(w-3)}$

一方，$|z|=1$ であるので，代入すると $1=\left|\dfrac{w-1}{2(w-3)}\right|$

$w=u+iv$ (ただし u，v は実数)として両辺を 2 乗して変形すると

$$4|u+iv-3|^2=|u+iv-1|^2$$
$$\left(u-\frac{11}{3}\right)^2+v^2=\frac{16}{9}$$
$$\left|w-\frac{11}{3}\right|^2=\frac{16}{9}$$

よって，点 $\dfrac{11}{3}$ を中心とする半径 $\dfrac{4}{3}$ の円