令和３年度

千葉大学先進科学プログラム入学者選考課題

課題論述　物理　課題I, II

解答例

解答例：課題I

出題の意図

摩擦や衝突による力や力積を理解しているかを確認する問題。またベクトルを扱う数学能力も試されている。設問の多くは最後の設問のヒントとなっている。

問1 摩擦力は $F=-\mu' mg$ なので，加速度は $-\mu' g$ である。時刻 $t=0$ に初速度が u であれば，速度は

$$v = -\mu' gt + u \tag{1}$$

と変化する。速度が 0 となるのは $\tau = \dfrac{u}{\mu' g}$ である。円板の中心位置は

$$x = -\frac{\mu' g}{2}t^2 + ut \tag{2}$$

と変化するので，$t=\tau$ での位置は

$$a = -\frac{u^2}{2\mu' g} + \frac{u^2}{\mu' g} = \frac{u^2}{2\mu' g} \tag{3}$$

が得られる。これを解くと，

$$\mu' = \frac{u^2}{2ga} \tag{4}$$

この結果を代入すると，

$$\tau = \frac{2a}{u} \tag{5}$$

が求まる。

問2 前問で求めたように $a = \dfrac{u^2}{2\mu' g}$ なので，距離を ℓ にするためには，初速度を $\sqrt{\dfrac{\ell}{a}}$ 倍すれば良い。

問3 運動量保存則より，円板Bも円板Aと同じ方向に動き一直線上を動いていることが分かる。円板Bが ℓ_{B} だけ進んだので，衝突直後の速度は $\sqrt{\dfrac{\ell_{\mathrm{B}}}{a}}u$ であったことが分かる。静止していた質量 m の円板Bをこの速度にするための力積の大きさは

$$F\Delta t = mu\sqrt{\frac{\ell_{\mathrm{B}}}{a}} \tag{6}$$

で，向きは円板A, Bの運動の向きと同じである。

問 4 衝突直前の円板 A の速度を $v_{\rm A}$，衝突直後の円板 A, B の速度をそれぞれ $v'_{\rm A}$, $v'_{\rm B}$ とすると，運動量保存則と反発係数 e より

$$mv_{\rm A} = m\left(v'_{\rm A} + v'_{\rm B}\right) \tag{7}$$

$$v'_{\rm A} - v'_{\rm B} = -ev_{\rm A} \tag{8}$$

が得られる。ここから $v_{\rm A}$ を消去すると

$$(1+e)\,v'_{\rm A} = (1-e)\,v'_{\rm B} \tag{9}$$

である。従って

$$\ell_{\rm A} = \frac{(v'_{\rm A})^2}{2g\mu'} = \left(\frac{1-e}{1+e}\right)^2 \frac{(v'_{\rm B})^2}{2g\mu'} = \left(\frac{1-e}{1+e}\right)^2 \ell_{\rm B} \tag{10}$$

この関係を用いると，初速度を測ることができなくても，$\ell_{\rm A}$ と $\ell_{\rm B}$ の測定から反発係数 e を求められる。

問 5 衝突直後の円板 A の速度は

$$v'_{\rm A} = \sqrt{\frac{\ell + 2a - b}{a}}\,u \tag{11}$$

である。前問の結果より，衝突直前の速度は

$$v_{\rm A} = \frac{2}{1-e}v'_{\rm A} = \frac{2u}{1-e}\sqrt{\frac{\ell + 2a - b}{a}} \tag{12}$$

なので衝突直前の運動エネルギーは

$$\frac{m(v_{\rm A})^2}{2} = \frac{2mu^2}{(1-e)^2}\frac{\ell + 2a - b}{a} \tag{13}$$

である。衝突までに移動する距離 $b - 2a$ だけ進む間に摩擦による仕事は

$$W = \mu' mg\,(b - 2a) = mu^2\,\frac{b-2a}{2a} \tag{14}$$

である。摩擦により消費されたエネルギーと衝突直後の運動エネルギーの和が最初の運動エネルギーである。従って

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{mu^2}{2a(1-e)^2}\left[(1-e)^2(b-2a) + 4\,(\ell - b + 2a)\right] \tag{15}$$

$$v = u\sqrt{\frac{(1-e)^2(b-2a) + 4\,(\ell - b + 2a)}{a(1-e)^2}} \tag{16}$$

問 4 の結果より

$$\ell_{\rm B} \;=\; \left(\frac{1+e}{1-e}\right)^2 \ell_{\rm A} \;=\; \left(\frac{1+e}{1-e}\right)^2 (\ell + 2a - b) \tag{17}$$

なので

$$x \;=\; b + \ell_{\rm B} \;=\; b + \left(\frac{1+e}{1-e}\right)^2 (\ell + 2a - b) \;=\; \ell + 2a + \frac{4e\,(\ell + 2a - b)}{(1-e)^2} \tag{18}$$

に円板 B の中心は静止する。

問 6

$$\vec{v}_{\rm A}{}' \;=\; -e\vec{v}_{\parallel} + \vec{v}_{\perp} \tag{19}$$

$$\vec{v}_{\rm B}{}' \;=\; e\vec{v}_{\parallel} - \vec{v}_{\perp} \tag{20}$$

問 7 トルクがかかるので，重心が動くだけでなく，円板が回転する。回転の速さは摩擦の大きさに比例するはずである。回転も摩擦により止められるが，トルクが大きければ止まるまでの回転角度が大きくなるはずである。円板に模様や印をつけ，回転による位置の変化と，重心の変化を比べれば，円板同士の摩擦による力と撃力の比を見積もれるはずである。

また円板 B の重心は中心と衝突点を結ぶ方向から少しずれる。しかし衝突点を正確に測定するのは難しいので，回転を調べる方が摩擦の効果を調べやすい。

問 8 重心系での衝突前の円板 A の速度は

$$\vec{w}_{\rm A}^{\dagger} \;=\; \frac{1}{2}\left(\vec{w}_{\parallel} + \vec{w}_{\perp}\right) \tag{21}$$

と表される。従って

$$\vec{w}_{\rm A}' \;=\; \frac{1-e}{2}\vec{w}_{\parallel} + \vec{w}_{\perp} \tag{22}$$

$$\vec{w}_{\rm B}' \;=\; \frac{1+e}{2}\vec{w}_{\parallel} \tag{23}$$

である。

問 9 移動距離が r なので速さは $\sqrt{\dfrac{r}{a}}\,u$ である。速度ベクトルは P から G へ向かうので，速度ベクトルの BP に平行な成分は $-\sqrt{\dfrac{r}{a}}\,u$ である。

問 10 円板は B から G へ向かうので，速度は $(-\cos\theta, -\sin\theta)$ の方向を向くので

$$(v'_{\mathrm{B}x}, v'_{\mathrm{B}y}) = \left(-u\sqrt{\frac{r}{a}}\cos\theta,\ -u\sqrt{\frac{r}{a}}\sin\theta\right) \tag{24}$$

である。

問 11 衝突後の円板 B が目標 G に向かうのは P 点が $[(a+r)\cos\theta, (a+r)\sin\theta]$ のときである。従って，A 点の座標は $(x_{\mathrm{A}}, y_{\mathrm{A}}) = [(2a+r)\cos\theta, (2a+r)\sin\theta]$ である。

問 12 衝突直前の速度は $\vec{v}_{\mathrm{A}} = \alpha(x_{\mathrm{A}} - \ell, y_{\mathrm{A}})$ である $(\alpha > 0)$。問 8 の結果より $\vec{v}_{\mathrm{A}} \cdot \vec{v}'_{\mathrm{B}} > 0$ でなけれなならない。この不等式にこれまでの結果を代入すると，

$$(x_{\mathrm{A}} - \ell)\cos\theta + y_{\mathrm{A}}\sin\theta < 0 \tag{25}$$

$$-\ell\cos\theta + (2a+r) < 0 \tag{26}$$

$$\cos\theta > \frac{2a+r}{\ell} \tag{27}$$

問 13 問 12 で求めた条件より，極座標で $r < \ell\cos\theta - 2a$ の範囲が求める領域である。角度 θ を変えながら，r, $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ を求めれば，図 A の青線の中が求める領域であることが示せる。$r > 0$ なので $\cos\theta > \frac{1}{2}$，つまり $|\theta| < 60^\circ$ だけが許される範囲である。

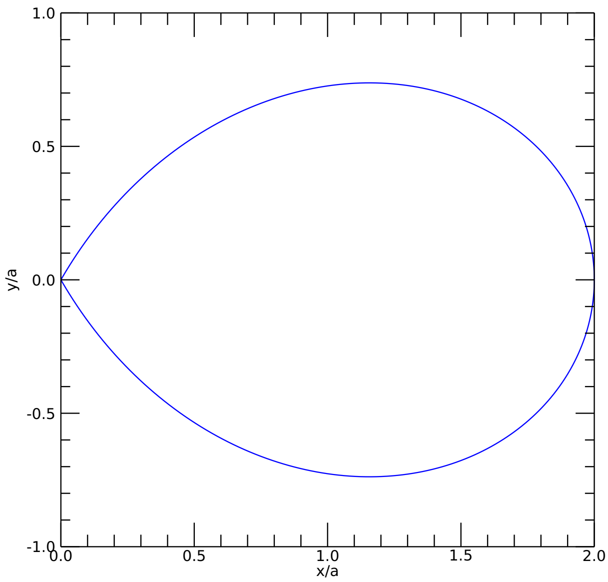


図 A

問 14 円板 B の初期位置から目標 G までの距離は $\frac{a}{2}$ なので衝突直後の速さは $\frac{\sqrt{2}}{2}u$ である。したがって衝突直後の円板 B の速度は $\boldsymbol{v}'_{\mathrm{B}} = \left(-\frac{2\sqrt{2}}{5}u, -\frac{3\sqrt{2}}{10}u\right)$ であることが分かる。

また衝突時の円板Aの中心は $(x_{\mathrm{A}}, y_{\mathrm{A}}) = \left(2a, \dfrac{3}{2}a\right)$ である。このことより衝突前の円板Aの速度は，$\left(-2a, \dfrac{3}{2}a\right)$ と平行であることが分かるので，衝突直前の速度を

$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{A}} \;=\; \alpha u \left(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right) \tag{28}$$

とおく。この速度のうちBGに平行な成分は，

$$u_{\mathrm{A}\parallel} \;=\; \boldsymbol{v}_{\mathrm{A}} \cdot \left(-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right) \;=\; \frac{7}{25}\alpha u \tag{29}$$

と求められる。問8の結果を用いると

$$\frac{\sqrt{2}}{2}u \;=\; \frac{1+e}{2}v_{\mathrm{A}\parallel} \;=\; \frac{\alpha}{5}u \tag{30}$$

が得られるので，$\alpha = \dfrac{5\sqrt{2}}{2}$ である。
円板Aが出発点 $(\ell, 0)$ を離れるときの速度を βu（ただし $\beta > 0$）とすると，エネルギー保存則より

$$\frac{m\beta^2 u^2}{2} \;=\; \frac{m\alpha^2 u^2}{2} + m\mu' g \cdot \frac{5}{2}a \tag{31}$$

が得られる。これを整理すると

$$\beta^2 \;=\; \alpha^2 + \frac{5}{2} \tag{32}$$

なので $\beta = \sqrt{15}$ である。従って初速度が

$$\boldsymbol{v}_{A0} \;=\; \beta u \left(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right) \;=\; \left(-\frac{4\sqrt{15}}{5}, \frac{3\sqrt{15}}{5}\right) u \tag{33}$$

のとき円板Bは目標Gで静止する。

解答例：課題 II

出題意図

本問題は，静電誘導により金属表面に誘起される電荷の分布を調べる電磁気学の問題です。静電誘導自身は高校の物理で学ぶ内容ですが，その数理的な側面は大学初年度に学びます。高校の微積分が理解できていれば，指示に従い順次解答することで電荷分布を導き出せるように出題されています。この問題により，電磁気の基本的な考え方や関連する数理能力，大学に入って教科書を読み進めることができるか等の能力を問います。

問 1 図の微小領域中の“ 金属表面だけに電荷 ”があり，その電荷量は σS。表面は平坦で“ 金属内では電場はゼロ ”であるため，電気力線は,“ 表面に垂直に ”表面の外側向きに出ていて，その数は $N = 4\pi k \cdot \sigma S$ 本である。電場の強さは，単位面積当たりの電気力線の数なので,

$$E = \frac{N}{S} = 4\pi k \cdot \sigma$$

となる。ちなみに，真空の誘電率 ε_0 を用いると

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$$

である。

問 2 $V(\mathrm{P})$ は

$$V(\mathrm{P}) = k\frac{q}{\sqrt{(x-a)^2+y^2}} + k\frac{q'}{\sqrt{(x-a')^2+y^2}}$$

となる。表面 $(x=0)$ で $V=0$ となるには,

$$q' < 0$$

であり,

$$\frac{q}{\sqrt{a^2+y^2}} + \frac{q'}{\sqrt{a'^2+y^2}} = 0,$$

つまり

$$q^2(a'^2+y^2) = q'^2(a^2+y^2)$$

である。これが任意の y で成り立つためには，$q^2 a'^2 = q'^2 a^2$，かつ $q^2 = q'^2$ である必要がある。この 2 式から $q' = \pm q$，$a' = \pm a$ となり，$q' < 0$ なので $q' = -q$ である。この時 $a' = a$ は置いた電荷を単に打ち消すだけの解のため不適であり，$a' = -a$ と求まる。

問 3 $\sigma(b)$ は，$(x, y) = (0, b)$ での電場 $E = -\dfrac{\mathrm{d}V(\mathrm{P})}{\mathrm{d}x}$ を用いて

$$\sigma(b) = -\frac{1}{4\pi k}\frac{\mathrm{d}V(\mathrm{P})}{\mathrm{d}x}$$

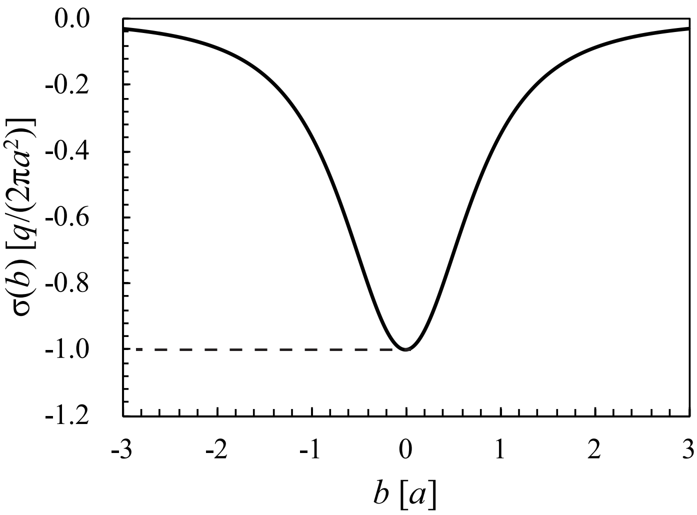
と表わされる。問 2 より

$$\frac{\mathrm{d}V(\mathrm{P})}{\mathrm{d}x} = kq\frac{-(x-a)}{\{(x-a)^2+y^2\}^{3/2}} - kq\frac{-(x+a)}{\{(x+a)^2+y^2\}^{3/2}}$$

なので，

$$\sigma(b) = -\frac{q}{2\pi}\frac{a}{(a^2+b^2)^{3/2}}$$

となる。



問 4 Q' は

$$Q' = -qa\int_0^{+\infty}\frac{b}{(a^2+b^2)^{3/2}}\mathrm{d}b$$

となる。積分は $t = b^2$ と変数変換すると初等的に計算でき，$Q' = -q$ となり，鏡像電荷 q' と同じになる。

問 5 第 2 項は，電荷 q と $\sigma(b)$ 間のクーロン力（負になるので引力），第 1 項はその x 成分（x 方向への射影）をとるための項である。

$$F = \left| -kq^2a^2 \int_0^{+\infty} \frac{b}{(b^2+a^2)^3} \mathrm{d}b \right|$$

となり，積分は $t = b^2$ と変数変換すれば初等的に計算でき，

$$F = k\frac{q^2}{4a^2}$$

となる。これは電荷 q と鏡像電荷 q' 間のクーロン引力

$$-k\frac{qq'}{(2a)^2}$$

と大きさが一致する。

問 6

$$V(\mathrm{P}) = k\frac{q}{\sqrt{(r\cos\theta - a)^2 + (r\sin\theta)^2}} + k\frac{q'}{\sqrt{(r\cos\theta - a')^2 + (r\sin\theta)^2}}$$

となる。表面 $(r = R)$ で $V = 0$ となるには，$q' < 0$ であり，また

$$q^2(R^2 + a'^2 - 2Ra'\cos\theta) = q'^2(R^2 + a^2 - 2Ra\cos\theta)$$

が任意の $\cos\theta$ で成り立てばよい。つまり，

$$\begin{aligned} q^2(R^2 + a'^2) &= q'^2(R^2 + a^2) \\ q^2Ra' &= q'^2Ra \end{aligned}$$

が成立すればよく，この 2 式から

$$\begin{aligned} q' &= \pm\frac{R}{a}q \\ a' &= \frac{R^2}{a} \end{aligned}$$

が得られる。これより

$$\begin{aligned} q' &= -\frac{R}{a}q \\ a' &= \frac{R^2}{a} \end{aligned}$$

と求まる。

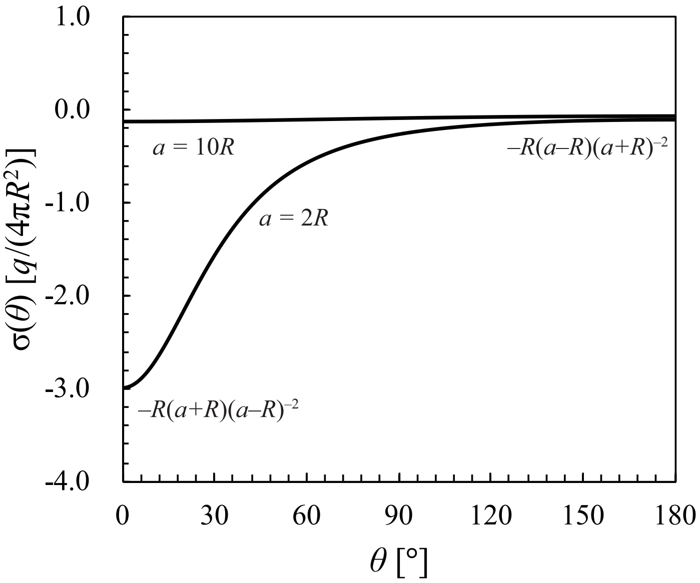
問 7 問 3 と同様に $r = R$ での電場を用いると，$\sigma(\theta)$ は

$$\sigma(\theta) = -\frac{1}{4\pi k}\frac{\mathrm{d}V(\mathrm{P})}{\mathrm{d}r}$$

であるから，問 6 の $V(\mathrm{P})$ を代入して実行（微分して a'，q'，$r = R$ を代入）すると，

$$\sigma(\theta) = -\frac{q}{4\pi R}\frac{a^2 - R^2}{(a^2 + R^2 - 2aR\cos\theta)^{3/2}}$$

と求まる。



問 8 E_0 は

$$E_0 = 2 \times k\frac{q}{a^2}$$

なので，

$$q = \frac{E_0 a^2}{2k}$$

となる。また，

$$V_1(\mathrm{P}) = \frac{E_0}{2}\frac{a^2}{(r^2 + a^2 - 2ra\cos\theta)^{1/2}} - \frac{E_0}{2}\frac{a^2}{(r^2 + a^2 + 2ra\cos\theta)^{1/2}}$$

となる。

問 9 $V_1(\mathrm{P})$ は

$$V_1(\mathrm{P}) = \frac{E_0 a}{2}\left\{1+\left(\frac{r}{a}\right)^2 - 2\cdot\frac{r}{a}\cdot\cos\theta\right\}^{-1/2} - \frac{E_0 a}{2}\left\{1+\left(\frac{r}{a}\right)^2 + 2\cdot\frac{r}{a}\cdot\cos\theta\right\}^{-1/2}$$

である。ここで $\frac{r}{a} \ll 1$ として近似すると，

$$V_1(\mathrm{P}) \cong \frac{E_0 a}{2}\left\{1+\frac{r}{a}\cos\theta - \left(1-\frac{r}{a}\cos\theta\right)\right\} = E_0 r\cos\theta$$

となる。

問 10 鏡像位置を A′，C′ とすると，$V_2(\mathrm{P})$ は

$$\begin{aligned} V_2(\mathrm{P}) &= \frac{kq'}{\mathrm{PA'}} + \frac{-kq'}{\mathrm{PC'}} \\ &= \frac{kq'}{(r^2+a'^2-2ra'\cos\theta)^{1/2}} + \frac{-kq'}{(r^2+a'^2+2ra'\cos\theta)^{1/2}} \end{aligned}$$

となる。a' と q' を代入すると，

$$\begin{aligned} V_2(\mathrm{P}) &= -\frac{E_0 a}{2}\left\{\left(\frac{r}{R}\right)^2 + \left(\frac{R}{a}\right)^2 - 2\cdot\frac{r}{R}\cdot\frac{R}{a}\cos\theta\right\}^{-1/2} \\ &\quad +\frac{E_0 a}{2}\left\{\left(\frac{r}{R}\right)^2 + \left(\frac{R}{a}\right)^2 + 2\cdot\frac{r}{R}\cdot\frac{R}{a}\cos\theta\right\}^{-1/2} \\ &= -\frac{E_0 a}{2}\frac{R}{r}\left[\left\{1+\left(\frac{R^2}{ra}\right)^2 - 2\frac{R^2}{ra}\cos\theta\right\}^{-1/2} - \left\{1+\left(\frac{R^2}{ra}\right)^2 + 2\frac{R^2}{ra}\cos\theta\right\}^{-1/2}\right] \\ &\cong -\frac{E_0 aR}{2r}\left\{\left(1+\frac{R^2}{ra}\cos\theta\right) - \left(1-\frac{R^2}{ra}\cos\theta\right)\right\} \\ &= -E_0\frac{R^3}{r^2}\cos\theta \end{aligned}$$

が得られる。

問 11 等電位線は，

$$V_2 = -E_0\frac{R^3}{r^2}\cos\theta = \phi$$

であるから，

$$r^2 = \gamma\cos\theta$$

である。ただし

$$\gamma = -\frac{E_0 R^3}{\phi}$$

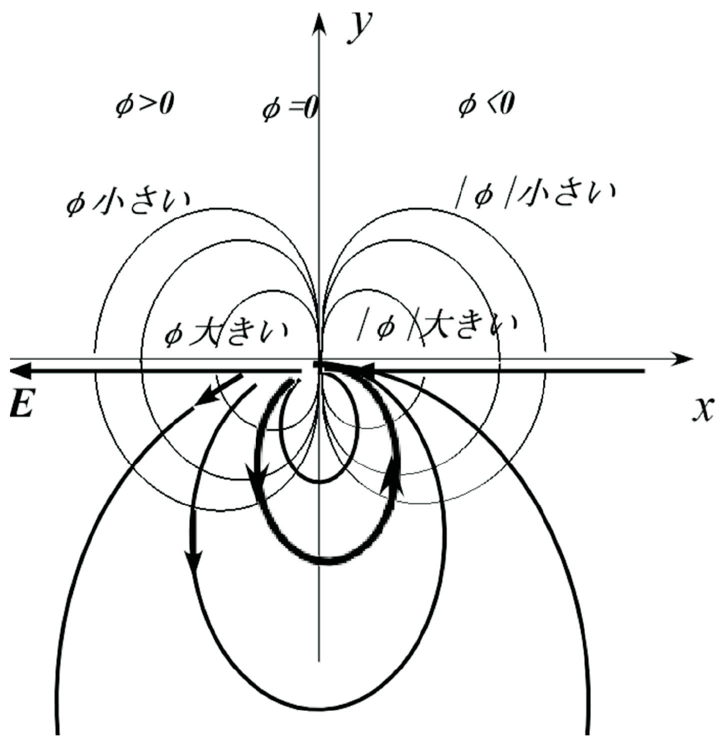
である。デカルト座標で書くと,

$$r^3 = (x^2 + y^2)^{3/2} = \gamma x$$

となる。故に,

$$y = \pm\sqrt{|\gamma|^{2/3}|x|^{2/3} - x^2}$$

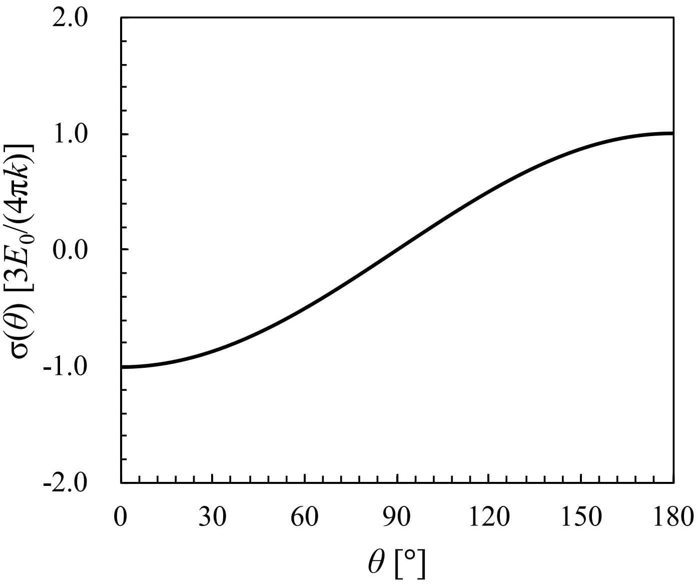
の曲線となる。特に，正の電位$\phi > 0$は$\gamma < 0$なので$x < 0$領域のみに存在，負の電位$\phi < 0$は$\gamma > 0$なので$x > 0$領域のみに存在，また$x = 0$が$V_2 = \phi = 0$。例えば$\phi < 0$なら，曲線は$0 \leq x \leq \sqrt{\gamma}$の範囲のみに存在し，$x = \sqrt{\gamma}/3^{4/3}$で$y$は極値を持つ。また$|\phi|$が大きいと$|\gamma|$が小さい曲線となる。以上に注意して図を描くと次の図のようになる。また，電気力線は電位の高いところから低い方に，等電位の曲線に直交してつないでいく（図の矢印太線）。



問 12 問 3，問 7 と同様に計算すると，

$$\begin{aligned}\sigma(\theta) &= \frac{1}{4\pi k}\left(-E_0\cos\theta - 2E_0\frac{R^3}{R^3}\cos\theta\right)\\ &= -\frac{3}{4\pi k}E_0\cos\theta\end{aligned}$$

となる。



問 13 問 11 の結果から，一様電場中の金属球は，球の $+x$ 方向に負，$-x$ 方向に正の電荷が誘起されている。(a) 2 つの球が電場方向に真横に (例えば y 軸上に) 並ぶと，2 つの球の正と正，負と負の電荷どうしが，異符号の電荷より近いことになり，球間には斥力がはたらく。一方，(b) 2 つの球が電場方向に (例えば x 軸上に) 並ぶと，球間側に誘起された正負の電荷が同符号の電荷より近くにあるので，球間には引力がはたらく。（異符号の電荷どうしは近い距離と遠い距離にあり，同符号の電荷どうしはその間の距離にあるため，引力と斥力の競争となる）