令和８年度

千葉大学先進科学プログラム入学者選抜課題

課題（数学）

解答例

# 解答例：数学

## 問 1

(1) $x=-1$ が解なので因数分解して残りの 2 次方程式を解くと，他の 2 つの解が $x=-1, x=4$ と得られる。　したがって，解は，$\underline{x=-1\ (\text{重解}), x=4}$　である。

(2) $\sin 2x = 2\sin x\cos x$ を用いると，$0=\cos x(2\sin x+\sqrt{3})$ となるので，$\cos x = 0$ または $2\sin x+\sqrt{3}=0$ より
解は，$\underline{x=\frac{\pi}{2}, \frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{3}}$　である。

(3) $1=\log_2(x-2)-\dfrac{\log_2(x+1)}{\log_2 4}=\dfrac{1}{2}\log_2\dfrac{(x-2)^2}{(x+1)}$
$\Rightarrow 2^2=\dfrac{(x-2)^2}{x+1} \Leftrightarrow 0=x(x-8) \Leftrightarrow x=0, x=8$
$x>2$ であるので，$\underline{x=8}$　のみが解である。

## 問 2

$a_1=-10, a_{n+1}=1-\dfrac{a_n}{2}$ であるから，
$b_n=a_n+\alpha, b_{n+1}=\beta b_n$ とおくと, $\beta=-\dfrac{1}{2}, \alpha=-\dfrac{2}{3}, b_1=a_1-\dfrac{2}{3}=-\dfrac{32}{3}$ である。
したがって，$b_n=\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}b_1=-\dfrac{32}{3}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$ となることがわかるので，一般項は,

$$\underline{a_n=\frac{2}{3}-\frac{32}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}}$$

である。

## 問 3

(1)　$\dfrac{x+1}{x^3-1}=\dfrac{x+1}{(x-1)(x^2+x+1)}=\dfrac{a}{x-1}+\dfrac{b(2x+1)}{x^2+x+1}$ のように定数 $a$，$b$ を用いて変形できれば，$\displaystyle\int\frac{1}{x-1}=\log|x-1|+C$，$\displaystyle\int\frac{2x-1}{x^2+x+1}=\log(x^2+x+1)+C$ より，不定積分を求めることができる。
$\dfrac{a}{x-1}+\dfrac{b(2x+1)}{x^2+x+1}=\dfrac{(a+2b)x^2+(a-b)x+a-b}{(x-1)(x^2+x+1)}$ であるから，$a+2b=0$，$a-b=1$ を満たす $a$，$b$ を求めると，$a=\dfrac{2}{3}$,　$b=-\dfrac{1}{3}$ である。したがって，
$\underline{\displaystyle\int\frac{x+1}{x^3-1}\,dx=\frac{2}{3}\log|x-1|-\frac{1}{3}\log(x^2+x+1)+C=\frac{1}{3}\log\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1}+C}$　である。

(2) $\underline{\displaystyle\int \frac{\log x}{\sqrt{x}}dx = (2\sqrt{x})\log x - \int \frac{2\sqrt{x}}{x}dx = 2\sqrt{x}\log x - 4\sqrt{x} + C}$

(3) $t = \tan\dfrac{x}{2}$ とおくと，$\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{\cos\frac{x}{2}}{2\cos\frac{x}{2}} + \dfrac{\sin^2\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}} = \dfrac{1+\tan^2\frac{x}{2}}{2} = \dfrac{1+t^2}{2}$ である。また，$\dfrac{1}{1+\cos x} = \dfrac{1}{1+(2\cos^2\frac{x}{2}-1)} = \dfrac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}} = \dfrac{1+\tan^2\frac{x}{2}}{2} = \dfrac{1+t^2}{2}$ である。積分区間は $0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ から $0 \leqq t \leqq 1$ に変更されるので，
$\underline{\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\cos x} = \int_0^1 \frac{1+t^2}{2}\cdot\frac{2dt}{1+t^2} = \int_0^1 dt = 1}$ である。

**問 4**

$z^4 + 8(1+\sqrt{3}i) = 0$
$|z^4| = 16, z^4 = 16\left(\cos\dfrac{4\pi}{3} + i\sin\dfrac{4\pi}{3}\right)$
$\Rightarrow z = 2\left\{\cos\left(\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{n\pi}{2}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{n\pi}{2}\right)\right\}\ (n = 0, 1, 2, 3)$
したがって，$\underline{z = 1+\sqrt{3}i,\ -\sqrt{3}+i,\ -1-\sqrt{3}i,\ \sqrt{3}-i}$ である。

**問 5**

$S$ は，玉の番号 $(0, 1, \ldots, n-1)$ の和である。

(1) $S = 0$ となるのは，最初に 0 を取り出す場合であるので，

$$\underline{P(S=0) = \frac{1}{n}}$$

である。

(2) $S = 3$ となるのは，(A) 最初に 3 を取り出し，次に 0 を取り出す場合と，(B) 最初に 2 もしくは 1 を取り出し，次に 1 もしくは 2 を取り出し，次に 0 を取り出す場合である。(A) の確率は $\dfrac{1}{n(n-1)}$ であり，(B) の確率は $\dfrac{1}{n(n-1)(n-2)} \times 2$ であるので，

$$\underline{P(S=3) = \frac{1}{n(n-1)} + \frac{2}{n(n-1)(n-2)} = \frac{1}{(n-1)(n-2)}}$$

である。

(3) $S$ が最大値 $S_{\max}$ を取るのは，すべての玉を取り出した場合であり，最後に 0 を取り出す必要がある。その場合，途中で取り出す玉の番号は，0 以外であれば順番は考えなくてよい。したがって，

$$\underline{S_{\max} = 0+1+\cdots+(n-1) = \frac{n(n-1)}{2}}$$

$$\underline{P(S=S_{\max}) = \frac{n-1}{n}\times\frac{n-2}{n-1}\times\cdots\times\frac{1}{2} = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}}$$

である。

**問 6**

(1)　与えられた条件から，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=4$ である。
また，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} = |\overrightarrow{\mathrm{OA}}|\,|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|\cos\frac{\pi}{3} = 2\sqrt{a^2+4}\cos\frac{\pi}{3} = \sqrt{a^2+4}$ である。
これらの式から，$\underline{a=2\sqrt{3}}$ である。

(2)　$\vec{b}=(2,0,0)$，$\vec{c}=(2,2\sqrt{3},0)$ とし，線分 OB 上にある，円錐の底面の円の中心の位置ベクトルを $\vec{d}=(2k,2\sqrt{3}k,0)$ とすると，$\left(\vec{b}-\vec{d}\right)\cdot\vec{c}=0$ である。この内積の計算をすすめて整理すれば，$k=\frac{1}{4}$ である。したがって，底面の円の半径は，$\left|\vec{b}-\vec{d}\right|=\sqrt{3}$。
また，円錐の高さは，$\left|\vec{d}\right|=1$。よって，円錐の体積は，$\underline{\frac{1}{3}\times\pi(\sqrt{3})^2\times 1=\pi}$ である。

(3) 底面の円は，中心の座標を $\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0\right)$ とする半径 $\sqrt{3}$ の球面と，$\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0\right)$ を法線として，$\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0\right)$ を通る平面の交点。球面は，$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+z^2=3$ と表され，平面は，$\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}\left(y-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=0$ と表される。$(x_0,y_0,z_0)$ はこの両方を満たす。平面の式から，$y_0-\frac{\sqrt{3}}{2}=-\frac{\sqrt{3}}{3}\left(x_0-\frac{1}{2}\right)$ であるので，これを球の式に代入して整理すれば，$\left(x_0-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{4}(3-z_0^2)\geqq 0$ であるから，まず，$z_0$ の範囲は，$\underline{-\sqrt{3}\leqq z_0\leqq\sqrt{3}}$ である。さらに，$x_0$ は，$\underline{x_0=\frac{1\pm\sqrt{3(3-z_0^2)}}{2}}$ であり，$y_0$ は複号同順で，$\underline{y_0=\frac{\sqrt{3}\mp\sqrt{(3-z_0^2)}}{2}}$ である。

**問 7**

$f'(x) = \sin x + x\cos x$ であるから，$y = f(x)$ 上の点 $(a, a\sin a)$ での接線は，$y - a\sin a = (\sin a + a\cos a)(x-a)$ である。これを整理すれば，$y = (\sin a + a\cos a)x - a^2\cos a$ となる。この接線が原点 O を通るので，$a^2\cos a = 0$，つまり，$a = 0$ と，$n$ を整数として，$a = \dfrac{\pi}{2} + n\pi$ は $a^2\cos a = 0$ を満たす。これを接線の式に代入すれば，$y = 0$ と $y = (-1)^n x$ となる。すなわち，求める接線は，$\underline{y = 0，y = x \text{ と } y = -x}$ であり，それぞれの接点は，$\underline{(0,0)\ （接線は\ y=0）}$，$\underline{n\ が偶数のとき\ \left(\dfrac{\pi}{2}+n\pi, \dfrac{\pi}{2}+n\pi\right)\ （接線は\ y=x）}$，$\underline{n\ が奇数のとき\ \left(\dfrac{\pi}{2}+n\pi, -\dfrac{\pi}{2}-n\pi\right)\ （接線は\ y=-x）}$ である。