平成 30 年度

千葉大学先進科学プログラム入学者選考課題

課題 I

解答例

解答例 [I]

出題意図

打ち上げ花火を題材にして，質点の運動を問うことで，力学の基礎事項（力が働かない場合の慣性の法則と等速度運動，一様な力が働く場合の等加速度運動，抵抗力の働く場合の終端速度の存在等）を物理として理解しているか，及び，それらを数式を用いて表現できるか否かを確認する。

問１では，重力だけが働く場合の打ち上げ花火の運動を，数式を用いずに考察し，問題の本質的な理解を正確な文章と図で伝えられるかという表現能力を問う。

問２では，問１と同じ条件の下での花火の運動を，運動方程式を用いて考えることで，数理的考察能力および数学の運用能力を問う。

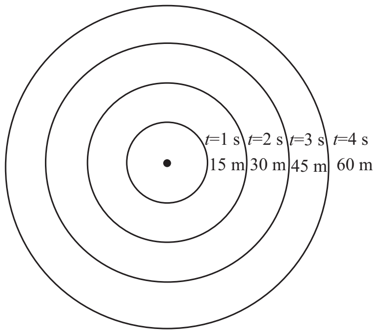
問３では，重力に加え，大気の抵抗が加わったより現実的な場合に，花火の運動はどのように変化するかを，前問の結果を踏まえて，総合的に考察できるかを判定する。

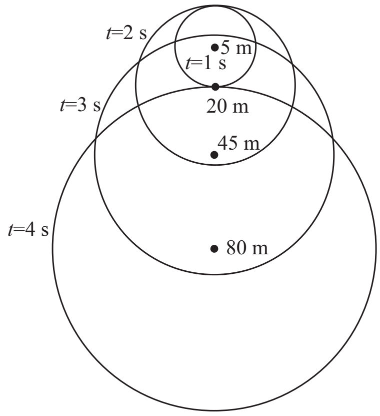
問２，問３では，運動方程式を微分方程式（微分を含む方程式）として認識はするが，それを数学の問題として直接解くことはせず，それに代わって，重力が消えるような別の座標系に移れば，問題を簡単化できるという物理的設定で考察してもらう。一様な（位置や速度に依存しない）重力と速度に比例する抵抗力とはかなり異質な力であることが認識できる。

これは，微分方程式の数学的解法に関する知識を要求せずに，重力があるために生じる非斉次項を持つ線形微分方程式（運動方程式）の一般解が，重力が消去された斉次の線形微分方程式の一般解に非斉次の線型方程式の特解を足した形で与えられることを物理的視点から捉えたことになっていると考える。

問１ (a) 解答例：鉛直下向きの重力が鉛直上向きの慣性力と釣り合うため（等価原理），自由落下する観測者は重力を感じないので，打ち出された質点には何も力が働いていないように見える。よって，慣性の法則（Newton の運動第１法則）により，質点達は初速 v_0 で等速度直線運動をする。従って，時刻 t での質点達の到達曲面は放射点を中心とする半径 $v_0 t$ の球面である。

(b) 解答例：それぞれ，高度 h の点を中心とする半径 $v_0 t = 15, 30, 45, 60$ m の同心球面となる。





解答例の図: 問 1（b）拡大する同心球面，問 1（d）自由落下しながら拡大する球面

(c) 解答例：どの質点も各 t 毎の到達曲面は球面であるが，自由落下の法則（等加速度運動の式）により，同じ距離 $\frac{1}{2}gt^2$ だけ落下するように見えるため，到達曲面は，問 1(a) で求めた半径 v_0t の球面と自由落下 $\frac{1}{2}gt^2$ の合成となる。

(d) 解答例：自由落下の法則により，時刻 $t = 1, 2, 3, 4$ 秒には，どの質点も距離 $\frac{1}{2}gt^2 = 5, 20, 45, 80$ m だけそれぞれ落下する。これらの落下点を中心とする半径 $v_0t = 15, 30, 45, 60$ m の球面をそれぞれ描けばよい。

問 2 (a) 解答例：自由落下する座標系 (x', y', z') では, 重力と慣性力の合力がゼロとなるので

$$m\frac{d^2x'}{dt^2} = 0, \quad m\frac{d^2y'}{dt^2} = 0, \quad m\frac{d^2z'}{dt^2} = 0. \tag{1}$$

座標系 (x, y, z) では重力が働くので,

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = 0, \quad m\frac{d^2z}{dt^2} = -mg. \tag{2}$$

(b) 解答例：変換式を

$$x(t) = x'(t), \quad y(t) = y'(t), \quad z(t) = z'(t) - \frac{1}{2}gt^2 + h, \tag{3}$$

とすると，速度は,

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{dx'(t)}{dt}, \qquad \frac{dy(t)}{dt} = \frac{dy'(t)}{dt}, \qquad \frac{dz(t)}{dt} = \frac{dz'(t)}{dt} - gt, \tag{4}$$

加速度は,

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = \frac{d^2x'(t)}{dt^2}, \qquad \frac{d^2y(t)}{dt^2} = \frac{d^2y'(t)}{dt^2}, \qquad \frac{d^2z(t)}{dt^2} = \frac{d^2z'(t)}{dt^2} - g, \tag{5}$$

よって，運動方程式は重力を含まない (1) から (2) が得られる。

[参考:$t = 0$ での初期条件は以下のように満たされる。]

$$x(0) = x'(0) = 0, \quad y(0) = y'(0) = 0, \quad z(0) = z'(0) + h = h. \tag{6}$$

$$v'_x(0) = v_x(0) = v_0 \cos\alpha \cos\varphi,\ v'_y(0) = v_y(0) = v_0 \cos\alpha \sin\varphi,$$

$$v'_z(0) = v_z(0) = v_0 \sin\alpha. \tag{7}$$

(c) 解答例：$t = 0$ で速度ベクトルは両座標系で一致するので,

$$v_x^0 = v_0 \cos\alpha \cos\varphi, \quad v_y^0 = v_0 \cos\alpha \sin\varphi, \quad v_z^0 = v_0 \sin\alpha. \tag{8}$$

(d) 解答例：自由落下する観測者の座標系 (x', y', z') では重力は働かないので，質点の運動は等速直線運動であり，これが運動方程式の解である。位置は,

$$x'(t) = v_0 t \cos\alpha \cos\varphi,\ y'(t) = v_0 t \cos\alpha \sin\varphi,\ z'(t) = v_0 t \sin\alpha. \tag{9}$$

これらが時刻 $t = 0$ での全ての初期条件を満たし，かつ，運動方程式の解になっていることは簡単に確かめられる。よって，(3) の関係式より,

$$x(t) = v_0 t \cos\alpha \cos\varphi,\ y(t) = v_0 t \cos\alpha \sin\varphi,\ z(t) = v_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2} g t^2 + h. \tag{10}$$

(e) 解答例：角度変数を消去していく。まず，φ を消去する,

$$x^2 + y^2 = v_0^2 t^2 \cos^2\alpha, \quad \left(z + \frac{1}{2} g t^2 - h\right)^2 = v_0^2 t^2 \sin^2\alpha. \tag{11}$$

次に，α を消去する,

$$x^2 + y^2 + \left(z + \frac{1}{2} g t^2 - h\right)^2 = (v_0 t)^2. \tag{12}$$

この式は，中心が $(0, 0, h - \frac{1}{2} g t^2)$ で半径が $v_0 t$ の球面をあらわす。質点の集合は，高度 h から鉛直下向きに $-\frac{1}{2} g t^2$ だけ自由落下した半径 $v_0 t$ の球面を描く。

(f) 解答例：式 (10) の x と y から,

$$t = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{v_0 \cos\alpha}. \tag{13}$$

これを式 (10) の z に代入すると，軌道の式が得られる。

$$z = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\sqrt{x^2+y^2} - \frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}(x^2+y^2)+h. \tag{14}$$

(g) 解答例：式 (12) を t^2 の 2 次方程式と見ると，

$$\frac{1}{4}g^2(t^2)^2 + [(z-h)g - v_0^2]t^2 + (z-h)^2 + x^2 + y^2 = 0. \tag{15}$$

t^2 が実数解を持つのは，その判別式が非負のとき

$$[(z-h)g - v_0^2]^2 - g^2[(z-h)^2 + x^2 + y^2] \geqq 0. \tag{16}$$

これを整理すると $z-h$ の 2 次の項はキャンセルして，

$$z \leqq h + \frac{v_0^2}{2g} - \frac{g}{2v_0^2}(x^2+y^2). \tag{17}$$

よって，質点の到達可能領域は，上に凸な回転放物面（上に凸な放物線をその対称軸 z 軸の周りに回転させて得られる面）とその内部となる。この放物線は鉛直投射の最高到達高度 $h+\frac{v_0^2}{2g}$ を頂点に持つ。高度 h の水平面では，斜方投射の最大水平到達距離 $\frac{v_0^2}{g}$ で特徴付けられる。[これは，自由落下しながら拡大する球面の包絡面である。]

地表面との交点を表す領域は，$z=0$ とおいて求められる，以下の円内である。

$$0 \leqq x^2+y^2 \leqq \frac{2v_0^2}{g}\left(h + \frac{v_0^2}{2g}\right). \tag{18}$$

解答例：別解: 軌道の式 (14) の角度依存性を $\tan\alpha$ で統一して書くと，

$$z = \tan\alpha\sqrt{x^2+y^2} - \frac{g}{2v_0^2}(\tan^2\alpha+1)(x^2+y^2)+h. \tag{19}$$

式 (19) を $\tan\alpha$ の 2 次式と見ると，

$$\tan^2\alpha - \frac{2v_0^2}{g\sqrt{x^2+y^2}}\tan\alpha + \frac{2v_0^2}{g(x^2+y^2)}(z-h)+1=0. \tag{20}$$

実数解を持つのは，その判別式が非負のときで，(17) と一致する。

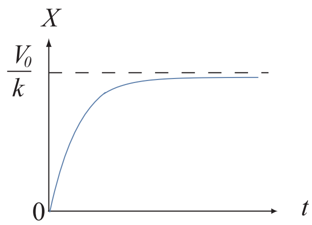
$$\frac{v_0^4}{g^2(x^2+y^2)} - \frac{2v_0^2(z-h)}{g(x^2+y^2)} - 1 \geqq 0 \Longrightarrow z \leqq h + \frac{v_0^2}{2g} - \frac{g}{2v_0^2}(x^2+y^2). \tag{21}$$

問 3 (a) 解答例：$V(t) = V_0 e^{-kt}$ を t で積分し，$t=0$ で $X=0$ となるように積分定数を

選ぶと

$$X(t) = \frac{V_0}{k}(1 - e^{-kt}). \tag{22}$$

グラフは $t = 0$ で $X = 0$ から単調増加して，$t \to \infty$ で $X \to \frac{V_0}{k}$ に漸近する。上限値 $\frac{V_0}{k}$ があることに注意。



解答例の図: 問 3（a）抵抗力だけが働く運動

(b) 解答例：

$$m\frac{dv_x}{dt} = -kmv_x, \quad m\frac{dv_y}{dt} = -kmv_y, \quad m\frac{dv_z}{dt} = -kmv_z - mg. \tag{23}$$

(c) 解答例：変換式を

$$x = \tilde{x},\ y = \tilde{y},\ z = \tilde{z} - \frac{g}{k}t + h, \tag{24}$$

とすると，以下のように重力が消去されることがわかる。

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d\tilde{x}}{dt},\ \frac{dy}{dt} = \frac{d\tilde{y}}{dt},\ \frac{dz}{dt} = \frac{d\tilde{z}}{dt} - \frac{g}{k} \Longrightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2\tilde{x}}{dt^2},\ \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2\tilde{y}}{dt^2},\ \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{d^2\tilde{z}}{dt^2},$$
$$\Longrightarrow m\frac{d\tilde{v}_x}{dt} = -km\tilde{v}_x, \quad m\frac{d\tilde{v}_y}{dt} = -km\tilde{v}_y, \quad m\frac{d\tilde{v}_z}{dt} = -km\tilde{v}_z. \tag{25}$$

(d) 解答例：(a) と (c) を用いると

$$\begin{aligned}
x(t) =& \frac{1}{k}v_0\cos\alpha\cos\varphi(1 - e^{-kt}), \quad y(t) = \frac{1}{k}v_0\cos\alpha\sin\varphi(1 - e^{-kt}),\\
z(t) =& \frac{1}{k}\left(v_0\sin\alpha + \frac{g}{k}\right)(1 - e^{-kt}) - \frac{g}{k}t + h,\\
&\to z(t) + \frac{g}{k}t - \frac{g}{k^2}(1 - e^{-kt}) - h = \frac{v_0}{k}\sin\alpha(1 - e^{-kt}).
\end{aligned} \tag{26}$$

[参考:これは，$t = 0$ での初期条件 $x(0) = 0, y(0) = 0, z(0) = h,$ を満たし，か

つ，$v_x(0)=v_0\cos\alpha\cos\varphi, v_y(0)=v_0\cos\alpha\sin\varphi, v_z(0)=v_0\sin\alpha,$ を満たす。]

$$\begin{aligned} v_x(t) =& v_0\cos\alpha\cos\varphi e^{-kt}, \quad v_y(t)=v_0\cos\alpha\sin\varphi e^{-kt}, \\ v_z(t) =& \left(v_0\sin\alpha+\frac{g}{k}\right)e^{-kt}-\frac{g}{k}. \end{aligned} \tag{27}$$

(e) 解答例：角度変数を消去していく。まず，φ を消去する，

$$\begin{aligned} x^2+y^2 =& \frac{v_0^2}{k^2}(1-e^{-kt})^2\cos^2\alpha, \\ \left[z+\frac{g}{k}t-\frac{g}{k^2}(1-e^{-kt})-h\right]^2 =& \frac{v_0^2}{k^2}(1-e^{-kt})^2\sin^2\alpha. \end{aligned} \tag{28}$$

次に，α を消去する，

$$x^2+y^2+\left[z+\frac{g}{k}t-\frac{g}{k^2}(1-e^{-kt})-h\right]^2=\left[\frac{v_0}{k}(1-e^{-kt})\right]^2. \tag{29}$$

この式は，中心が $(0,0,h-\frac{g}{k}t+\frac{g}{k^2}(1-e^{-kt}))$ で半径が $\frac{v_0}{k}(1-e^{-kt})$ の球面をあらわす。よって，大気の抵抗が働いても z 軸上を落下する（自由落下では無いが）球面になる。球は十分時間が経過すると終端速度 $\frac{g}{k}$ で落下する。

(f) 解答例：t が小さいときは $e^x=1+x+\frac{1}{2}x^2$ を用いて $1-e^{-kt}=kt-\frac{1}{2}k^2t^2$ を (29) に代入してみればわかるように，到達可能領域の境界面は，大気の抵抗が無い場合の回転放物面に近い。

t が大きくなると，到達可能領域の境界面は回転放物面からずれて半径 $\frac{v_0}{k}$ の円筒面に近づいていく。なぜなら，関数 $1-e^{-kt}$ は時間の経過に伴って 0 から 1 の値をとるので，球の半径は $\frac{v_0}{k}$ より大きくなることはないから。

よって，地表面との交点は，十分時間が経過すると

$$0\leqq x^2+y^2\leqq\left(\frac{v_0}{k}\right)^2. \tag{30}$$

式 (29) は，もはや t^2 の 2 次方程式では無いので以前の議論は使えない。[しかし，到達可能領域は，z 軸上を落下する球面の包絡面であることにかわりはない。]

[参考:問 2(g)] パラメータ α を持つ一群の軌道の包絡線は，軌道の方程式，

$$F(x,y,z,\alpha):=z-\tan\alpha\sqrt{x^2+y^2}+\frac{g}{2v_0^2}(\tan^2\alpha+1)(x^2+y^2)-h=0, \tag{31}$$

とそのパラメータ微分

$$\frac{\partial F(x,y,z,\alpha)}{\partial\alpha}=-\sec^2\alpha\sqrt{x^2+y^2}+\frac{g}{v_0^2}\sec^2\alpha\tan\alpha(x^2+y^2)=0, \tag{32}$$

から α を消去してえられる。実際，2 番目の式から

$$\tan\alpha = \frac{v_0^2}{g\sqrt{x^2+y^2}}. \tag{33}$$

これを 1 番目の式に代入すると，次式が得られる。

$$z = h + \frac{v_0^2}{2g} - \frac{g}{2v_0^2}(x^2+y^2). \tag{34}$$

[参考:問 3(d)] 重力と抵抗力が働く場合の運動方程式は，重力を非斉次項として持つ線形常微分方程式であるから，その一般解は，重力をゼロとして抵抗力のみの場合の斉次方程式の一般解（初期条件で決まる減衰運動）と抵抗力と重力を含む非斉次方程式の特解（終端速度での等速度運動）の和となる。

重力のみが働く場合，その一般解は，斉次方程式，つまり，全く力が働かない場合の一般解（初期条件で決まる等速直線運動）と重力による非斉次方程式の特解（自由落下運動，等加速度運動）の和として与えられるので，問 1 は正しい。

これら二つの場合の違いが理解できているか。(24) の座標変換は，特解部分を変換の一部に持ち，残りが斉次方程式の一般解に対応するとわかる。]

[注意：問 3(d)] 重力と抵抗力は力としては加え合わせられるが，それぞれの力による運動方程式を別々に解いた後で，それらの解としての位置ベクトルを加え合わせたものは，重力と抵抗力が同時に働く場合の運動方程式の解にはならない。問 1 との違いに注意。]