平成 24 年度

千葉大学先進科学プログラム入学者選考課題

課題論述

実施時間［9:00－17:00］

課題 II-A, II-B, II-C

（ 10:00－15:30 ）

注意事項

課題Ⅱには、[Ⅱ－A]、[Ⅱ－B]、[Ⅱ－C]、[Ⅱ－D]、[Ⅱ－E]の５題があります。
志望するコースによって、次に示す問題を解答してください。

- 物理学コース：
  [Ⅱ－A]、[Ⅱ－B]の２題を解答してください。
- フロンティアテクノロジーコース
  [Ⅱ－A]、[Ⅱ－B]、[Ⅱ－C]の中から２題を選択して解答してください。
- 人間探求コース：
  [Ⅱ－A]、[Ⅱ－B]、[Ⅱ－C]、[Ⅱ－D]、[Ⅱ－E]の中から２題を選択して解答してください。

$\boxed{\textbf{II–A}}$

図１のような，両端に質量 m の小球 A，B が取り付けられた，軽くて変形しない細い棒（長さ 2ℓ）の運動を考える。

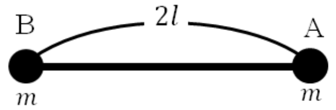

図 1: 両端に小球が取り付けられた棒

問１ この棒がなめらかな水平面上を運動している。外力が働いていないので，棒の重心は等速直線運動し，小球 A と B は，棒の重心から見てその周りに一定角速度 ω で回転運動している。

(1) 棒の重心から見た小球 A の座標 $\vec{r}_{\mathrm{A}} = (x_{\mathrm{A}}, y_{\mathrm{A}})$ が，時刻 t の関数として

$$x_{\mathrm{A}} = \ell \cos \omega t$$
$$y_{\mathrm{A}} = \ell \sin \omega t$$

と与えられるとき，これらの時刻 t に関する微分を計算し，棒の重心から見た小球 A の速度

$$\vec{v}_{\mathrm{A}} = \left(\frac{\mathrm{d}x_{\mathrm{A}}}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}y_{\mathrm{A}}}{\mathrm{d}t}\right)$$

と加速度

$$\vec{a}_{\mathrm{A}} = \left(\frac{\mathrm{d}^2x_{\mathrm{A}}}{\mathrm{d}t^2}, \frac{\mathrm{d}^2y_{\mathrm{A}}}{\mathrm{d}t^2}\right)$$

を，時刻 t の関数として求めなさい。

(2) ２つの小球の回転運動の運動エネルギーを求めなさい。

(3) 水平面上に固定された原点 O から見た棒の重心の速度（一定値）を (V_x, V_y) とするとき，原点 O から見た小球 A の速度と加速度を，時刻 t の関数として表しなさい。

問２ 以下では，水平面上に固定された原点 O から見た小球 A, B の速度を，それぞれ $\vec{v}_{\mathrm{A}}, \vec{v}_{\mathrm{B}}$ とする。原点 O から見た棒の重心の速度は $\vec{V} = \dfrac{1}{2}(\vec{v}_{\mathrm{A}} + \vec{v}_{\mathrm{B}})$ であり，小球 B から見た小球 A の速度は $\vec{v} = \vec{v}_{\mathrm{A}} - \vec{v}_{\mathrm{B}}$ である。

(1) $\vec{v}_{\mathrm{A}}$ と $\vec{v}_{\mathrm{B}}$ を $\vec{V}$ と $\vec{v}$ で表しなさい。

(2) ２つの小球の運動エネルギーの合計 T は，一般に

$$T = \frac{m}{2}\left(\left|\vec{v_{\mathrm{A}}}\right|^2 + \left|\vec{v_{\mathrm{B}}}\right|^2\right) = \frac{M}{2}\left|\vec{V}\right|^2 + \frac{\mu}{2}\left|\vec{v}\right|^2$$

と表せる。この等式を証明し，M と μ を求めなさい。

(3) 棒の回転角速度を ω とすると，

$$|\vec{v}|^2 = 4\omega^2\ell^2$$

と表されることを示しなさい。

問 3 図 2 のように，なめらかな水平面上にこの棒を静かに置き，時刻 $t = 0$ で小球 A に，棒に垂直方向の初速度 v_0 を与えた。時刻 $t > 0$ における棒の運動について，以下の問いに答えなさい。

(1) 原点 O から見た棒の重心の座標 (X, Y) を，時刻 t の関数として求めなさい。

(2) 重心から見た棒の回転の角速度 ω を求めなさい。

(3) 原点 O から見た小球 A の座標 $(x_\mathrm{A}, y_\mathrm{A})$ を，時刻 t の関数として求めなさい。

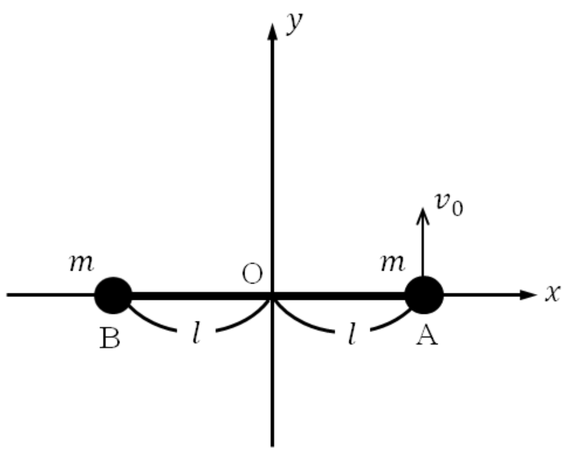

図 2: 棒の水平面での運動

問 4 次ページの図 3 のように，なめらかで水平な床の上で，この棒を，小球 A を上にして床面に垂直に静かに立てる。この棒がわずかにバランスを崩してゆっくり倒れるときの運動を考える。棒は常に (x, z) 面内にあるとする。棒が鉛直上方（z 軸正方向）となす角（棒の傾き）が θ のときを考える。重力加速度の大きさを g として，以下の問いに答えなさい。

(1) 小球 A の座標 $(x_\mathrm{A}, z_\mathrm{A})$ と小球 B の座標 $(x_\mathrm{B}, z_\mathrm{B})$ を θ を用いて表しなさい。

(2) 棒の重心はどのような運動をするか答えなさい。

(3) 小球 A が描く軌跡の式を導きなさい。また，その式はどのような図形を表すか答えなさい。

(4) 小球 A の位置エネルギーを θ の関数として表しなさい。床面の位置エネルギーを 0 とする。

(5) 2 つの小球の運動エネルギーの合計を，傾きの変化率（棒の回転角速度）$\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$ を用いて表しなさい。

(6) 棒の傾きが θ となったときの傾きの変化率 $\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$ を θ の関数として求めなさい。

(7) 小球 A が床に衝突する直前の，小球 A の速度を求めなさい。

(8) 小球 A が床と完全弾性衝突した場合，小球 A はどこまで上昇するか答えなさい。

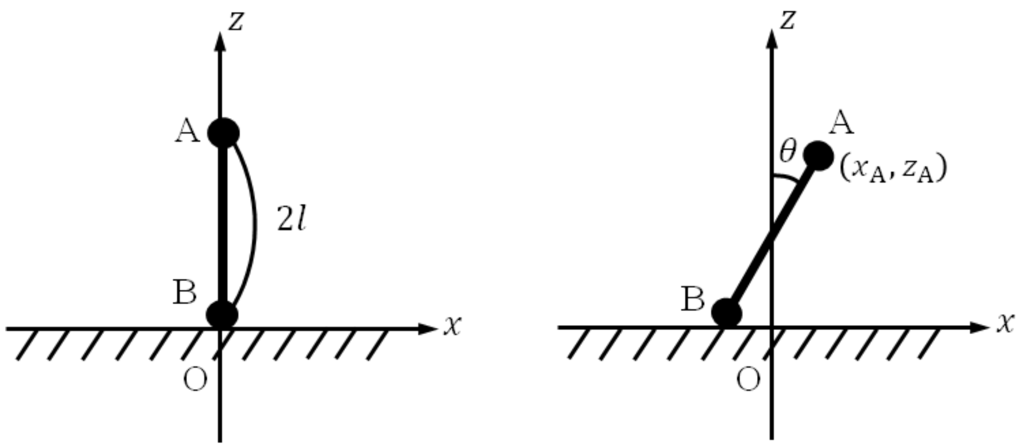

図 3: 直立した棒の転倒

（数学公式） 必要なら以下の公式を用いてよい。

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\cos\theta = -\sin\theta, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\sin\theta = \cos\theta$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\cos\theta = -\sin\theta\,\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sin\theta = \cos\theta\,\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$$

II–B

気圧が低い山の上では水が100 ℃よりも低い温度で沸騰するため，通常の方法ではおいしいご飯が炊けない。そこで，空気や水が逃げないように密封した圧力鍋が使われる。水蒸気を含んだ空気中で雲ができたり，雨が降ったりする現象も温度や圧力の変化に伴って起こる。以下では水から水蒸気，水蒸気から水への変化に圧力が及ぼす効果について考えてみよう。

図1のように圧力 $p_0 = 1.013 \times 10^5\,\mathrm{Pa}$（1気圧）の大気中で断面積 $S[\mathrm{m}^2]$ が一定の十分に長い円筒容器中に定積モル比熱 $C_\mathrm{V}[\mathrm{J/(mol\cdot K)}]$ の気体 $n_0[\mathrm{mol}]$ を封入し，$n_\mathrm{W}[\mathrm{mol}]$ の水を入れた。ここで，$1\mathrm{Pa} = 1\mathrm{N/m^2}$ である。高さによる圧力の違いは無視できるものとする。封入した気体と水蒸気は理想気体とする。また，封入した気体は水には溶けないものとし，水の密度 $\rho_\mathrm{W}[\mathrm{kg/m^3}]$ は温度によらず一定とする。ピストンの質量は無視でき，円筒容器内をなめらかに運動できる。なお，ピストンおよび壁を通して容器内の気体と外部は熱のやりとりをしないものとする。

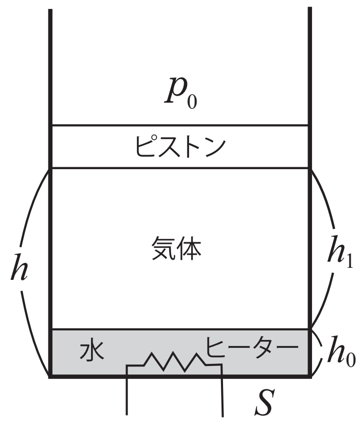

図1

問1　水と気体の温度がいずれも $T_0[\mathrm{K}]$ であり，T_0 は沸点よりも低く，水は蒸発しないものとする。ピストンがつりあいの位置にあるとき，気体定数を $R[\mathrm{J/(mol\cdot K)}]$ として以下の問いに答えなさい。

(1) 水1mol の質量を $m_\mathrm{W}[\mathrm{kg}]$ とする。m_W の値を有効数字3桁で求めなさい。

(2) 容器底面から水面までの高さ $h_0[\mathrm{m}]$ を S，ρ_W，n_W，m_W を用いてあらわしなさい。

(3) 水面からピストン下面までの高さ $h_1[\mathrm{m}]$ を S，p_0，T_0，n_0，R を用いてあらわしなさい。

問２ ヒーターを用いて水を加熱したところ，容器内の気体は水と同じ温度を保ちながら膨張し，ピストンをゆっくりと持ち上げた。時刻 $t = 0$ の水温を T_0[K] とし，単位時間あたりにヒーターから加えられる熱量は一定で q[J/s]，水のモル比熱を C_W[J/(mol $\cdot$ K)] とする。水温が沸点より低い場合，水の蒸発を無視して以下の問いに答えなさい。

(1) 水温が T_0[K] から T_1[K] まで上昇する間に気体が外部にした仕事 W[J] を n_0，R，T_0，T_1 を用いてあらわしなさい。

(2) 水温が T_0[K] から T_1[K] まで上昇する間に気体が得た熱量 Q[J] を n_0，R，C_V，T_0，T_1 を用いてあらわしなさい。

(3) 加熱を始めた後，沸騰する直前までの水温の変化を式で求め，横軸を時刻 t[s]，縦軸を水温 T[K] とするグラフであらわしなさい。

(4) 水と接している気体の圧力が 1 気圧のとき，水は $T_\mathrm{B} = 373\mathrm{K}$ で沸騰する。水が沸騰する時刻 t_1 を求めなさい。

問３ 沸騰中は水，水蒸気，および最初に封入された気体の温度は一定に保たれる。水蒸気の定積モル比熱は封入されている気体と同じで C_V とする。また，ヒーターは容器の底面にあり，その高さは無視できるものとする。

(1) 水と接している気体の圧力を 1 気圧に保った状態で水 1mol を蒸発させるのに必要な熱量（蒸発熱）を L_0[J/mol] とする。容器内にあった n_W[mol] の水が蒸発し終わる時刻 t_2[s] を求めなさい。答には t_1 を用いて良い。

(2) 水が沸騰し始めてから n_W[mol] の水がすべて水蒸気になるまでの間にピストンがする仕事 W_B[J] を n_W, m_W, ρ_W, R, T_B, p_0 を用いてあらわしなさい。

問４ 水及び水と接する気体の温度 T[K] が $T < 647\mathrm{K}$ ならば，水と接する気体の圧力が次式で与えられる p_A[Pa] の時に水は沸騰する。

$$\log_{10}\frac{p_\mathrm{A}}{p_0} = -5.80\left(\frac{T_\mathrm{B}}{T} - 1\right)$$

$T = 0.8T_\mathrm{B}$，T_B，$1.2T_\mathrm{B}$, $1.4T_\mathrm{B}$，$1.6T_\mathrm{B}$ の場合の $\log_{10}(T/T_\mathrm{B})$ と $\log_{10}(p_\mathrm{A}/p_0)$ を求め，横軸を $\log_{10}(T/T_\mathrm{B})$，たて軸を $\log_{10}(p_\mathrm{A}/p_0)$ とするグラフを作成しなさい。

問５　次にピストンを容器の底面からピストン下面までの高さが h の位置に固定して問２と同様に水を加熱する場合を考える。以下では $T_0 = 0.8T_{\rm B}$，$n_{\rm W}/n_0 = 10$ とする。

(1) 水の蒸発が無視できるときの h_1/h_0 の値を求めなさい。ただし，$\rho_{\rm W} = 1.00 \times 10^3{\rm kg/m^3}$，$R = 8.314{\rm J/(mol \cdot K)}$ とする。

(2) 水が沸騰していないとき，水の蒸発は無視できるものとして水と接する気体の温度 T[K] と圧力 p[Pa] の関係を式で求め，問４で作成したグラフに書き加えなさい。

(3) 水が沸騰しはじめる温度を $T'_{\rm B}$[K] とするとき，$\delta T_{\rm B} = T'_{\rm B} - T_{\rm B}$ を 1K 以下の誤差で求めなさい。$|x| \ll 1$ のとき，$1/(1+x) \simeq 1-x$，$\log_e(1+x) \simeq x$ と近似できることを用いて良い。ここで e は自然対数の底であり，$\log_e 10 = 2.3026$ である。

(4) 沸騰を開始するまでに水の一部が蒸発する場合，水と接する気体の温度と圧力の関係は蒸発が無視できる場合にくらべてどのように変化するか。変化がわかるように，おおよその関係を問４で作成したグラフに点線で書き加え，なぜそのように変化するかを述べなさい。

(5) 沸騰開始から水が蒸発し終わるまでの間，水と接する気体の温度と圧力がどのように変化するか述べなさい。

(6) 水が蒸発し終わった直後の気体の温度を T'_2[K]，圧力を p'_2[Pa] とする。電卓を用いて，$T'_2/T_{\rm B}$，$\log_{10}(p'_2/p_0)$ の値を有効数字３桁の数値で求めなさい。

問６　前問ですべての水が蒸発した後も，さらに加熱を続け，気体の温度が $T' = 1.50T_{\rm B}$ になった状態で加熱をやめ，ピストンの固定をはずして気体をゆっくりと膨張させた。

(1) ピストンの固定をはずす直前の気体の圧力を p'[Pa] とするとき，$\log_{10}(p'/p_0)$ の値を求めなさい。

(2) 気体が断熱変化する場合，圧力 p[Pa] と体積 V[m^3] の間には $pV^\gamma =$ 一定 の関係があることを用いて，ピストンの固定を解除した後の気体の圧力 p[Pa] と温度 T[K] の関係を式で求め，問４で作成したグラフに書き加えなさい。γ は比熱比であり，封入された気体，水蒸気ともに $\gamma = 4/3$ とする。また，封入された気体はつねに気体の状態にあるものとする。

(3) 水蒸気が水に戻りはじめる温度 T_3 を電卓を用いて 5K 以下の誤差で求めなさい。

$\boxed{\text{II-C}}$

ロケットは進行方向と反対側に高速で推進剤を噴射し，その反作用により加速する。この噴射によって生じる力は推力と呼ばれる。

ここで，ロケットが短い時間 Δt にわずかな質量 ΔM の推進剤をロケットからみて速さ u で噴射する。この時，ロケットに一定の推力 F が加わり速さが Δv 変化した。この噴射後のロケットの質量を M とし，以下の問いに答えなさい。空気抵抗や重力は無視して考えてよい。

［問１］

（１） Δv を u， M， ΔM のうち必要なものを用いて答えなさい。

（２） F を u， ΔM， Δt のうち必要なものを用いて答えなさい。

［問２］

ロケットがわずかな量ずつ燃料を噴射すると考え，以下の方法でロケットの速さをもとめてみよう。推進剤を搭載した状態で全質量 M_0 の静止したロケットが，同じ方向にロケットからみて速さ u で推進剤を n 回噴射する。ここで， k 回目に噴射される推進剤の質量を $\Delta M_k = M_0(1-s)^{k-1}s$ （ただし， $0<s<1$）とする。

（１） n 回目までに噴射した推進剤の質量を M_0， s， n のうち，必要なものを用いてもとめなさい。

（２） n 回目の噴射による速さの変化 Δv_n をもとめなさい。

（３）推進剤を n 回噴射後，最初の全質量 M_0 と比較してロケットの質量が r の割合となったとしよう。すなわち，ロケットの質量は $M_0 \cdot r$ となり，質量 $M_0 \cdot (1-r)$ の推進剤を噴射した。この時の n をもとめなさい。

（４）推進剤を n 回噴射後のロケットの速さ v を u， r， s のうち必要なものを用いて答えなさい。

（５）（４）で求めた v に対し， s は十分に小さいと考え $s \to 0$ とする。このときのロケットの速さ v を u， r のうち必要なものを用いて答えなさい。ただし， $|x| \ll 1$ のとき， $\log_e(1-x) \fallingdotseq -x$ としてよい。

「はやぶさ」などの惑星探査機では，イオンエンジンと呼ばれる推進エンジンを使っている。このイオンエンジンの推力について考えてみよう。

イオンエンジンの概略を図１に示す。キセノンガス（推進剤）をマイクロ波を使ってイオン化し，一価の正イオンにする。このイオンを電極間の静電界をつかって加速する。この電極には幅の小さな隙間（スリット）があいており，このスリットからイオンが噴射され，その反作用で推力をえている[1)]。

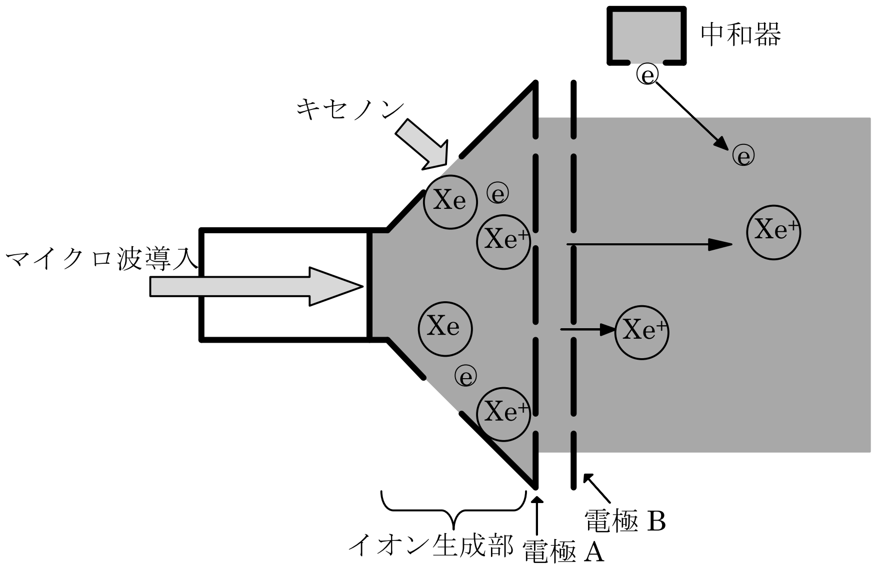

図１

キセノンイオンが加速される様子について考えてみよう。図２のように，キセノンイオンは２枚の電極，電極 A と電極 B によってつくられる電界により加速される。電極 A，電極 B にはスリットがあいていて，キセノンイオンは，このスリットの間を自由に通りぬけできる。電極 A，電極 B それぞれの電圧をV，０とする。ただし，$V \geqq 0$，２枚の電極の間隔をLとする。図２のようにy軸を電極 A と平行にとり，その原点を電極 A のスリットの中心におく。x軸は電極の法線方向とする。スリットの中心が点$(L, 0)$となるように電極 B がおかれている。電極は紙面と垂直方向に無限に長い。スリット幅は電極の間隔に比べ十分に狭く，電界は電極に対して垂直方向に一様であるとする。電極の厚さは十分に薄く無視できる。１つのキセノンイオンが電極 A のスリットの点$\mathrm{P}(0, y_{A0})$より入射する。キセノンイオンは点Pを速さv_0，x軸となす角θ_0で通過したと考える。電気素量をe，キセノンイオン１個の質量をmとする。以下の計算では$|\theta_0| \ll 1$として$\sin\theta_0 \fallingdotseq \theta_0$，$\cos\theta_0 \fallingdotseq 1$と近似してよい。

1) 実際には図１に示すように，スリットから噴射したキセノンイオンに中和器から放出した電子を衝突させて，電気的に中性にしている。この衝突による運動量の変化はわずかであるため，無視している。

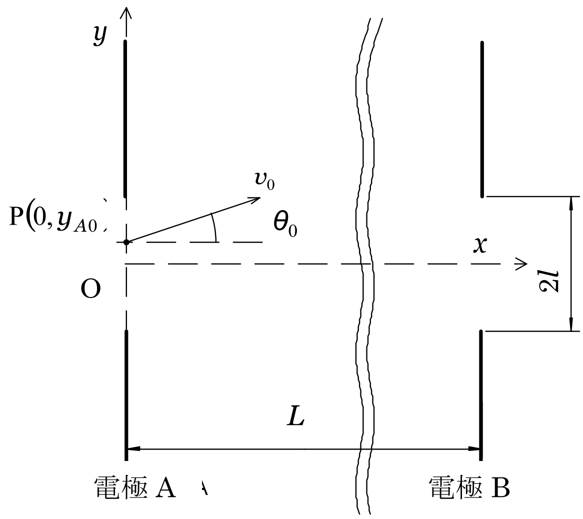

図 2

［問３］

（１）キセノンイオンが電極 A と電極 B の間にあるとき，x 軸方向に生じる加速度 a_x をもとめなさい。

（２）点 P を通過した時刻を 0 として，時刻 t におけるキセノンイオンの x 軸方向への速さ v_x，y 軸方向への速さ v_y，位置 (x, y) をそれぞれもとめなさい。

（３）キセノンイオンが電極 B に到達したときの位置 (L, y_B) をもとめなさい。また，そのときのキセノンイオンの x 軸方向への速さ v_{Bx} をもとめなさい。

図 3 に示すように，多くのキセノンイオンが $|\theta_0| < \theta_1$，$|y_{A0}| < y_{A1}$ の範囲において，角度，位置に関して一様な分布で電極 A のスリットを通過すると考える。キセノンイオンの速さは v_0 で一定とする。この時，キセノンイオンの入射方向，位置によっては電極 B に衝突する。

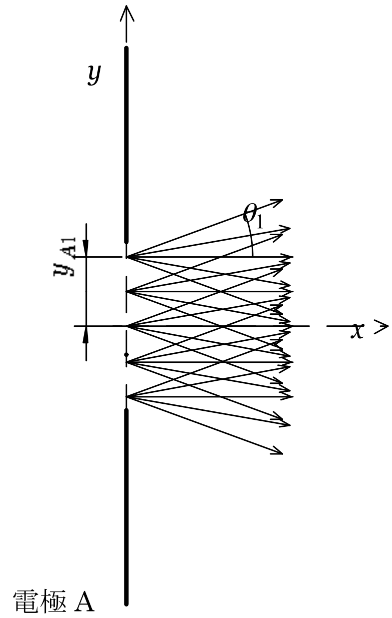

図 3

［問 4］

電極 B に衝突しないで幅 $2l$ のスリットを通るキセノンイオンの割合をもとめなさい。キセノンイオン同士の影響や衝突については無視してよい。ただし，以下の値を用い，小数点以下第 3 位を四捨五入し，第 2 位まで数値でもとめなさい。

$V = 1500\mathrm{V}$，$v_0 = 200\mathrm{m/s}$，$L = 2.0\times10^{-2}\mathrm{m}$，$y_{A1} = 2.0\times10^{-4}\mathrm{m}$，$l = 2.0\times10^{-4}\mathrm{m}$，$e = 1.6\times10^{-19}\mathrm{C}$，$m = 2.2\times10^{-25}\mathrm{kg}$，　$\theta_1 = 0.175\mathrm{rad}$

［問 5］

電極 A のスリットに供給されたキセノンイオンのうち，電極 B にあたらないでスリットから噴射されるキセノンイオンにより推力が生まれる。また，電極 B にあたったキセノンイオンについては推力に影響しないでロケットの外に放出される。これらのキセノンイオンの平均の速さを推進剤の噴射の速さと考える。このような仮定で推進力をえるロケットが問 4 までの条件で加速され，加速後の質量が静止していた時の質量の 80%となった。このときのロケットの速さをもとめなさい。解答は問 4 で与えられた数値を用い有効数字 2 桁の数値でもとめなさい。

［問６］

このイオンエンジンは電極 A のスリットに毎秒あたり最大で 0.25mg のキセノンイオンを供給できる。この時の推力をもとめなさい。解答は問４で与えられた数値を用い有効数字２桁の数値でもとめなさい。

［問７］

上記のようなイオンエンジンは，惑星探査機など宇宙空間での推進に使われることがほとんどであり，例えば地上からの打ち上げには利用できない。表を参考にこの理由を述べなさい。

表

	イオンエンジン（はやぶさ）	化学エンジン（HⅡ型ロケットの１段目エンジン）
ロケット全体の質量	110kg	98000kg
推進剤の質量	65kg	86000kg
最大推力	算出した値を使うこと	1079kN
推進剤の噴射速さ	算出した値を使うこと	約 4km/s