平成 19 年度

千葉大学先進科学プログラム入学者選考課題

課題論述

実施時間［9:00－17:00］

課題Ⅱ-A, II-B

（ 10:00－15:30 ）

注意事項

課題Ⅱには、[Ⅱ－A]、[Ⅱ－B]、[Ⅱ－C]、[Ⅱ－D]の４題があります。
志望するコースによって、次に示す問題を解答してください。

・物理学コース、フロンティアテクノロジーコース：
[Ⅱ－A]、[Ⅱ－B]の両方を解答してください。

・人間探求コース：
[Ⅱ－A]、[Ⅱ－B]、[Ⅱ－C]、[Ⅱ－D]の中から２題を選択して解答してください。

[II-A]

質点に力が働いてその質点が複雑な運動をしているときでも、この質点を観測する座標系によっては質点の運動が簡単に見える。たとえば、質点とまったく同じ運動をしている座標系から見れば、この質点はいつも静止していてまったく力が働いていないように見える。逆に、簡単な運動も、観測する座標系によっては複雑な力が働いているように見える。このように、運動を観測する座標系によって見かけの力は異なる。

以下、**問 1** では投げ上げられた質点をエレベーターから観測した場合を、**問 2** では等速直線運動をしている質点を回転している系で観測した場合を考察する。

問 1　z 軸 (鉛直上方に正ととる）に沿って投げ上げられた質量 m の質点を、それと平行に一定の加速度 $a(a > 0)$ で上昇しているエレベーターから観測する。質点は、$t = 0$ に初速 $v_0(v_0 > 0)$ で原点 $z = 0$ から投げ上げられ、エレベーターは、 $t = 0$ に初速 0 で、$z = 0$ をスタートする。ただし、重力加速度の大きさを g とする。以下の問では、エレベーターは大きさを無視した点とみなしてよい。また、空気の抵抗は考えなくてよい。

(a) 静止した座標系で観測した、時刻 t における質点の位置 $z_{\mathrm{m}}(t)$ とエレベーターの位置 $z_{\mathrm{e}}(t)$ を求め、エレベーターから観測した質点の位置 $z'(t)$ を求めなさい。次に、$z_{\mathrm{m}}(t)$、$z_{\mathrm{e}}(t)$、$z'(t)$ を時刻 t の関数としてグラフに描きなさい。

(b) エレベーターから見ると質点にはどのような力が働いているように見えるか、理由をつけて答えなさい。

(c) 時刻 t_1 から t_2 $(t_1 < t_2)$ の間に、質点の運動エネルギーはどれだけ変わるだろうか。静止した座標系で観測した場合とエレベーターから観測した場合の両方について求めなさい。

(d) どちらの座標系でも力学的エネルギーが保存するように位置エネルギーを決めたい。静止系とエレベーターとともに動く系では、それぞれどのように位置エネルギーを決めたら良いか。(c) で考察した時刻 t_1 と t_2 の運動エネルギーの変化から考えなさい。

問 2 水平な xy 平面内で、質量 m の質点が、時刻 $t = 0$ に一定の速さ v_0 で原点から y 軸上を正の向きに動き出す。この xy 系は静止している。xy 系の原点を回転の中心にして一定の角周波数 $\omega(\omega > 0)$ で回転している座標系を $x'y'$ 系と呼ぶことにする（図を参照しなさい)。ただし、$t = 0$ で x'、y' 軸は x、y 軸に一致している。また、質点には摩擦は働かないとする。

(a) $x'y'$ 系で見た時刻 t における質点の座標 $(x'(t), y'(t))$ を求めなさい。

(b) $x'y'$ 系で見た質点の軌跡の概形を描きなさい。ただし、(a) の結果を用いて求めてもよいし、別の考えを用いて求めてもよい。

(c) 時刻 t における、$x'y'$ 系で見た質点の速さと運動エネルギーを計算し、t を横軸にとって、速さと運動エネルギーの概形をそれぞれ図示しなさい。

(d) 図に示した xy 系と $x'y'$ 系の関係や (b) で求めた軌跡からもわかるとおり、質点は、時刻 t とともに、x' 軸を何度も横切る。x' 軸の正の部分 $(0 < x')$ を 1 回目、2 回目、3 回目と一般に n 回目に横切る時の時刻と位置を求めなさい。さらに、速度の向きと大きさが x' 軸の正の部分を横切るたびにどのような傾向で変化していくかを考え、その傾向がわかるようにおおよその図を x' 軸を横切る位置に示しなさい。最終的な答は、(b) の解答の図をもう一度書いてそこに書き込みなさい。

(e) x' 軸を質点が横切る瞬間の $x'y'$ 系で見た運動エネルギーを考察する。x' 軸を、$x' > 0$ の範囲で n 回目と $n+1$ 回目に横切る二つの瞬間の運動エネルギーの差を、n や m, v_0, ω などで表しなさい。

(f) $x'y'$ 系での運動が力学的エネルギー保存則を満たすように、位置エネルギーを定義したい。(e) で求めた二つの瞬間の運動エネルギーの差を、二つの瞬間における質点の原点からの距離と関係付けることによって、質点の位置エネルギーをどのように定義したら良いか予想を書きなさい。また、予想した位置エネルギーを用いて、x' 軸を横切る瞬間ばかりでなく、任意の t でも力学的エネルギー保存則が成り立っているかどうかを確かめなさい。

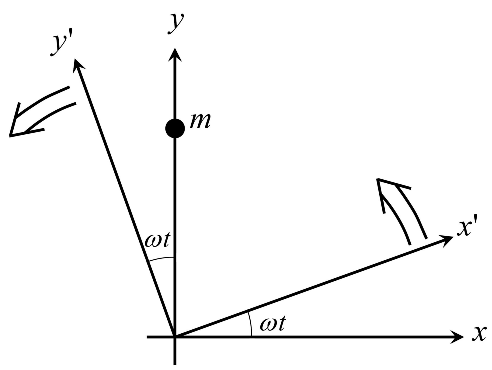
(g) $x'y'$ 系で観測した質点の運動は、(a) や (b) の結果から見てどのような力によるのだろうか。以下の問に答えなさい。
(g-1) (d) で考えた x 軸を横切る瞬間における加速度の x'、y' 成分を求めなさい。
(g-2) その結果をヒントにして、$x'y'$ 系での見かけの力を (f) で求めた位置エネルギーとの関連で議論しなさい。

(注意) 解答するのに関数の微分が必要なら以下の公式を参考にするとよい。
ただし、$f'(x) = \frac{d}{dx}f(x)$

$$(1) \qquad \frac{d}{dx}\sin x = \cos x, \quad \frac{d}{dx}\cos x = -\sin x, \quad \frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1} \quad (n \text{ は整数})$$

$$(2) \qquad \frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$(3) \qquad \frac{d}{dx}f(ax) = af'(ax)$$



図：時刻 t での 2 つの系

[II—B]

有名な「ミリカンの実験」では、電場のもとでの荷電粒子の運動を目視で観察することでいくつもの異なる荷電粒子が持つ電荷の量を求め、それがとびとびの値をとることから電荷にこれ以上分けられない基本単位（電気素量：$e = 1.6 \times 10^{-19}$ C）があることを確かめた。類似の実験を、目視でなく電流を検出することで実現できるかについて考えてみる。

なお、以下の問題では、重力加速度の大きさをg（9.8 m/s^2）とし、実験は真空中で行うため、荷電粒子に空気抵抗は働かないものとする。

問１　図１のように、平行平板コンデンサーに電源（電圧V[V]）と電流計が接続されている。重力の向きは、この図の下向きである。このコンデンサーを構成する電極の大きさは、電極間隔（d[m]）と比べて十分大きいので、電極間では電場は一様と考えて良い。このときの電場の大きさ、および、下電極からの距離x[m]の位置における電位を求めなさい。なお、下電極の電位を０[V]と定義する。

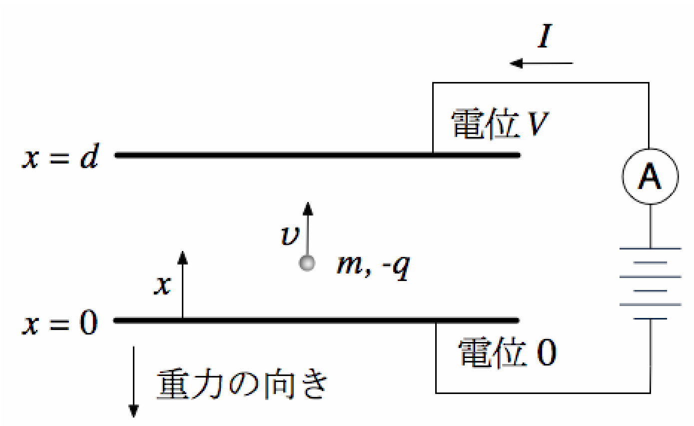


図１

問２　この電極間に、質量m[kg]、電荷が$-q$[C]（$q > 0$）の十分小さい荷電粒子を置く。この粒子には重力と静電気力のみが働くものとして、粒子の運動方程式を、上向きの加速度a[m/s^2]とg、m、q、Vおよびdを用いてあらわしなさい。

この電極間での荷電粒子の運動は、図１のように接続された電流計によって電流として検出できる。この図の配置の場合、粒子の上向きの速度をvとすると、

$$I = \frac{qv}{d} \tag{1}$$

と表される。あたかもコンデンサーの電極間にも導線が連続しているかのように、コンデンサーの両側を粒子の速度に比例する電流が流れるのである。これを受け入れれば、問７以降の問題は解くことができる。しかし、ここではいったん本題を離れて、式(1)を証明することを試みる。

最もシンプルな証明のひとつは、大学で学ぶ電磁気学において多数の電荷と電位の関係を表すために用いられる「相反定理」を利用する方法である。相反定理は以下のように記述される。

『*$\vec{r}_1, \vec{r}_2, \cdots, \vec{r}_n$ の位置に n 個の点電荷 $Q_1, Q_2, \cdots, Q_n$ を置いたとき、それぞれの位置における電位が $V_1, V_2, \cdots, V_n$ であるとする。同じ $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \cdots, \vec{r}_n$ の位置に改めて $Q_1', Q_2', \cdots, Q_n'$ の点電荷を置くことによって各位置における電位が $V_1', V_2', \cdots, V_n'$ に変化したとすると、Q_i, V_i, Q_i', V_i' の間に*

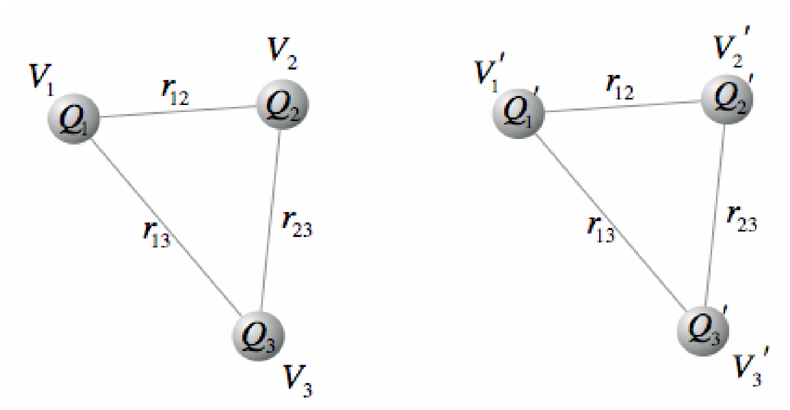
$$\sum_{i=1}^{n} Q_i V_i' = \sum_{i=1}^{n} Q_i' V_i \tag{2}$$

という関係が成り立つ。』

問３　図２に示されるような $n=3$ の点電荷の組（Q_1, Q_2, Q_3）と（Q_1', Q_2', Q_3'）の間に、式(2)が成り立つことを確かめなさい。なお、点電荷 Q_i の位置における電位 V_i は、Q_i 以外の点電荷によって Q_i の位置につくられる電位の和によって

$$\begin{cases} V_1 = k\left(\qquad \dfrac{Q_2}{r_{21}} + \dfrac{Q_3}{r_{31}} \right) \\ V_2 = k\left(\dfrac{Q_1}{r_{12}} \qquad + \dfrac{Q_3}{r_{32}} \right) \\ V_3 = k\left(\dfrac{Q_1}{r_{13}} + \dfrac{Q_2}{r_{23}} \qquad \right) \end{cases} \tag{3}$$

と表される。ただし、k はクーロンの法則の比例定数、r_{ij} は i 番目の点電荷から j 番目の点電荷までの距離であり、$r_{ij} = r_{ji}$ である。



(a)　Q_i のとき　　　　(b)　Q_i' のとき

図２

問４　任意の数の点電荷において、問３と同様に相反定理が成り立つことを示しなさい。

上の問３、４では点電荷の組で考えたが、任意形状を持つ導体（電極）の組であっても、各導体上の電荷は点電荷の集合であり、各導体上で電位は一定であることから、任意の導体の組において相反定理は成り立つ。

次に、相反定理を用いて、平行平板電極間に点電荷を置いたときに電極に生じる誘導電荷を求めてみよう。

まず両電極を接地した図３のような場合を考える。このとき電荷が$-q$の荷電粒子Ｃによって電極ＡおよびＢにそれぞれ誘起される電荷Q_AおよびQ_Bが求めるべき量である。この実験では、外部に電場が漏れないようになっているので、電荷の合計について$Q_A + Q_B - q = 0$が成り立っている。また、このときの荷電粒子Ｃの位置の電位をV_Cとする。

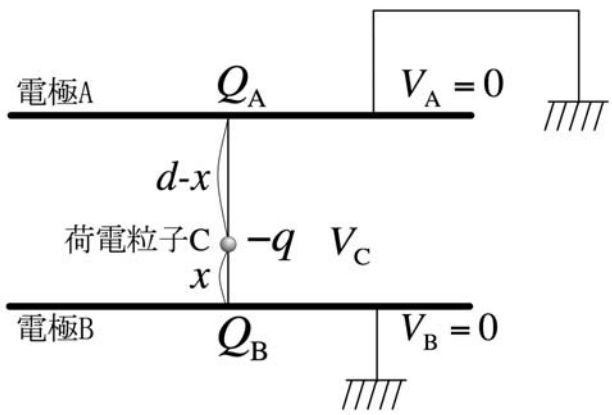


図３

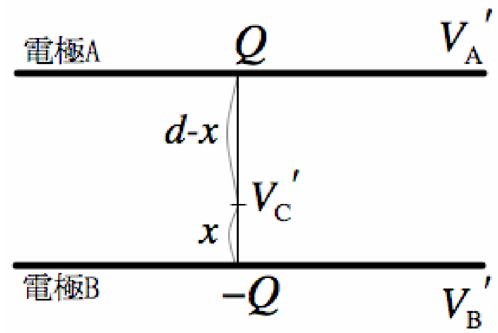


図４

一方、両電極を接地させず、荷電粒子のない図４のような場合を考える。電極Ａおよび B には、今度はそれぞれQおよび$-Q$が与えられている。このときの電極Ａ、Ｂ、および、かつて荷電粒子 Ｃ があった位置の電位は、それぞれV_A'、V_B'およびV_C'であった。

問５　これら２つの場合が、それぞれ図２におけるQ_iおよびQ_i'の場合に相当すると考え、相反定理を用いてQ_AおよびQ_Bが次式で表されることを示しなさい。

$$Q_A = \frac{x}{d} q \tag{4}$$

$$Q_B = \frac{d-x}{d} q \tag{5}$$

図１では、まず、外部から加えられた電圧によって電極に一定の電荷が蓄積され、それに、問５で求めた荷電粒子 C によって電極に誘起される電荷を足し合わせた状態となっている。このうち、外部電圧による蓄積電荷は常に一定であるので、荷電粒子の運動によって検出される電流には寄与しない。

問６　式(4)あるいは式(5)から、図１において荷電粒子の運動に従って流れる電流が式(1)で表されることを説明しなさい。電流の単位の次元が[A]=[C]/[s]であることに注意すること。

以上の証明によって、電極間の荷電粒子の運動は、その速度に比例する電流として検出されることが示された。そこで、以下では、時刻$t=0$で荷電粒子の速度$v=0$、位置$x=0$とし、荷電粒子の運動に伴う電流の変化について考える。

問７　荷電粒子に働く静電気力が重力より大きいとしたとき、問２で求めた運動方程式から荷電粒子が上電極に衝突するまでの$I(t)$および$x(t)$を求めなさい。またそれらを t の関数として図示しなさい。

問８　荷電粒子の運動を実験において電流として検出できるかどうかを確かめるために、荷電粒子に働く静電気力が重力の２倍であるときの運動を考えてみる。荷電粒子の速度が最大となるときの時刻とその速度の大きさを、$d=1.0\times10^{-3}$ [m]として、有効数字２桁で求めなさい。

問９　さらに、荷電粒子の電荷が電子１個相当（$-e$［C]）、質量が1.0×10^{-15} [kg]であるとする。この粒子の運動にともなって得られる最大電流は何 A になるかを有効数字２桁で求めなさい。また、この粒子に働く静電気力が重力の２倍となるために要する電圧の大きさを、有効数字２桁で求めなさい。

実験の目的を達するために粒子の電荷を電気素量の十から数十倍まで増やしてもかまわないが、その場合でも見積もられる最大電流は極めて小さいことなどから、実のところこのままでは実験が成功する望みは薄い。では、どのような工夫をすれば良いかを考えるところが、実験的研究の面白さの一つである。