

平成 22 年度

千葉大学先進科学プログラム入学者選考課題

課題 II-B 解答例

[II-B] 解答例

出題の意図

この問題では、走査型プローブ顕微鏡の一種である電気力顕微鏡において、静電気力を検出する基本原理を題材としている。前半では、コンデンサーの極板間にはたらく静電気力を静電エネルギーから求めることを要求している。後半では、ばねによる単振動にばねの復元力以外の力が加わることで振動がどう変化するかを解析的に記述することを要求している。具体的には、以下の能力が求められる。

- ・ コンデンサーへの電荷蓄積について正しく理解しているか？
- ・ 力とエネルギーの関係などを表すために、座標に対する向きを正しく取り扱えるか？
- ・ 仕事とエネルギーの関係について正しく理解しているか？
- ・ 単振動について正しく理解しているか？
- ・ 異種の力の釣り合いについて正しく説明できるか？
- ・ 物理的問題を解くために必要な数学的な力があるか？
- ・ 比較的複雑な物理問題の設定を正しく理解できるか？

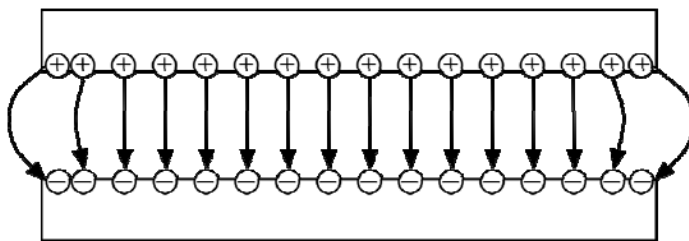
解答例

(以下、MKSA 単位系で答えるかぎり単位を書くことは必須ではない。)

問1 平行平板コンデンサーの電気容量は、 $C = \epsilon_0 \frac{S}{a}$ [F]で表される。

これを用いて、 $Q = CV = \frac{\epsilon_0 SV}{a}$ [C]

問2



以下を明らかに満たしていないなら減点：

- ・ 極板中央付近は電荷が均一に分布
- ・ 正電荷と負電荷が同じ数
- ・ 電気力線が正電荷（側）から出て負電荷（側）に入っている
- ・ 平行部で極板の上下には電気力線が出ていない
(端部は上の図より側面にもう少し回り込んでいてもよい)

以下が考慮されていれば加点：

- ・ 電荷が極板内部ではなく明確に表面ごく近くにある
- ・ 極板端は電気力線が外にふくらんで広がっている
- ・ 極板端は電荷がより混みあっている

問3 Q 一定で C が変化するので、 $Q^2/2C$ を使う。

$$U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{Q^2 x}{2\varepsilon_0 S} \quad [\text{J}]$$

$$\text{ここから、} \Delta U = U(a + \Delta a) - U(a) = \frac{Q^2 \Delta a}{2\varepsilon_0 S} \quad [\text{J}]$$

問4 $F \cdot \Delta a = \Delta U = \frac{Q^2 \Delta a}{2\varepsilon_0 S}$ より

$$F_Q = -F = -\frac{Q^2}{2\varepsilon_0 S} \quad [\text{N}] \quad (Q \neq 0 \text{で常に下向きの力であり、} x \text{に依存しない。})$$

問5 $Q = CV$ および $C = \varepsilon_0 \frac{S}{x}$ より、上式から Q を消去すると

$$F_V = -\frac{(CV)^2}{2\varepsilon_0 S} = -\frac{\varepsilon_0^2 S^2 V^2}{2\varepsilon_0 S x^2} = -\frac{\varepsilon_0 S V^2}{2x^2} \quad [\text{N}]$$

($V \neq 0$ で常に下向きの力であり、 x に依存する。)

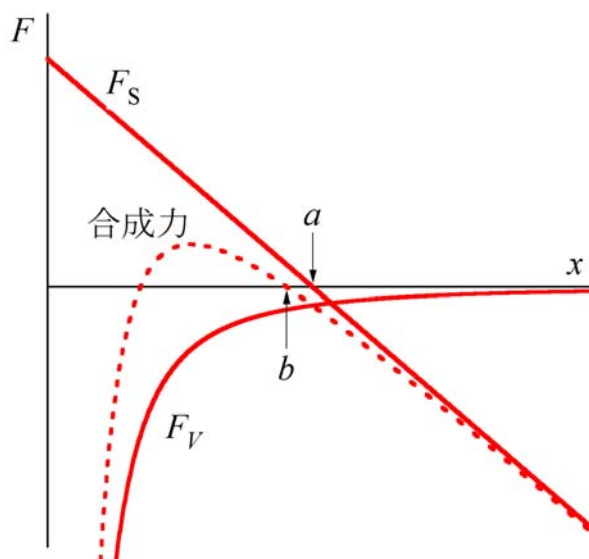
問6 F_S は $x > a$ で負、 $x < a$ で正となり、変位に比例する。

$$F_S = -k(x - a) \quad [\text{N}]$$

この復元力による単振動の角振動数は、運動方程式 $m \frac{d^2 x}{dt^2} = -k(x - a)$

の解 $x = \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t + \varphi\right)$ より、 $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ [rad/s]

問7



以下を満たしていないなら減点：

- F_S が $F > 0$ から $F < 0$ に x 軸を横切る直線
- F_V が常に $F < 0$ で、上に凸の単調増加曲線
- 合成力が上に凸で $F > 0$ に極大値を持つ
- F_S が x 軸を横切る点が a
- 合成力が x 軸を横切る点のうち x が大きいほうが b

問 8 グラフの合成力の傾きを見ると、静電気力が加わることによって、極板にはたらく復元力が弱くなっている。そのため、見かけ上ばね定数 k が小さくなることから ω は小さくなる。

問 9 $F'_V = \frac{d}{dx} \left(-\frac{\epsilon_0 S V^2}{2} \cdot x^{-2} \right) = \epsilon_0 S V^2 \cdot x^{-3}$ であるから

$x = b$ での静電気力の接線は

$$F_V(b) + F'_V(b)(x-b) = -\frac{\epsilon_0 S V^2}{2b^2} + \frac{\epsilon_0 S V^2}{b^3} \cdot (x-b) \quad (1)$$

と表される。この第 1 項は $x = b$ での定常的な静電気力（基点）を表し、第 2 項はそこからわずかに変位したときの力の変化（傾き）を表している。

一方、ばねの復元力も同様に基点と傾きの 2 項に分けることができ、

$$F_S = -k(x-a) = -k(b-a) - k(x-b) \quad (2)$$

と表される。問 7 のグラフのように $x = b$ で合成力が 0 となるはずであるから、式(1)と(2)の第一項どうしの和が 0 である。

従って $x = b$ 付近の合成力は第二項どうしを足せばよく、

$$F = -k(x-b) + \frac{\epsilon_0 S V^2}{b^3} \cdot (x-b) = -\left(k - \frac{\epsilon_0 S V^2}{b^3} \right) \cdot (x-b) \quad (3)$$

と近似され、ばね定数が見かけ上 $k - \frac{\epsilon_0 S V^2}{b^3}$ になる。

これによって、角振動数は

$$\omega = \sqrt{\frac{k - \frac{\epsilon_0 S V^2}{b^3}}{m}} \quad [\text{rad/s}] \quad \text{となる。} \quad (V=0 \text{ で最大値 } \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \text{ となる)}$$

問 10 $F = F_S + F_V = -k(x-a) - \frac{\epsilon_0 S V^2}{2x^2}$ は問 7 の点線のように、上に凸で極大点を持つ関数である。

この極大点が正であれば、その右側に $F = 0$ となりその近傍の変位に対して復元力が得られるつりあい点が生じるが、極大点が 0 または負になるとつりあい点を失い、上側の極板は下側の極板に急に吸いつけられる。

まず、極大の位置を求める。

極大点では $\frac{dF}{dx} = -k + \frac{\epsilon_0 S V^2}{x^3} = 0$ となることから、 $x = \left(\frac{\epsilon_0 S V^2}{k} \right)^{\frac{1}{3}}$ 。

以下、簡単のために $\frac{\epsilon_0 S}{k} = H$ と置くと、極大の位置は $x = H^{\frac{1}{3}} V^{\frac{2}{3}}$

求める条件は極大点で $F = -k(x-a) - \frac{\epsilon_0 S V^2}{2x^2} = 0$ となる V の値。

$2kx^2(x-a) + \epsilon_0 S V^2 = 0$ に極大の位置を代入して、

$$2 \left(H^{\frac{1}{3}} V^{\frac{2}{3}} \right)^3 - 2a \left(H^{\frac{1}{3}} V^{\frac{2}{3}} \right)^2 + H V^2 = 0 \rightarrow 3H V^2 = 2a H^{\frac{2}{3}} V^{\frac{4}{3}} \rightarrow V^{\frac{2}{3}} = \frac{2a}{3} H^{-\frac{1}{3}}$$

$$\therefore V_1 = \left(\frac{2a}{3} \right)^{\frac{3}{2}} H^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{2a}{3} \right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{k}{\epsilon_0 S} \right)^{\frac{1}{2}} \text{ [V]}$$

$V < 0$ の場合についても、力の式が V に関して偶関数であることから、絶対値さえ同じであれば同じ力となる。従って、つりあいの位置が得られる電圧の範囲は

$$\left(\frac{2a}{3} \right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{k}{\epsilon_0 S} \right)^{\frac{1}{2}} > V > - \left(\frac{2a}{3} \right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{k}{\epsilon_0 S} \right)^{\frac{1}{2}}$$

(V_1 の別解)

つりあいの点 $x = b$ は、 $F(x) = 0$ となる点である。従って b を求めるには方程式

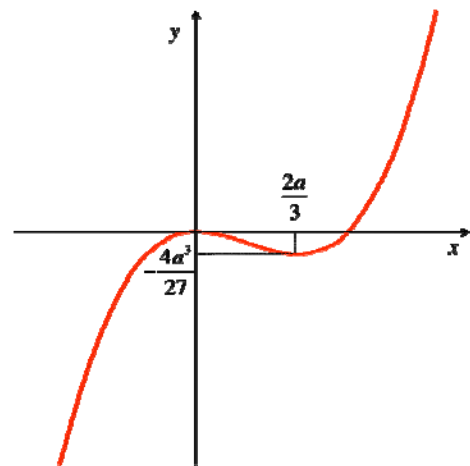
$$-k(x-a) - \frac{\epsilon_0 S V^2}{2x^2} = 0$$

を解けばよい。この式を変形すると、

$$x^2(x-a) = -\frac{\epsilon_0 S V^2}{2k}$$

となるが、 $y = x^2(x-a)$ は、右図のように

$x = \frac{2a}{3}$ で極小値 $-\frac{4a^3}{27}$ 、 $x = 0$ で極大値 0 を



とる関数。これが、 $y = -\frac{\epsilon_0 S V^2}{2k} (\leq 0)$ と $x > 0$ で交点を持つことが、つりあい点

が得られる条件であるから、 $-\frac{4a^3}{27} = -\frac{\epsilon_0 S V^2}{2k}$ がつりあいを失う限界である。

$$V^2 = \frac{8a^3}{27} \frac{k}{\epsilon_0 S} \text{ より、 } V_1 = \left(\frac{2a}{3} \right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{k}{\epsilon_0 S} \right)^{\frac{1}{2}} \text{ [V] となる。}$$

参考 1 専門家向けの解説

中村雅一，山田啓文：“走査型プローブ顕微鏡-最新技術と未来予測：第3章 3.2 節 電気力顕微鏡”，森田清三編著，丸善（東京，2005）より抜粋

静電気力顕微鏡（Electrostatic Force Microscopy: EFM）は，探針-試料間にはたらく静電気力を検出することにより，試料表面の電位，電荷分布，接触電位差などをマッピングすることができるSPMの一種である。AFMによる静電気力の検出は，Martinらによって最初に試みられ^[1]，その後，Sternらによる高分子膜上の表面電荷可視化の実験が，現在のEFMの原型となる最初の報告となった^[2, 3]。さらに，表面研究における接触電位差測定に用いられていたケルビン法を応用した，ケルビンプローブ原子間力顕微鏡（Kelvin probe Force Microscopy: KFM）がNonnenmacherらにより提案され^[4]，これによって試料の定量的な表面電位測定が可能となった。走査表面電位顕微鏡（Scanning Surface Potential Microscopy: SSPM）は通常KFMと同じであり，電気力顕微鏡（EFM）も同義で用いられることが多い。走査マックスウェル応力顕微鏡（Scanning Maxwell-stress Microscopy: SMM）では^[5]，KFMと同様に表面電位のマッピングが可能であるが，後述するように測定方式がやや異なる。

原理

もっとも単純な系として，フェルミ準位が各々 E_{F1} ， E_{F2} の金属的な探針と平坦な導電性基板からなる2導体系を考える。導体電位を固定しない状態で両導体の真空準位が等しいとすると，両者のフェルミ準位は図1左のような関係にある。両者を電氣的に短絡してフェルミ準位を等しくすると，導体間には仕事関数の差に相当する接触電位差 V_s が生じ，導体間には電場が発生する。この電場の直接の源は，探針および試料導体上に誘起された表面電荷であり，探針-試料間隙には電気2重層が形成される。試料表面上に分子があれば，さらにその分極からの寄与が加わる。

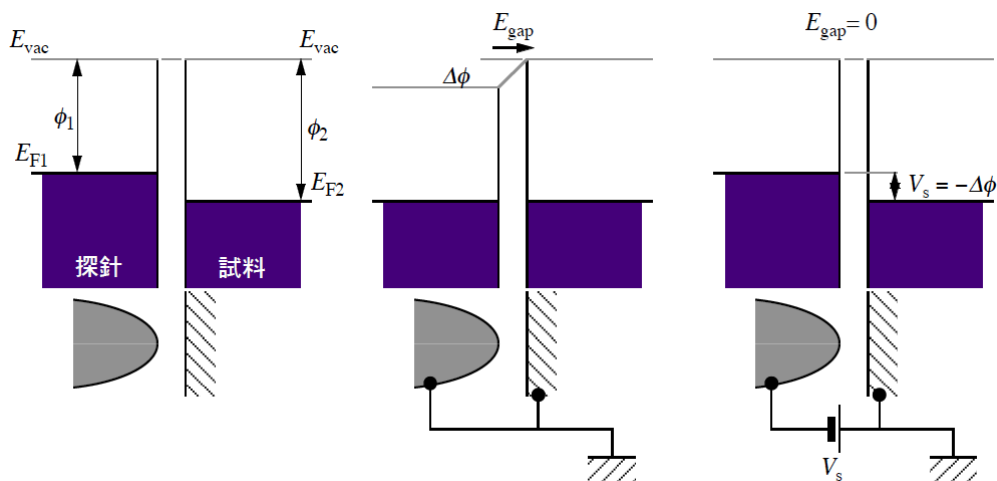


図1 探針-試料のエネルギー準位図。それぞれ，探針・試料が絶縁されている状態（左），接地されている状態（中），真空準位が等しくなるように外部電圧を加えた状態（右）を表わす。

この状態で、角周波数 ω_m の交流電圧 V_{AC} を探針-試料間に加えると、静電気力により探針は角周波数 ω_m で振動する。探針-試料間の電気容量を C （但し、 C は探針-試料間距離 z の関数）とすると、探針-試料間の静電気力 F_z^{el} は、

$$\begin{aligned} F_z^{el} &= -\frac{1}{2} \frac{\partial C}{\partial z} (V_S + V_{DC} + V_{AC} \cos \omega_m t)^2 \\ &= -\frac{1}{2} \frac{\partial C}{\partial z} \{ (V_S + V_{DC})^2 + 2(V_S + V_{DC}) V_{AC} \cos \omega_m t + V_{AC}^2 \cos^2 \omega_m t \} \quad (1) \end{aligned}$$

となる。ここで、 V_{DC} は探針に外部より加えられた電圧である。静電気力は電位の 2 乗に比例するため、応答周波数には DC 成分、 ω_m 成分、 $2\omega_m$ 成分が含まれる。DC 成分は探針-試料コンデンサー電極間に生じる静的な引力、 ω_m 成分は上述した直流電位差により生じた表面誘起電荷が変調交流電場によって受ける力、 $2\omega_m$ 成分は交流電圧による容量的な力を反映する。探針に接触電位差を打ち消す直流電圧を加えると ($V_S + V_{DC} = 0$) 表面電荷が誘起されなくなるため、 ω_m 成分は生じない。従って、変調電圧 V_{AC} を加えた状態で ($V_{DC} = -V_S$)、 ω_m 振動応答を抑圧するように V_{DC} を制御することで、表面電位あるいは接触電位差 (CPD) を求めることが可能となる。

KFM では、局所的な静電気力の検出を行うとともに、探針-試料間距離を制御するために探針-試料間相互作用力を測定する必要がある。これら 2 種類の力を検出する方式には、周波数変調 (FM) 検出法および振幅変化 (AM) 検出法をどのように組み合わせるかによって、表 1 に示すいくつかの動作方式に分かれる。一般的には、共振周波数近傍で機械的にカンチレバーを励振する、スロープ検出 (AM 検出、タッピングモード) による方法と、非共振周波数 (通常低周波数) の AC 電圧を探針-試料間に加え、この静電気力応答を検出する方法が広く用いられている (表中 (1) AM-AM 方式)。しかし、この方法では静電気力を非共振周波数での応答として捉えるため、高感度の静電気力計測は困難な場合が多い。そこで、形状信号と静電気力信号の検出を時間的に分離するリフトモードが開発された^[6]。リフトモードでは、まず、通常のタッピングモードによる最初の走査で形状情報を得る。2 回目の走査では、機械励振を行わず、最初の形状情報を基にして試料表面から一定距離だけ離れた位置を探針が走査するように制御される。このとき、バイアス電圧は共振周波数で変調され、理想的には静電気力のみがカンチレバーの振動応答となる。リフトモードでは、形状信号と静電気力信号の間のクロストークを改善することが可能であるが、2 回の走査の間に試料の位置ドリフトがあれば測定に誤差を生じるというデメリットもある。

NC-AFM における静電気力検出では、静電気力検出の高感度化を図るために電場変調周波数としてカンチレバーの共振周波数を選ぶ、表 3.2.1 における(3) FM-AM あるいは(4) FM-FM の方法が一般的である。(3) は、カンチレバーの Q 値が著しく高く、振幅変化の時間応答が悪くなる真空環境での KFM 動作を可能にするために開発された手法であり、探針-試料間距離制御に FM 検出法を用いるとともに、静電気力検出の励振周波数をカンチレバーの第 2 共振周波数に合わせることで静電気力検出の高感度化と高速化が図られている^[7]。この方法では第 2 共振周波数付近で振動する静電気力は AM 検出により測定される (FM-AM 方式)。これに対して(4)では、電場変調周波数を FM 検出帯域内に設定することで、FM 検出により形状信号と静電気力が、基本共振周波数で振動するカンチレバーの応答から同時に

検出される^[8]。この方法においては、変調周波数そのものは非共振周波数であっても、共振周波数の FM 変調成分として検出されることになる (FM-FM 方式)。周波数のシフト量は変調周波数ではなく、静電気力の大きさを反映することになる。従って、FM 検出法においては、非共振角周波数 ω_m における変調であっても、検出信号は共振角周波数 ω_0 の変調として捉えられるために感度利得 (ω_0 / ω_m) が得られ、電位分解能の点で有利となる。

表 1 KFM のカンチレバー励振・電場変調方式。 f_{res} : カンチレバーの基本共振周波数, $f_{\text{res}}^{(2)}$: 第 2 共振周波数, AM : スロープ検出方式, FM : 周波数変調検出法。

方式	探針-試料間 距離制御	カンチレバー 励振周波数	静電力検出法	電圧変調周波数
(1) AM-AM	AM (タッピングモード)	$-f_{\text{res}}$	AM	非共振
(2) リフトモード AM-AM [2]	AM (タッピングモード)	$-f_{\text{res}}$	AM/リフトモード 時分割走査	$-f_{\text{res}}$
(3) FM-AM [3]	FM	f_{res}	AM	$-f_{\text{res}}^{(2)}$ ($f_{\text{res}}^{(2)} \sim 6.3f_{\text{res}}$) 第 2 共振周波数
(4) FM-FM [4]	FM	f_{res}	FM	FM帯域内 (共振利得あり)

参考文献

- [1] Y. Martin, D. W. Abraham and H. K. Wickramasinghe: *Appl. Phys. Lett.*, **52** (1988) 1103.
- [2] J. E. Stern, B. D. Terris, H. J. Mamin, D. Rugar: *Appl. Phys. Lett.*, **53** (1988) 2717.
- [3] B. D. Terris, J. E. Stern, D. Rugar, H. J. Mamin: *J. Vac. Sci. Technol.*, **A8** (1990) 374.
- [4] M. Nonnenmacher, M. P. O'Boyle and H. K. Wickramasigh: *Appl. Phys. Lett.*, **58** (1991) 1921.
- [5] H. Yokoyama, K. Saito, T. Inoue: *Mol. Electronics Bioelectronics*, **3** (1992) 79.

参考2 実際の装置構成例と用いる探針

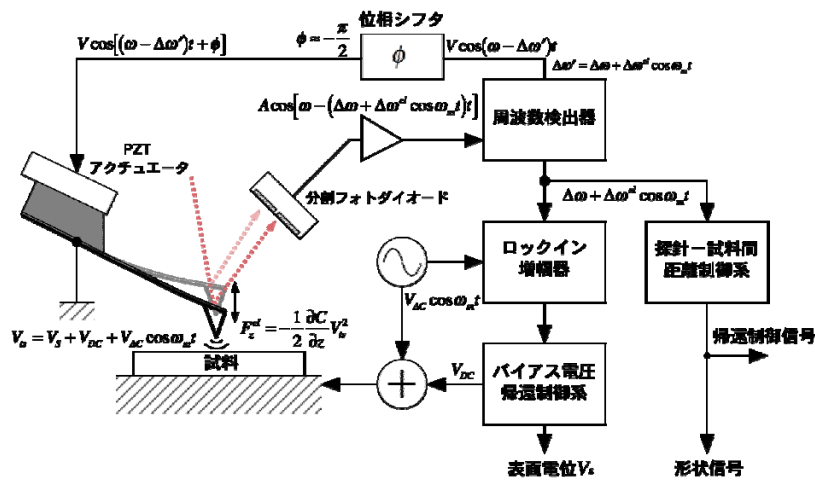


図3 装置構成の例 (FM 検出)

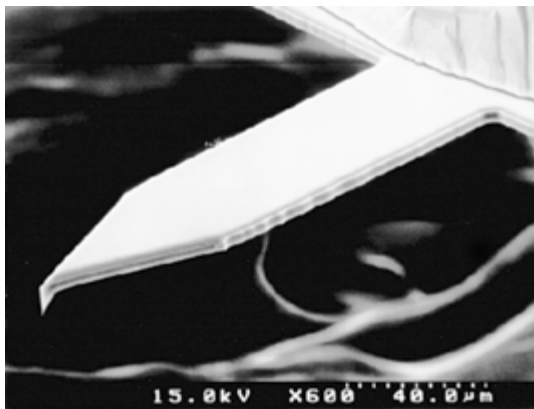


図4 一般的な AFM 用カンチレバーの外形

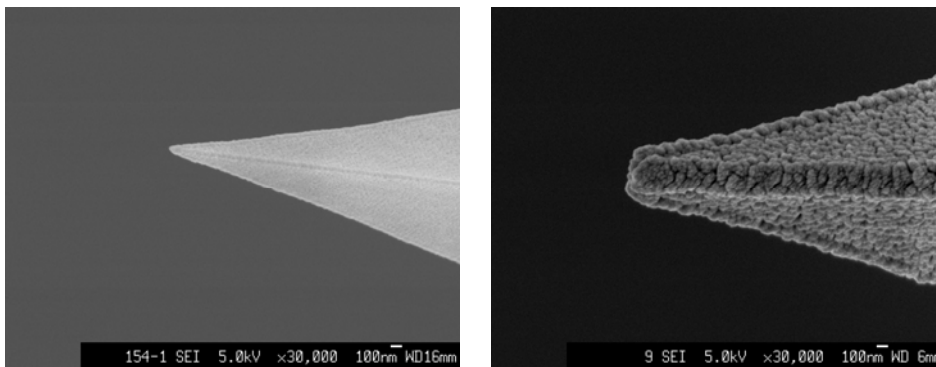


図5 探針先端の電子顕微鏡写真：(左) 先端が尖っている場合、(右) 先端がつぶれている場合

※右のような先の潰れた探針を試料表面に数十 nm 程度の距離まで近づけると、この問題で計算したような平行平板でもかなり良い近似となる。