

略解

問 1 過程 1 の後の圧力と体積を P_1, V_1 , また, 過程 3 の間に気体に対してした仕事を W_3 のように, 物理量に添え字をつけて使うことにする。

(1) 過程 1 は断熱準静過程なので,

$$\frac{T_H^{\frac{5}{2}}}{P_1} = \frac{T_L^{\frac{5}{2}}}{P_L} \text{ より } P_1 = P_L \left(\frac{T_H}{T_L} \right)^{\frac{5}{2}}$$

内部エネルギーは $U_1 = \frac{3}{2}NR T_H$

(2) 断熱過程で気体に対してした仕事は, 内部エネルギーの変化に等しいので

$$W_1 = \frac{3}{2}NR(T_H - T_L)$$

(3) 過程 2 は等温準静過程なので, $P_H V_2 = P_1 V_1$ 。

$$W_2 = -NR T_H \log \left(\frac{V_2}{V_1} \right) = -NR T_H \log \left(\frac{P_1}{P_H} \right) = NR T_H \left(\log \frac{P_H}{P_L} - \frac{5}{2} \log \frac{T_H}{T_L} \right)$$

(4) 理想気体の等温準静操作では内部エネルギーは変わらないので, エネルギー保存則から, 気体に対してした仕事と気体が吸収した熱の和は 0 である。過程 2 と 4 で吸収した熱をそれぞれ Q_H, Q_L とすると

$$Q_H = -W_2 = -NR T_H \left(\log \frac{P_H}{P_L} - \frac{5}{2} \log \frac{T_H}{T_L} \right)$$

また, (1)(3) と同様に

$$P_3 V_3 = P_L T_L \quad P_3 = P_H \left(\frac{T_L}{T_H} \right)^{\frac{5}{2}}$$

であるから

$$Q_L = -W_4 = NR T_L \log \left(\frac{V_4}{V_3} \right) = NR T_L \log \left(\frac{P_3}{P_L} \right) = NR T_L \left(\log \frac{P_H}{P_L} - \frac{5}{2} \log \frac{T_H}{T_L} \right) (> 0)$$

$$\frac{Q_H}{Q_L} = -\frac{T_H}{T_L}$$

(5)

$$W_3 = \frac{3}{2}NR(T_L - T_H)$$

$$\text{成績係数} = \frac{-Q_H}{W} = \frac{W_2}{W_1 + W_2 + W_3 + W_4} = \frac{T_H}{T_H - T_L} = \frac{300}{300 - 280} = 15$$

(6) (評価の視点) それぞれの過程の, 外界が気体にする仕事, 気体が吸収する熱, 内部エネルギーの変化について, それらの方向(符号)や相互の関係を整理して理解できたか, それを踏まえてこのサイクルの動作の様子を説明できるか, 等を評価する。

問 2

- (1) 過程 A と C は断熱準静過程なので，気体にした仕事は内部エネルギーの変化に等しい。したがって

$$W_A = -W_C = U(T_H) - U(T_L)$$

- (2) サイクルを一周すると元の状態に戻るので内部エネルギーの変化は 0。よってエネルギー保存則より $W = -(Q_B + Q_D)$ 。あるいは，各過程の仕事を足してゆくと

$$W = \{U(T_H) - U(T_L)\} - Q_B - \{U(T_H) - U(T_L)\} - Q_D = -(Q_B + Q_D)$$

- (3) 高温熱源から熱を吸収して低温熱源に熱を放出，外界に仕事をしている。いわゆる熱機関。

- (4) (2) と同様にサイクルを一周すると内部エネルギーの変化は 0 なので， $W = -(Q_b + Q_d)$ 。あるいは，

$$W = \{u(T_H, v_1) - u(T_L, v_0)\} + \{u(T_H, v_2) - u(T_H, v_1) - Q_b\} + \{u(T_L, v_3) - u(T_H, v_2)\} \\ + \{u(T_L, v_0) - u(T_L, v_3) - Q_d\} = -(Q_b + Q_d)$$

理想気体ではないから，等温準静過程（過程 b と d ）で内部エネルギーが変化することに注意。

- (5) 2 つのサイクルの仕事の和は

$$W = (Q_B + Q_D) - (Q_b + Q_d) = Q_B - Q_b \quad \because Q_d = Q_D$$

1 サイクル終了後，気体の状態は元に戻るので変化はないが，温度 T_H の熱源とやり取りした熱 $Q_B - Q_b$ に等しい仕事を行うので第二種の永久機関である。この説明で十分であるが， $Q_B \neq Q_b$ であること，また， Q_B と Q_b の大小関係で仕事が正になるようにサイクルの向きを反転しないといけないこと，などまで書かれていれば高く評価。

問 3

(1) 断熱準静操作なので，気体にした仕事は内部エネルギーの変化に等しい。したがって

$$T_5 = T_L \left(\frac{P_5}{P_L} \right)^{\frac{2}{5}} \text{ より } W_5 = \frac{3}{2}NR(T_5 - T_L) = \frac{3}{2}NRT_L \left\{ \left(\frac{P_5}{P_L} \right)^{\frac{2}{5}} - 1 \right\}$$

(2) 過程 6 では気体にした仕事は 0 なので，吸熱量は内部エネルギーの変化に等しい。吸熱を正として

$$Q_H = \frac{3}{2}NR(T_H - T_5) = \frac{3}{2}NR \left\{ T_H - T_L \left(\frac{P_5}{P_L} \right)^{\frac{2}{5}} \right\} (< 0)$$

(3) 過程 6 ~ 8 の後の温度・圧力・体積を順番に計算する必要がある。過程 8 では，圧力一定で体積を変化させるので，(仕事) = (圧力) × (体積変化) である。吸収した熱は，エネルギー保存則を適用して，仕事と内部エネルギーの変化から求める。

$$V_6 = V_5 = \frac{NRT_5}{P_5} = \frac{NRT_L}{P_5} \left(\frac{P_5}{P_L} \right)^{\frac{2}{5}}$$

$$\frac{P_6}{P_L} = \frac{NRT_H}{P_L V_6} = \frac{T_H}{T_L} \left(\frac{P_5}{P_L} \right)^{\frac{3}{5}}$$

$$T_7 = T_H \left(\frac{P_L}{P_6} \right)^{\frac{2}{5}} = T_H \left(\frac{T_L}{T_H} \right)^{\frac{2}{5}} \left(\frac{P_L}{P_5} \right)^{\frac{6}{25}}$$

$$W_8 = P_L(V_7 - V_L) = NR(T_7 - T_L) = NRT_L \left\{ \left(\frac{T_H}{T_L} \right)^{\frac{3}{5}} \left(\frac{P_L}{P_5} \right)^{\frac{6}{25}} - 1 \right\}$$

$$Q_L = \frac{3}{2}NR(T_L - T_7) - W_8 = \frac{5}{2}NRT_L \left\{ 1 - \left(\frac{T_H}{T_L} \right)^{\frac{3}{5}} \left(\frac{P_L}{P_5} \right)^{\frac{6}{25}} \right\}$$

(4) ここまでの結果を用いて

$$\frac{Q_H}{NR} = \frac{3}{2}(300 - 280 \cdot 10^{0.4}) \sim \frac{3}{2}(300 - 280 \cdot 2.51) \sim -605$$

$$\frac{W_5}{NR} = \frac{3}{2} \cdot 280 \cdot (10^{0.4} - 1) \sim \frac{3}{2} \cdot 280 \cdot (2.51 - 1) \sim 634$$

$$\frac{W_6}{NR} = 0$$

$$\frac{W_7}{NR} = \frac{3}{2}(T_7 - T_H) = \frac{3}{2}T_H \left\{ \left(\frac{T_L}{T_H} \right)^{\frac{2}{5}} \left(\frac{P_L}{P_5} \right)^{\frac{6}{25}} - 1 \right\} = \frac{3}{2} \cdot 300 \cdot \left\{ \left(\frac{280}{300} \right)^{0.4} \cdot 10^{-0.24} - 1 \right\}$$

$$\sim \frac{3}{2} \cdot 300 \cdot (0.973 \cdot 0.575 - 1) \sim -198$$

$$\frac{W_8}{NR} = 280 \cdot \left\{ \left(\frac{300}{280} \right)^{0.6} \cdot 10^{-0.24} - 1 \right\} \sim 280 \cdot (1.042 \cdot 0.575 - 1) \sim -112$$

$$\text{成績係数 } \frac{-Q_H}{W_5 + W_6 + W_7 + W_8} \sim \frac{605}{634 + 0 - 198 - 112} \sim 1.87$$