令和５年度

千葉大学先進科学プログラム入学者選考課題

課題論述　物理

課題I, II

(9:00-15:00)

注意事項

1. この冊子は，監督者から解答を始めるよう合図があるまで開いてはいけません。
2. 問題冊子に印刷または製本の不具合がある場合は，手を上げて申し出て下さい。
3. 課題 I および課題 II の問題すべてに解答してください。
4. 解答用紙は課題ごとに分けて使用してください。解答用紙は何枚使用しても構いません。全ての解答用紙に受験番号を必ず記入して下さい。
5. 携帯電話やスマートフォン等の電子機器はすべて電源を切り，カバンにしまってください。
6. その他，監督者の指示に従って下さい。

[I]

半径 R の半円状の細い針金を，図 1 のように，半円が鉛直下向きになるように置いた。この針金に，小さな穴の開いた質量 m の小球を通し，針金に沿って運動できるようにした。本問題では，小球と針金の間に，**A:** 摩擦がない場合，および **B:** 摩擦がある場合のそれぞれに対して，小球の運動を調べよう。重力加速度の大きさを g とし，空気抵抗は無視できるものとして，以下の問いに答えなさい。

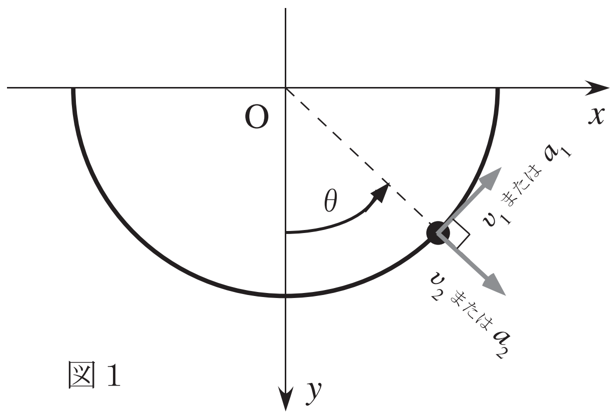

図 1

A はじめに，小球と針金の間に摩擦がない場合を考える。小球の運動を調べるために，まず，運動方程式を導こう。図 1 のように，半円の中心を原点 O として，水平右向きに x 軸を，鉛直下向きに y 軸を取り，時刻 t における小球の位置を $(x(t), y(t))$ とする。このとき，小球の x 方向の速度 v_x は，$x(t)$ を時間 t で微分した $v_x = \dfrac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}$ で，加速度 a_x は $a_x = \dfrac{\mathrm{d}^2x(t)}{\mathrm{d}t^2}$ で与えられる。y 方向も同様である。

一方，小球は円周上を動くので，円周に沿った運動を考えると便利である。時刻 t において小球は，y 軸からの角度が θ の位置にあるとする。

問 1 円周に沿った方向の小球の速度と加速度（反時計回りを正の向きとする）をそれぞれ v_1，a_1，円周に垂直な方向の小球の速度と加速度（円周の外方向を正の向きとする）をそれぞれ v_2，a_2 とする。このとき，例えば v_1 は，$v_1 = v_x \cdot \cos\theta - v_y \cdot \sin\theta$ と書くことができる。同様にして v_2，a_1，a_2 のそれぞれを，v_x，v_y，a_x，a_y，および θ のうち必要な記号を用いて表しなさい。

小球は時刻 t と共にその位置を変えるので，θ は時刻 t の関数 $\theta(t)$ であり，時刻 t における小球の位置は $(x(t), y(t)) = (R\sin\theta(t), R\cos\theta(t))$ と表すことができる。このとき，例えば x 方向の速度は，$v_x = \dfrac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = R\dfrac{\mathrm{d}\theta(t)}{\mathrm{d}t} \cdot \cos\theta(t)$ と書くことができる。以下，簡単のために，$\theta = \theta(t)$，$\theta' = \dfrac{\mathrm{d}\theta(t)}{\mathrm{d}t}$，$\theta'' = \dfrac{\mathrm{d}^2\theta(t)}{\mathrm{d}t^2}$ と書くことにする。

問 2 (ア) $v_x = R\theta' \cdot \cos\theta$ と同様にして v_y，a_x，a_y のそれぞれを，R，θ，θ'，θ'' のうち必要な記号を用いて表しなさい。

(イ) 上の (ア) の答を問 1 の答に代入することで，v_1，v_2，a_1，a_2 のそれぞれを，R，θ，θ'，θ'' のうち必要な記号を用いて表しなさい。

(ウ) 針金から小球に働く，原点 O を向いた垂直抗力を N とする。このとき，円周に沿った方向および円周に垂直な方向の，時刻 t における小球の運動方程式は，それぞれ次式で与えられることを説明しなさい。

$$+mR\theta'' = -mg\sin\theta \tag{1}$$

$$-mR(\theta')^2 = +mg\cos\theta - N \tag{2}$$

次に，円周に沿った方向の運動方程式に基づき，小球の運動を考える。時刻 $t = 0$ に小球を角度 θ_0（ただし $0 < \theta_0 \leqq \dfrac{\pi}{2}$）の位置から静かにはなすと，小球は円周上を振動した。この振動の周期を考えよう。

問 3 θ_0 が微小なとき θ も微小（つまり $|\theta| \ll 1$）であり，式 (1) に示した運動方程式において $\sin\theta \fallingdotseq \theta$ と近似することができる。このときの小球の振動の周期 T_0，および時刻 t における小球の角度 $\theta(t)$ を求めなさい。

次に，θ_0 が微小でないときの小球の振動の周期を，近似せずに調べてみよう。時刻 $t \sim t + \mathit{\Delta} t$ の間に小球の角度が $\theta \sim \theta + \mathit{\Delta}\theta$ に変わったとすると，小球は $R|\mathit{\Delta}\theta|$ 移動したことになる。このときの小球の速さは $R|\theta'|$ なので，移動にかかった時間は $\mathit{\Delta} t = \dfrac{R|\mathit{\Delta}\theta|}{R|\theta'|}$ となる。ところで，振動の 1 周期中に角度は，θ_0 から 0 を通って $-\theta_0$ まで変わり，さらに $-\theta_0$ から再び 0 を通って θ_0 まで変わるので，振動の周期は，角度が 0 から θ_0 まで変わる時間の 4 倍で与えられる。ゆえに，周期 $T(\theta_0)$ は，上記の $\mathit{\Delta} t$ をこの時間内で足し合わせた積分の 4 倍となり，積分変数 t を θ に変数変換すると，次式の θ に関する積分で表される。

$$T(\theta_0) = 4\int_{\frac{3}{4}T(\theta_0)}^{T(\theta_0)} \mathrm{d}t = 4\int_0^{\theta_0} \frac{1}{|\theta'|}\mathrm{d}\theta \tag{3}$$

ここで $|\theta'|$ を変数 θ の関数として求めておけば，式 (3) の最右辺を使って $T(\theta_0)$ の計算ができることになる。

問 4 式 (3) において，特に θ_0 が微小なときを考える。このとき，式 (3) が問 3 の答 T_0 を与えることを確かめよう。

(ア) 問 3 の答の $\theta(t)$ を用いて，t を消去し，$|\theta'|$ を，R，g，θ_0，θ を用いて表しなさい。

(イ) 上の (ア) の $|\theta'|$ を式 (3) に代入して，このときの $T(\theta_0)$ を求めなさい。計算の過程を示すこと。

問 5 今度は，θ_0 が微小でないときを考える。

(ア) エネルギー保存則を考えて，小球が角度 θ の位置にあるときの $|\theta'|$ を，R，g，θ_0，θ を用いて表しなさい。

(イ) 上の (ア) の $|\theta'|$ を式 (3) に代入することで $T(\theta_0)$ の値がわかることになる。代入して，まず式 (3) の被積分関数を $\sin\dfrac{\theta_0}{2}$，$\sin\dfrac{\theta}{2}$，R，g を用いて表しなさい。

(ウ) 次に，変数変換 $\sin\dfrac{\theta}{2} = \sin\dfrac{\theta_0}{2}\cdot\sin\phi$ によって積分変数を θ から ϕ に変えると，$T(\theta_0)$ は次式で与えられる。空欄 $\Box$ に入る式を求めなさい。

$$T(\theta_0) = 4\sqrt{\frac{R}{g}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-\Box}}\,\mathrm{d}\phi \tag{4}$$

(エ) 式 (4) を用いて，$T(\theta_0)$ は，θ_0 の単調増加関数になっていることを示しなさい。

(オ) 上の (エ) から，周期が最も長くなるのは $\theta_0 = \dfrac{\pi}{2}$ のときであることがわかる。この長さはどのくらいであろうか。式 (4) の被積分関数の大きさを考えて，$T(\theta_0 = \dfrac{\pi}{2}) < \sqrt{2}T_0$ となることを示しなさい。ここで T_0 は，問 3 で求めたものである。

(カ) 上の (オ) では，$T(\theta_0 = \dfrac{\pi}{2})$ は $\sqrt{2}T_0$ より小さいことを示したが，実は $\sqrt{2}$ より小さい正の数 s を使って，$T(\theta_0 = \dfrac{\pi}{2}) < s\cdot T_0$ となることを示すこともできる。工夫して，$\sqrt{2}$ より小さい正の数 s を求めなさい。

(次ページに続く)

B 次に，小球と針金の間に摩擦がある場合を考える。動摩擦係数を μ とすると，運動している小球には，μN の大きさの動摩擦力が円周方向に働く。ここで，N は針金から小球に働く垂直抗力であり，式 (2) から θ' と θ の関数として表される。

問 6 摩擦があるときの小球の円周方向の運動方程式を，$\theta' < 0$，$\theta' > 0$ のそれぞれの場合について，m，R，g，μ，θ，θ'，θ'' を用いて表しなさい。

時刻 $t = 0$ に小球を角度 θ_0（ただし $0 < \theta_0 \leqq \dfrac{\pi}{2}$）の位置から静かにはなすと，小球は下に向けて動き始めた。

まず，θ_0 が微小であり，μ も微小な場合を考えよう。このときは，小球は円周上を振動しながら，徐々に振動の振幅を小さくした。

問 7 (ア) θ_0 および μ が微小であるとき，問 6 で求めた運動方程式において，$\sin\theta \fallingdotseq \theta$，$\cos\theta \fallingdotseq 1$，$\mu(\theta')^2 \fallingdotseq 0$ と近似できるものとする。近似した方程式を参考に，θ_0 から動き始めた小球の速度が初めて 0 となる角度 θ_1 を求めなさい。

(イ) θ_1 で速度が 0 になった小球は再び下に向けて動き，次には角度 θ_2 で速度が 0 になった。θ_2 を求めなさい。

(ウ) 小球はこのように振動を繰り返し，$2M$ 回目 (M は正の整数) に速度が 0 になると，以降は動くことはなかった。$2M$ 回目に速度が 0 になった時刻 t_{2M} を求めなさい。また，静止摩擦係数を μ_0 とすると，μ_0 の値はある範囲になければならない。その範囲を求めなさい。

今度は，θ_0 や μ が大きい場合を考える。時刻 $t = 0$ に小球を角度 $\theta_0 = \dfrac{\pi}{2}$ の位置から静かにはなすと，小球は下に向けて動き，振動せずに $\theta = 0$ で止まった。このときの μ の大きさを以下のように求めてみよう。

問 8 (ア) 問 6 で求めた運動方程式のこの場合の解は，次の式を満たすことが知られている。

$$(\theta')^2 = A\cos\theta + B\sin\theta + Ce^{2\mu\theta} \qquad (5)$$

式 (5) を時間 t で微分した式と問 6 の運動方程式を比べると共に，$t = 0$ の初期条件を考慮することで，定数 A，B，C を R，g，μ を用いて表しなさい。

(イ) 小球が $\theta = 0$ で止まるために，μ が満たすべき方程式を求めなさい。

(ウ) 電卓を用いて，上の (イ) の方程式の解 μ の概数値を，小数点以下 1 桁まで求めなさい。

[II]

空気の密度は温度 (T) や圧力 (P)，湿度 (ϕ) といった気象条件により異なる。熱気球やフェーン現象など，空気の密度変化に関連した事柄を物理の知識を使って考えよう。この設問ではモルを単位とした物質量が n，体積が V の空気の圧力と温度は，気体定数を $R = 8.31\ \mathrm{J/(mol\cdot K)}$ として，理想気体の状態方程式

$$PV = nRT \tag{1}$$

に従うものとする。また重力加速度は $g = 9.80\ \mathrm{m/s^2}$ を用い，分子の質量を求める際には，表 1 に与えられた分子量を用いなさい。必要ならば，$|x| \ll 1$ のとき任意の実数 n に対して成り立つ近似式 $(1+x)^n \fallingdotseq 1 + nx$ や，$|y| \ll 1$ かつ $|z| \ll 1$ のときに成り立つ近似式 $(1+y)(1+z) \fallingdotseq 1 + y + z$ を用いなさい。

表 1: 気体分子の化学式と分子量

分子	ヘリウム	窒素	酸素	水蒸気
化学式	He	N_2	O_2	H_2O
分子量	4.00	28.0	32.0	18.0

分子量は 1 モルの分子の質量を g 単位で表した数値である。

問 1 乾燥空気は，分子数の 80.0%が窒素，20.0%が酸素からなるとする。乾燥空気の平均分子量 M を求めなさい。また圧力が $P_0 = 1.00 \times 10^5\ \mathrm{Pa}$，温度が $T_0 = 300.0\ \mathrm{K}$ のときの密度 ρ_0 を求めなさい。

問 2 同じ圧力，温度のヘリウムガスと乾燥空気の密度比 $\rho_{\mathrm{He}}/\rho_0$ を求めなさい。

問 3 圧力が $P = P_0 + \mathit{\Delta} P$ で温度が $T = T_0 + \mathit{\Delta} T$ の乾燥空気の密度を $\rho = \rho_0 + \mathit{\Delta}\rho$ とする。圧力と温度の変化が微小である ($|\mathit{\Delta} P| \ll P_0,\ |\mathit{\Delta} T| \ll T_0$) として $\mathit{\Delta}\rho/\rho_0$ を求めなさい。

問 4 空気の密度は湿度によっても変化する。湿度は水蒸気の分圧 (P_{v}) の飽和水蒸気圧 $P_{\mathrm{v,max}}$ に対する割合 $\phi = P_{\mathrm{v}}/P_{\mathrm{v,max}}$ とする。温度 T での飽和水蒸気圧は Tetens の式，

$$P_{\mathrm{v,max}}(T) \ = \ 1.93 \times 10^{10} \exp\left(-\frac{4.10 \times 10^3\ \mathrm{K}}{T - 35.8\ \mathrm{K}}\right)\ \mathrm{Pa} \tag{2}$$

により求められる。ここで $\exp(x)$ は指数関数 e^x を表す。これらの関係式を用いると，圧力が P，温度が T，湿度が ϕ の空気の平均分子量 M' は，P，T の関数 $\alpha\,(P,T)$

を用いて

$$M'(P,T,\phi) \;=\; M + \alpha\,(P,T)\,\phi \tag{3}$$

と表せることを示しなさい。また $P = 1.00 \times 10^5$ Pa で $T = 290.0,\ 300.0,\ 310.0$ K の場合の α の値を符号にも注意して求めなさい。

問 5 前問の結果を用い，圧力が P，温度が T，湿度 ϕ の場合の密度 ρ は，P，T の関数 $\beta\,(P,T)$ を用いて

$$\rho\,(P,T,\phi) \;=\; \rho_0 \left(\frac{P}{P_0}\right)\left(\frac{T_0}{T}\right)[1+\beta(P,T)\phi] \tag{4}$$

と表せることを示しなさい。また $P = 1.00 \times 10^5$ Pa で $T = 290.0,\ 300.0,\ 310.0$ K の場合の β の値を符号にも注意して求めなさい。

問 4 と問 5 では湿度を考慮したが，問 6 から問 9 までは空気は乾燥している ($\phi = 0$) として答えなさい。

地表面からの高さ z により圧力 $P(z)$ や温度 $T(z)$ は変化する。このことを考慮して密度 $\rho(z)$ が高さとともにどのように変化するか，以下の問いに従って考えなさい。

問 6 図 1 に示すような底面が高さ z_0 で，上面が高さ z にある，重さのない仮想的な直方体の箱を考えよう。底面と上面の面積を S とする。この箱の空気にかかる重力が底面と上面にかかる圧力により支えられているとき，等式

$$P(z) \;=\; P(z_0) - g\int_{z_0}^{z} \rho(z')\,dz' \tag{5}$$

が成り立つことを示しなさい。

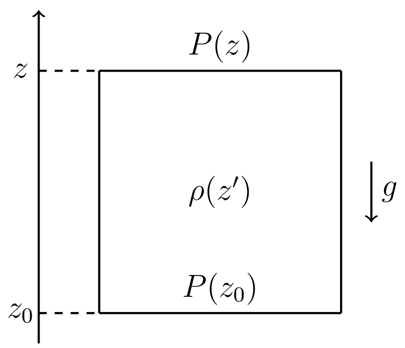

図 1

問 6 では仮想的な箱を置いて考えたが，箱がなくても大気が静かであれば，式 (5) は正しい圧力分布を与える。

問 7 大気の温度が高さによらず T_0 で一定の場合，圧力の対数は

$$\frac{d}{dz}\log\left[\frac{P(z)}{P(0)}\right] \;=\; -\frac{1}{\lambda} < 0 \tag{6}$$

のように高さ z が上昇するにつれ一定の割合で減少する。式 (5) から式 (6) が導かれることを示しなさい。また $T_0 = 300.0$ K の場合について λ の値を求めなさい。ただし log は自然対数である。

問 8 実際の大気の温度は高さ z とともに変化し，温度分布は次のように表せるとする。

$$T(z) \;=\; T(0) - \eta z \qquad\qquad \text{ただし}\quad \eta = 6.00 \times 10^{-3}\ \mathrm{K/m} \tag{7}$$

式 (5) と (7) を用いて，圧力 $P(z)$ と密度 $\rho(z)$ を数式で表しなさい。また $P(0) = 1.00 \times 10^5$ Pa，$T(0) = 300.0$ K のとき，高さ $z = 3.00 \times 10^3$ m の密度は $z = 0$ での密度の何%になるか求めなさい。

問 9 高さが $0 \leqq z \ll \lambda$ の範囲であれば，高さ z での圧力 $P(z)$ は

$$P(z) \;\fallingdotseq\; P(0)\left(1 - \frac{z}{\lambda}\right) \tag{8}$$

と近似できる。同様に高さ z での密度 $\rho(z)$ も

$$\rho(z) \;\fallingdotseq\; \rho(0)\left(1 - \frac{z}{\lambda'}\right) \tag{9}$$

と表すことができる。高さ $z = 0$ で温度が $T(0) = 300.0$ K である場合について λ' を求めなさい。

日が照ると，気温が上がるとともに地表面の水分が蒸発し，上昇気流が発生する。以下では，温度が上がることによる効果と水分が蒸発する効果をそれぞれ検討しよう。

問 10 乾燥空気が暖められ，周囲より ΔT だけ温度が高いかたまりができた状況を考える。温められた空気は高さ $z = 0$ で周囲より密度が低い ($\Delta\rho < 0$) ので，ゆっくり上昇する。かたまりは周囲と同じ圧力を保ちながら，熱を交換することなく (断熱的に) 膨張し，上昇すると考えよう。上昇したかたまりと周囲の大気の密度が等しくなると浮力が消える。浮力が消える高さ h を求めなさい。かたまりの上昇が始まる地点での周囲の大気の圧力と温度はそれぞれ $P(0)$ と $T(0)$ とし，$\Delta T \ll T(0)$ とする。

問 11 湿った空気のかたまりには軽い水分子が含まれるため，乾燥空気より高いところまで上昇することができる。乾燥した大気の中で，高さ $z = 0$ に湿度が周囲より $\Delta\phi = 0.100$ だけ高い空気のかたまりができたとして，湿った空気の上昇を考えよ

う。高さ $z=0$ では湿った空気のかたまりも周囲の大気も圧力は $P(0)=1.00\times10^5$ Pa，温度は $T(0)=300.0$ K である。高さ $z=0$ での湿度の変化による密度変化 $(\mathit{\Delta}\rho')$ と，浮力が消える高さ h' を求めなさい。湿った空気でもほとんどが窒素や酸素なので，上昇する際の密度の変化は問 10 で扱った乾燥空気と同様に計算して良い。上昇に伴い温度が下がり，飽和蒸気圧が下がるため，水蒸気の一部が水滴となることもあるが，この問題ではこの可能性を考えなくて良い。

問 12 高さ $z=0$ での温度が $T(0)=310.0$ K の場合について，問 11 と同様に $\mathit{\Delta}\phi=0.100$ の湿った空気のかたまりの浮力が消える高さ h' を求めなさい。式 (8) や (9) を使用する際には $T(0)=310.0$ K であることに注意しなさい。

問 13 水蒸気が水滴に変わると，空気の平均分子量が増加することと，凝縮熱により暖められることにより密度が変化する。凝縮熱は温度により若干異なるが，この設問では 44.0 kJ/mol で一定とする。水滴が発生した直後に空気の密度が上がるか下がるか論じなさい。凝縮熱は全て空気を暖めるために使われるとして良い。

問 14 湿った気流が山の斜面を上昇すると，山に雨を降らせ，空気は乾燥する。乾燥した気流は山の頂上を越え，反対側の斜面を降りてゆく。上昇流から下降流に転じるのは，高さ $z=3.00\times10^3$ m で，この高さでの圧力と温度は問 8 で求めたものと等しいとする。また下降流は周囲と同じ圧力を保ち，熱を交換しないとする。下降流の圧力も高さ $z=0$ では $P(0)=1.00\times10^5$ Pa として $z=0$ での下降流の温度を求めなさい。

問 15 問 1 から問 14 まで学んだ知識を応用することにより説明ができる事柄を列記し，それぞれについて適切な説明を与えなさい。関連するものであれば，例は気象に限る必要はない。

解答例: Tetens の式に 温度 100 °C (373.15 K) を代入すると，$P_{\mathrm{v,max}}=1.02\times10^5$ Pa が得られる。この飽和水蒸気圧は，1 気圧では 100 °C で水が沸騰することを表している。